ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 17/11/2014

Data $f: A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ (ovvero: derivabile in A con derivata $f': A \to \mathbb{R}$ continua), se f' è anche derivabile posso derivarla a sua volta: la sua derivata si denota $\boxed{f''}$ (oppure $\frac{d^2 f}{dx^2}$) ed è detta DERIVATA SECONDA di f. E così via: per $k \geq 2$, la derivata della derivata $(k-1)$-esima di f si denota con $\boxed{f^{(k)}}$ (oppure $\frac{d^k f}{dx^k}$) ed è detta DERIVATA K-ESIMA di f.

Dato un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, denoterò con $\mathcal{C}^k(A)$ la famiglia delle funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ di CLASSE $\mathcal{C}^k$ (ovvero derivabili k volte in A con derivata k-esima continua). L'insieme $\mathcal{C}^k(A)$ è sp. vettoriale su $\mathbb{R}$, e vale

$$\dots\ \mathcal{C}^{(k)}(A) \subset \mathcal{C}^{(k-1)}(A) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(A) \subset \mathcal{C}^0(A)$$

(ove $\mathcal{C}^0(A)$ denota lo spazio vettoriale delle funzioni continue su A).

Se una funzione è derivabile infinite volte, si dice di CLASSE $\mathcal{C}^\infty$.

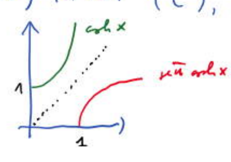
Prop. Le funzioni elementari (modulo, polinomi, exp, log, potenze, circolari, iperboliche e loro inverse) sono $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il loro dominio, tranne le seguenti (poche) eccezioni:

(1) La potenza x^α in $x_0 = 0$ quando $\alpha > 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$: è solo $\mathcal{C}^{[\alpha]}$.

(2) il modulo $|x|$ in $x = 0$ (è solo $\mathcal{C}^0$).

(3) l'arco-seno $\arcsin x$ e l'arco-coseno $\arccos x$ in $x = \pm 1$ ($\mathcal{C}^0$).

(4) il settore arco-coseno iperbolico $\operatorname{settcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ in $x = 1$ ($\mathcal{C}^0$).



FORMULA DI TAYLOR : mostra lo SVILUPPO ASINTOTICO DI UNA FUNZIONE DERIVABILE

(e giustifica gli sviluppi esibiti per il calcolo locale).

Teorema (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Sia A intervallo, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in A.
Assumiamo inoltre che f sia derivabile k volte in x_0. Allora

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + o_{x_0}\left((x-x_0)^k\right)$$

$$= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}_{=:\, f_{k,x_0}(x)\ :\ \text{è un polinomio di grado} \le k} + o_{x_0}\left((x-x_0)^k\right)$$

=: $f_{k,x_0}(x)$: è un polinomio di grado $\le k$.

Dim. Notiamo che $f(x)$ e il polinomio di Taylor

$$f_{k,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \dots\dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

hanno tutte le derivate in x_0 uguali fino all'ordine k:

$$f^{(j)}(x_0) = f^{(j)}_{k,x_0}(x_0) \qquad \forall j = 0, 1, \dots, k \quad ,$$

dunque la funzione resto $\phi := f - f_{k,x_0}$ soddisfa $\phi^{(j)}(x_0) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k$

Pertanto ci resta solo da dimostrare il seguente

Lemma | Sia $\phi : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{k-1}$, e derivabile k volte in x_0.
Allora $\phi \in \Theta_{x_0}((x-x_0)^k) \iff \phi^{(j)}(x_0) = 0 \quad \forall j = 0, 1, .., k.$

Dim. (del Lemma).

"$\Rightarrow$". Ragioniamo per induzione su k.

Caso $k=0$ è vero ($\phi \in \Theta_{x_0}(1) \iff \phi(x_0) = 0$) infinitesima!

Supponiamo ora che "$\Rightarrow$" sia vero fino a $k-1$,

e mostriamo che lo è anche per k.

Poiché $\Theta_{x_0}((x-x_0)^k) \subset \Theta_{x_0}((x-x_0)^{k-1})$,

per ipotesi induttiva già sappiamo che

$\phi^{(0)}(x_0) = \dots = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$.

