

ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di martedì 18/11/2014

(15)

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{3-x}$$

Domini: $x \neq 3$; no parità, no periodo.

Zeri: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Segno: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3$ $f(0) = \frac{1}{3}$

f è ∞ tranne in $x=1$, in cui è continua ma potrebbe non derivare (punto angoloso?).

Limiti: $\pm\infty, 3^\pm$.

$$f(x) \sim_{\pm\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{-x} = -\frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{ove } 1/x = \sigma(x) \Rightarrow -x = -\sigma(\sqrt{|x|})^2$$

è un'inflessione: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0^\pm$, in $y=0$ è asintoto orizz. "biforcuto".

$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \mp\infty$. Sviluppo:

$$\begin{aligned} x \sim -\infty: f(x) &= \frac{\sqrt{1-x}}{3-x} \stackrel{t=-x}{=} \frac{\sqrt{t+1}}{t+3} = \frac{\sqrt{t} \sqrt{1+1/t}}{t(1+3/t)} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{1+3/t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{t^2} + O(t^{-2}) \right) \left(1 + (-3/t) + (-3/t)^2 + O(t^{-2}) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \left(1 - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{t} + \frac{51}{8} \cdot \frac{1}{t^2} + O(t^{-2}) \right) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{|x|}} + \frac{51}{8} \cdot \frac{1}{x^2\sqrt{|x|}} + O(x^{-2}) \end{aligned}$$

$x \sim +\infty$ auto simile

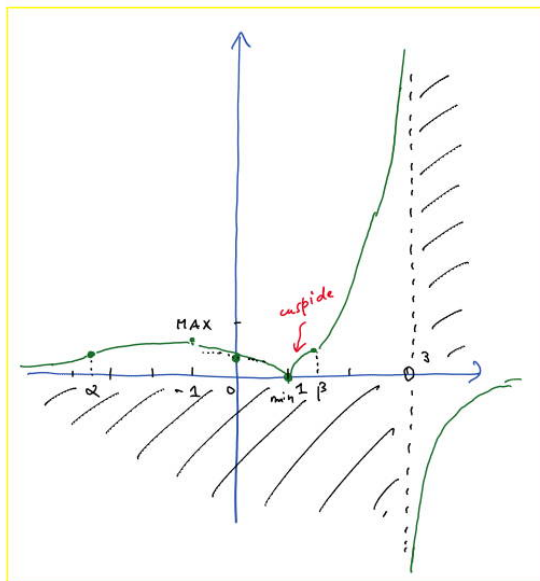
$$x \sim 3: f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{3-x} = -\sqrt{2} \cdot (x-3)^{-1} \text{ p.p.}$$

$$\begin{aligned} \text{Per andare avanti: } x &= 3+t, f(x) = f(3+t) = \frac{\sqrt{2+t}}{-t} = \\ &= -\frac{1}{t} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+t/2} = -\frac{\sqrt{2}}{t} \left(1 + \frac{t}{4} + O(t) \right) = -\frac{\sqrt{2}}{x-3} - \frac{\sqrt{2}}{4} + O_3(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \sim 0: f(x) &= \frac{\sqrt{1-x}}{3-x} = \left(1 - \frac{x}{2} + O(x) \right) \cdot \frac{1}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + O(x) \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{6} + O(x) \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{x}{18} + O(x), \text{ dove } y = -\frac{x}{18} + \frac{1}{3} \text{ è la tg al graf. in } x=0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \sim -1: x &= -1+t, f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{3-x} = f(-1+t) = \frac{\sqrt{1+1-t}}{3+1-t} = \frac{\sqrt{2-t}}{4-t} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{1-t/2} \cdot \frac{1}{1-t/4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot (-t/2) - \frac{1}{8} \cdot (-t/2)^2 + O(t^2) \right) \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16} + O(t^2) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 - \frac{1}{32} t^2 + O(t^2) \right) \end{aligned}$$

dal che intuivamo che $t=0$ (ovvero $x=-1$)
è pts di max rel. stretto
(è possibile con un'analisi un po' bamba).



$x=1$ $x=1+t$ $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{3-x} = f(1+t) = \frac{\sqrt{|t|}}{2-t} = \frac{\sqrt{|t|}}{2} \cdot \frac{1}{1-t/2} = \frac{\sqrt{|t|}}{2} (1 - t/2 + t^2/4 + o(t))$
 $= \frac{\sqrt{|t|}}{2} - \frac{t\sqrt{|t|}}{4} + \frac{t^2\sqrt{|t|}}{8}$ (p.t. $\frac{\sqrt{|t|}}{2}$: pts cuspidale!)

Derivata: $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{3-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{|x-1|}} \cdot \tau \cdot 1 \cdot (3-x) - \sqrt{|x-1|} \cdot (-1)}{(3-x)^2} =$
 $= \frac{\tau(3-x) + 2\sqrt{|x-1|}}{2\sqrt{|x-1|} \cdot (3-x)^2} = \tau \cdot \frac{3-x+2(x-1)}{2\sqrt{|x-1|}(3-x)^2} = \tau \cdot \frac{x+1}{2\sqrt{|x-1|}(3-x)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ $f'(x)>0 \Leftrightarrow$

	-1	1
τ	-	+
$x+1$	-	+
f'	+	-
f	MAX	min saddle!

 $f(-1) = \frac{\sqrt{2}}{4} \sim 0,35$

Notiamo che $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$: anche qui derivata, si tratta di un pts cuspidale.

Derivata 2^a: fattibile! A anti fattibile $f''(x) = \frac{3x^2+6x-13}{4|x-1|^{3/2}(3-x)^3}$ $\leftarrow$ $\