Ci resta solo da mostrare che anche $\phi^{(k)}(x_0) = 0$. Ma:

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^k} \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\phi'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}} \overset{\text{Hôp}}{=} \dots$$

per ipotesi $\phi \in \Theta_{x_0}((x-x_0)^k)$

$$\dots \overset{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\phi^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\phi^{(k)}(x_0)}{k!}, \text{ dunque } \phi^{(k)}(x_0) = 0.$$

"$\Leftarrow$" Ora per ipotesi $\phi^{(j)}(x_0) = 0 \quad \forall j = 0, 1, .., k$, e

dobbiamo mostrare che $\phi \in \Theta_0((x-x_0)^k)$. Ma si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{(x-x_0)^k} \overset{0/0 \text{ Hôp}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\phi'(x)}{k(x-x_0)^{k-1}} \overset{0/0 \text{ Hôp}}{=} \dots \overset{0/0 \text{ Hôp}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{\phi^{(k)}(x)}{k!}$$

$$= \phi^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{ovvero } \phi \in \Theta_{x_0}((x-x_0)^k).$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ Sviluppare $f(x) = \sin x$ in $x_0 = 0$ e in $x_0 = \pi/6$.

$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad \dots$

In $x_0 = 0$: $f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \dots$ dunque

$$\sin x = 0 + 1(x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \frac{(-1)}{3!}(x-0)^3 + \theta_0((x-0)^3)$$
$$= x - \frac{1}{6}x^3 + \theta_0(x^3) \qquad \text{(lo sviluppo che si era anticipato).}$$

<u>In $x_0 = \pi/6$</u> : $f(\frac{\pi}{6}) = 1/2$, $f'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}/2$, $f''(\frac{\pi}{6}) = -1/2$, $f'''(\frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}/2$, ... dunque

$$\sin x = 1/2 + \sqrt{3}/2\,(x-\pi/6) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-\pi/6)^2 + \frac{1}{6}\cdot\left(-\sqrt{3}/2\right)(x-\pi/6)^3 + \theta_{\pi/6}((x-\pi/6)^3)$$

oppure, usando le prostaferesi, posto $t = x - \pi/6 \sim 0$

$$\sin x = \sin(t + \pi/6) = \sin t \cdot \cos\pi/6 + \cos t \cdot \sin\pi/6 =$$
$$= \sqrt{3}/2 \cdot \sin t + 1/2 \cos t = \sqrt{3}/2\left(t - \frac{1}{6}t^3 + \theta_0(t^3)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \theta(t^3)\right)$$
$$= 1/2 + \sqrt{3}/2\, t - 1/4\, t^2 - \sqrt{3}/12\, t^3 + \theta_0(t^3)$$

che, risostituito $t = x - \pi/6$, coincide col precedente.

Ora un comodo criterio per <u>determinare la natura di un punto stazionario</u> (pto di max/min locale, o niente di ciò) <u>usando le derivate successive in esso</u>.

Prop. Sia A intervallo, $f: A \to \mathbb{R}$ derivabile k volte (con $k \geq 1$).
Sia poi $x_0 \in A$ stazionario (ovvero $f'(x_0) = 0$).

(1) se x_0 è punto di min/max locale, allora $f''(x_0) \geq 0$ (risp ≤ 0)

(2) Viceversa sia $f'(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, e $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

(i) se k è pari e $f^{(k)}(x_0) > 0$ (risp. < 0), allora x_0 è pto di min/max loc. stretto

(ii) se k è dispari, allora x_0 non è estremante locale.

Dim. (1) segue da (2): se fosse $f''(x_0) < 0$ allora per (2.ii) x_0 sarebbe di max loc. stretto, dunque non potrebbe essere di minimo loc.

(2) Per Taylor vale $f(x)-f(x_0) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right)$,

da cui $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^k} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \overset{\text{per ipotesi}}{\neq} 0$:

pertanto, per la permanenza del segno, $\exists$ intorno di x_0 in cui $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^k}$ mantiene il segno di $f^{(k)}(x_0)$,

ovvero in cui $f(x)-f(x_0)$ ha il segno di $f^{(k)}(x_0)\cdot(x-x_0)^k$.

Questo prova quanto affermato in (2). $\square$

$\boxed{\text{Esercizio}}$

Data la famiglia di funzioni $f(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) - \cos x + 2\sin x$, per quali $A, B \in \mathbb{R}$ la funzione ammette un max locale in $x=0$?

Le funzioni sono sempre $\mathcal{C}^\infty$, dunque possiamo applicare i criteri visti sopra.

$$f'(x) = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) + \sin x + 2\cos x$$
$$= e^x\left((A+B)\cos x + (B-A)\sin x\right) + \sin x + 2\cos x \implies f'(0) = A+B+2$$

$$f''(x) = e^x(2B\cos x - 2A\sin x) + \cos x - 2\sin x \implies f''(0) = 2B+1$$

Condiz. necessaria: $f'(0)=0$, $f''(0)\le 0$ cioè $\begin{cases} A+B+2=0 \\ 2B+1\le 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} B=-A-2 \\ A\ge -3/2. \end{cases}$

Se inoltre $f''(0)<0$ (ovvero se $A>-3/2$) la cond. è anche sufficiente, anzi: possiamo in più dire che $x=0$ è pto di max locale <u>stretto</u>.

Resta da esaminare il caso $A=-3/2$, e $B=-A-2=-1/2$, in cui accade $f'(0)=f''(0)=0$.

$$f'''(x) = e^x\left((2B-2A)\cos x + (-2A-2B)\sin x\right) - \sin x - 2\cos x \implies f'''(0) = \overset{-1+3-2}{2B-2A-2} = 0$$

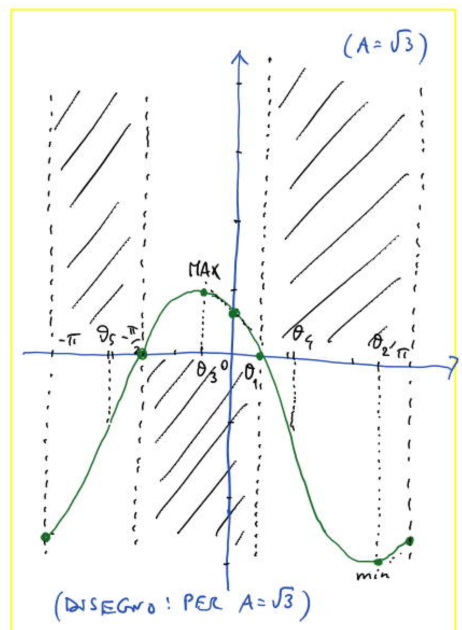
$$f^{(iv)}(x) = e^x(-4A\cos x - 4B\sin x) - \cos x + 2\sin x \implies f^{(iv)}(0) = -4A-1 = 5 > 0$$

dunque in questo caso $x=0$ è pto di min loc. stretto!

Così la risposta è: $\begin{cases} f(x) = e^x\left(A\cos x + (-A-2)\sin x\right) - \cos x + 2\sin x \\ A > -3/2 \,. \end{cases}$

Facciamo qui di seguito uno studio di funzione che generalizza uno di quelli assegnati come esercizio a casa nei giorni scorsi (in cui era $A=\sqrt{3}$)

$$\boxed{f(x) = A\cos x - \sin x - 1}$$



Dominio: $\mathbb{R}$, classe $\mathcal{C}^\infty$.

Parità? $f(-x) = A\cos(-x) - \sin(-x) - 1$
$= A\cos x + \sin x - 1 \neq f(x), -f(x)$

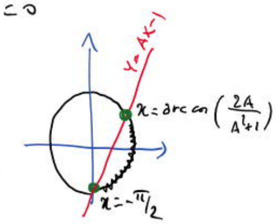
Periodica? $f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Studiamo in $[-\pi, \pi]$. $f(\pi) = f(-\pi) = -A-1$, $f(0) = A-1$

Zeri: $f(x)=0 \quad A\cos x - \sin x - 1 = 0$

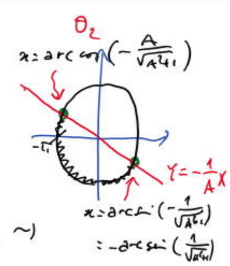
$X = \cos x$, $Y = \sin x$,

$\begin{cases} X^2+Y^2=1 \\ AX-Y-1=0 \end{cases} \quad Y = AX-1 \quad X^2+(AX-1)^2=1$



$(A^2+1)X^2 - 2AX = 0 \;\swarrow X=0 \;\searrow X = \frac{2A}{A^2+1}$

$x = -\frac{\pi}{2}$ oppure $x = \arccos\left(\frac{2A}{A^2+1}\right)$ θ_1 (se $A=\sqrt{3}$: $x=\frac{\pi}{6}$)



Segno: $f(x)>0 \iff A\cos x - \sin x - 1 > 0 \iff Y \le AX-1$

ovvero $-\pi/2 < x < \theta_1$

Derivata: $f'(x) = -A\sin x - \cos x \quad f'(\pi) = f'(-\pi) = 1 \quad f'(0) = -1$

Pti stazionari: $f'(x)=0 \quad -AY - X = 0 \quad Y = -\frac{1}{A}X \leadsto X^2 + \left(-\frac{1}{A}X\right)^2 = 1 \leadsto$

$\rightsquigarrow X = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$, $Y = \mp \frac{1}{\sqrt{A^2+1}}$. $f(\theta_2) = -\sqrt{A^2+1} - 1$, $f(\theta_3) = \sqrt{A^2+1} - 1$ $\quad \theta_3 = \theta_2 - \pi$

Se $A = \sqrt{3}$: $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$, $\theta_3 = -\frac{\pi}{6}$, $f(\theta_2) = -3$, $f(\theta_3) = 1$

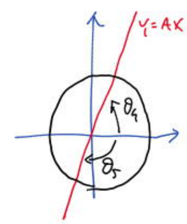
Crescenza: $f'(x) > 0$ $\quad -AY - X > 0 \quad Y < -X/A$

	$-\pi$	θ_3	θ_2	π
f'	$+$	$-$	$+$	
f	$\nearrow$ MAX	$\searrow$ min	$\nearrow$	

I seguenti passaggi, relativi allo studio della convessità tramite il segno di f'', saranno illustrati tra breve (e sono forse già noti dalla scuola superiore.)

Derivata seconda $f''(x) = -A\cos x + \sin x$

Punti stazionari di f' (probabili flessi): $f''(x) = 0 \quad Y = AX$



$$X^2 + (AX)^2 = 1 \quad X = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+1}} \quad Y = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}$$

$\rightsquigarrow x = \theta_4 := \arcsin\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\right)$ e $x = \theta_5 = \theta_4 - \pi$,

con $f(\theta_4) = -1$, $f'(\theta_4) = -\sqrt{A^2+1}$, $f(\theta_5) = -1$ e $f'(\theta_5) = \sqrt{A^2+1}$

(se $A = \sqrt{3}$: $\theta_4 = \pi/3$, $\theta_5 = -\frac{2\pi}{3}$, $f(\theta_4) = -1$, $f'(\theta_4) = -2$, $f(\theta_5) = 1$, $f'(\theta_5) = 2$)

Convessità di f: $f''(x) > 0 \quad Y > AX \iff (-\pi \le x < \theta_5) \vee (\theta_4 < x \le \pi)$

dunque

	$-\pi$	θ_5	θ_4	π
f''	$+$	$-$	$+$	
f	$\smile$	$\frown$	$\smile$	

$\smile$ = convessa

$\frown$ = concava

θ_4, θ_5 punti di flesso.

N.B. I risultati ottenuti sono raggiungibili più facilmente notando che

$$f(x) = A\cos x - \sin x - 1 = \sqrt{A^2+1}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+1}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{A^2+1}}\sin x\right) - 1$$
$$= \sqrt{A^2+1}\cos(x - \theta_3) - 1 :$$

ovvero f è il coseno traslato a sx di $-\theta_3$, dilatato di un fattore $\sqrt{A^2+1}$ e poi abbassato di 1. (Per $A = \sqrt{3}$: traslato a sx di $\pi/6$, dilatato di fattore 2).

SCHEMA (di massima) PER LO STUDIO DI FUNZIONE

(1) dominio naturale
(2) periodicità
(3) parità
(4) regolarità (continue, derivabili, ..)
(5) limiti interessanti
(6) limitatezza
(7) intersezioni del grafico con gli assi coordinati
(8) segno
(9) asintoti (di solito lineari) e loro intersezioni col grafico
(10) Derivata
(11) Punti stazionari ($f'=0$)
(12) Crescenza, estremanti locali
(13) Derivata seconda
(14) Punti stazionari di f' ($f''=0$)
(15) Convessità, punti di flesso con tangente inflessionale

Discutiamo brevemente solo gli asintoti e la convessità.

- Ricordiamo che, date $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accum. per A, si dice che f è ASINTOTO per g in x_0 quando f differisce da g per un infinitesimo, ovvero $f - g = o_{x_0}(1)$: è rel. d'equivalenza.
In particolare, se $x_0 = +\infty$ e $g(x) = mx + q$ (funzione lineare affine), come diventa questa definizione?

Prop. $g(x) = mx+q$ è asintoto per $f(x)$ a $+\infty$ $\iff$
$$\begin{cases} m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \\ q = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) \end{cases}$$
ENTRAMBI FINITI

Dim. "$\Rightarrow$" Sappiamo che $f(x) - (mx+q) = o_{+\infty}(1) \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} - m = \frac{q}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{(x\to+\infty)}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - m\right) = 0$$

dunque $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Se ciò è verificato, lo

$$q = f(x) - mx + o_{+\infty}(1) \Rightarrow q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx).$$

"$\Leftarrow$" Se $q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$ (con m finito)

$\Rightarrow$ $f(x) - (mx+q)$ tende a 0. $\square$

Stesso discorso vale a $-\infty$. ATTENZIONE: le due ricerche sono indipendenti!
Tuttavia, se $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con P, Q polinomi (funzione razionale)
allora $f(x)$ ammette asintoto lineare a $+\infty$ se e solo se lo ammette a $-\infty$, ed è lo stesso. E ciò accade precisamente quando $\deg P = \deg Q + 1$ (Es.)

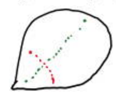
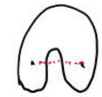
Più in generale, $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ (pol. deg. n) è asintoto per $f(x)$ a $+\infty$ se e solo se (esercizio)

$$\begin{cases} a_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} \\ a_{n-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - a_n x^n}{x^{n-1}} \\ a_{n-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1}}{x^{n-2}} \\ \vdots \\ a_0 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (a_n x^n + \dots + a_1 x)\right) \end{cases}$$

tutti finiti!

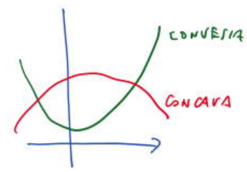
Ad esempio, per una funz. razionale $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, esiste un asintoto polinomiale di deg. n $\iff$ $\deg P = \deg Q + n$, ed è lo stesso a $-\infty$.

- Dato $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U si dice CONVESSO quando per ogni $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in U$ tutto il segmento $[\underline{x}_0, \underline{x}_1] := \{ \underline{x}_0 + t(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) : t \in [0,1] \}$ è cont. in U.

$\boxed{\text{Ex.}}$ Questo è convesso: . Questo NO: 

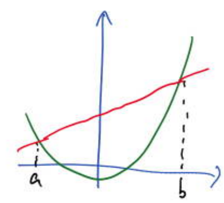
In particolare, data $f : A \to \mathbb{R}$ con A intervallo, si dirà che

- f è CONVESSA (in A) quando il "sopragrafico" $\{(x,y) : x \in A,\ y \geq f(x)\}$ è convesso in $\mathbb{R}^2$



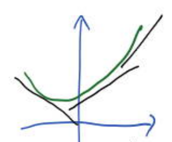
- f è CONCAVA (in A) quando $-f$ è convessa.

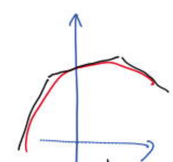
In altre parole, si dirà che f è convessa quando per ogni $a,b \in A$ vale $f(x) \leq f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ $\forall x \in [a,b]$;



se inoltre vale $<$ $\forall x \in]a,b[$, f si dirà STRETTAMENTE CONVESSA.

Si capisce che c'è un legame naturale con la pendenza (cioè con le derivate):


CONVESSITÀ ~ PENDENZA CRESCE


CONCAVITÀ ~ PENDENZA DECRESCE

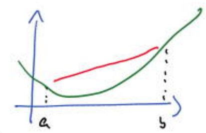
Prop. Sia A intervallo aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile.
Allora f è (strett.) convessa $\iff$ f' è (strett.) crescente.
In particolare, se esiste f'', allora
f è convessa $\iff$ $f'' \geq 0$ su A
f è strett. convessa $\iff$ $f'' \geq 0$, e si annulla al più su punti isolati di A

Dim: Mostriamo che f è convessa $\iff$ f' è crescente su A.

"$\Rightarrow$". Siano $a, b \in A$, $a<b$: mostriamo che $f'(a) \leq f'(b)$.

Poniamo

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right)$$



e notiamo che f convessa in $[a,b] \iff g \leq 0$ in $[a,b]$.

Notiamo anche che $g(a)=0$: ma allora essendo $g \leq 0$ in $[a,b]$, tutti i rapporti incrementali dx in $x=a$ sono ≤ 0

$\left(\text{infatti } \dfrac{\underbrace{g(x)-g(a)}_{=g(x)\leq 0}}{\underbrace{x-a}_{>0}} \right)$ dunque $g'(a) \leq 0$ per t. confronto.

Analogamente si prova che $g'(b) \geq 0$: ma allora

$$g'(a) = f'(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0 \leq g'(b) = f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\Rightarrow$ $f'(a) \leq f'(b)$, come si voleva.

"$\Leftarrow$" Sia ora f' crescente in A, e mostriamo che f convessa (cioè $g \leq 0$ $\forall [a,b] \subset A$).

Ora f' crescente $\Rightarrow g' = f' - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pure crescente.

Osserviamo inoltre che, visto che $g(a)=g(b)=0$, per Rolle $\exists\, \xi \in]a,b[$ t.c. $g'(\xi)=0$. Allora, essendo g' crescente:

$$\begin{cases} g' \leq 0 & \text{su } [a,\xi] \\ g' \geq 0 & \text{su } [\xi, b] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g \text{ decr. su } [a,\xi] \\ g \text{ cresc. su } [\xi,b] \end{cases} \overset{g(a)=g(b)=0}{\Rightarrow} \begin{cases} g \leq 0 \text{ su } [a,\xi] \\ g \leq 0 \text{ su } [\xi,b] \end{cases}$$

ovvero $g \leq 0$ su $[a,b]$, come si voleva.

Facciamo ora qualche esercizio di studio di funzioni (con sviluppi asintotici).

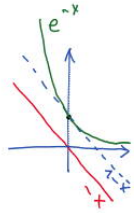
$$\boxed{f(x) = \log\left(x+e^{-x}\right)}$$

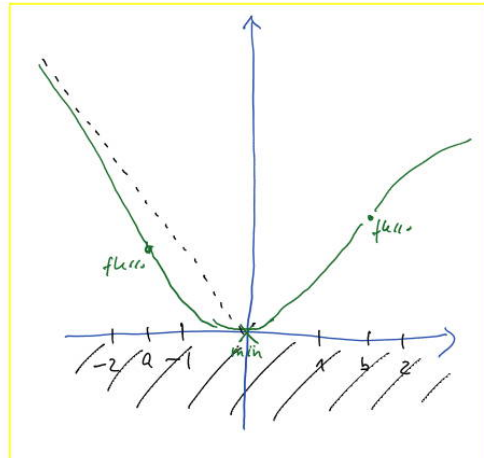
Dominio: $x+e^{-x}>0 \quad e^{-x}>-x$ sempre!

No periodi, no pari/dispari.

Zeri $f(x)=0 \iff x+e^{-x}=1 \iff e^{x}=1-x \iff x=0$

Segno $f(x)>0 \iff x+e^{-x}>1 \iff e^{-x}>1-x \iff x\neq 0$.





f è $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$. limiti: $\pm\infty$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\log(e^{-x})}_{=-x} = +\infty$.

Sviluppo in 0: $f(x) = \log(1+(\overset{t\to 0}{x+e^{-x}-1})) = (x+e^{-x}-1) - \frac{1}{2}(x+e^{-x}-1)^2 + \frac{1}{3}(\dots)^3 + \dots$

$\left[x+e^{-x}-1 = \cancel{x} + (\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)) - \cancel{1} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)\right]$

dunque $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)\right) - \frac{1}{2}\,\theta_0(x^3) + \frac{1}{3}\,\theta_0(x^3) = \overset{\text{P.P.}}{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^3}{6} + \theta(x^3)$

Sviluppo in $+\infty$: $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \log x$; poi $f(x) - \log x = \log\left(\frac{x+e^{-x}}{x}\right) = \log\left(1 + \overset{t}{\frac{e^{-x}}{x}}\right)$

$= \left(\frac{e^{-x}}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)^2 + \theta_{+\infty}\left(\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)^2\right) = x^{-1}e^{-x} - \frac{1}{2}x^{-2}e^{-2x} + \theta_{+\infty}(x^{-2}e^{-2x})$.

(nella scala potenze-exp-log).

Sviluppo in $-\infty$: $f(x) \underset{-\infty}{\sim} -x$; poi $f(x)-(-x) = \log(x+e^{-x}) - \log(e^{-x})$

$= \log(1+\overset{t\to 0}{xe^{x}}) = xe^{x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \theta_{-\infty}(x^2e^{2x})$ (scala potenze-exp)

Dunque $f(x) = -x + \overbrace{xe^{x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x} + \theta_{-\infty}(x^2e^{-2x})}^{\to 0}$

$\Rightarrow y=-x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Notare anche che il 2° termine significativo xe^{x} è <0 (all'intorno di $-\infty$), dunque f tende all'asintoto da sotto.

Altrimenti potevo fare $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H.}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x+e^{-x}}\cdot(1-e^{-x})}{1}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \cdot \frac{e^{x}-1}{xe^{x}+1} = -1 = m$

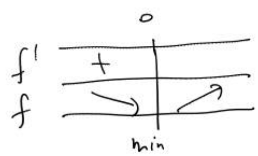
e poi $q = \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(-1)x) = \dots = 0$.

Intersezioni col grafico: $f(x) = -x$ $\quad \log(x+e^{-x}) = \log(e^{-x})$

$$x + \cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}} \qquad x = 0$$

Derivata: $f'(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$ $\qquad f'(x)=0 \iff 1-e^{-x}=0 \iff e^{-x}=1 \iff x=0$

$f'(x)>0 \iff 1-e^{-x}>0 \iff e^{-x}<1 \iff x>0$

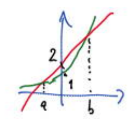


$x=0$ è pto di minimo assoluto $f(0)=0$.

Derivata seconda: $$f''(x) = \frac{e^{-x}(x+e^{-x}) - (1-e^{-x})^2}{(x+e^{-x})^2} = \frac{xe^{-x} + \cancel{e^{-2x}} - 1 - \cancel{e^{-2x}} + 2e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(x+2)e^{-x} - 1}{(x+e^{-x})^2}$$

$f''(x)=0 \iff (x+2)e^{-x}-1=0 \iff (x+2)e^{-x}=1 \iff x+2=e^x$

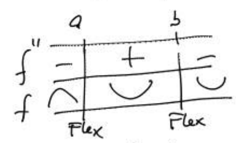


$\iff x=a,\ x=b$. Poiché $x+2\big|_{-1}=1$, $e^x\big|_{-1}=1/e$, $x+2\big|_{-2}=0$

dunque $-2<a<1$, mentre $x+2\big|_1=3$, $e^x\big|_1=e$, $x+2\big|_2=4$, $e^x\big|_2=e^2$

dunque $1<b<2$.

$f''(x)>0 \iff x+2>e^x \iff a<x<b$



$$f(a) = \log(a+e^{-a}) = \log\left(a+\frac{1}{e^a}\right) = \log\left(a+\frac{1}{a+2}\right) = \ldots$$

$\boxed{\text{ESERCIZIO.}}$ Studiare l'andamento delle sgg. funzioni, e calcolarne lo sviluppo asintotico in qualche punto (es. $0, \pm\infty, \dots$)

(NUMERAZIONE CONTINUA QUELLA DEGLI ESERCIZI DATI NELLE LEZZ. SCORSE)

(11) $\log(2e^x+1) - |x|$ (12) $\dfrac{e^x-2}{|x|-1}$ (13) $\dfrac{\log|x|}{x^2+2x}$

(14) $\dfrac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ (15) $\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{3-x}$ (16) $2\cos x - \sin^2 x$

(17) $\log|e^x - 3x|$ (18) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{|x|-1}\right)$ (19) $(x^2+2x)\log|x|$

(20) $e^{\frac{1}{\sin x}}$ (21) $|\operatorname{tg} x| - 2x$ (22) $\sqrt{|x^2+2x-3|} - x$

(23) $(x+1)\operatorname{arctg} x$ (24) $(|x|-1)\, e^{\frac{1}{x+1}}$ (25) $|3\log|x|-1| - x$

(26) $2\operatorname{arctg}\left(\dfrac{|x|}{x+1}\right) - x$ (27) $1 - \log(|x| + 2e^{-x})$

(28) $x(x+2) + \log|x-1|$ (29) $\dfrac{1}{|x|-1} + 2\operatorname{arctg} x$ (30) $\arcsin\left(\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}\right)$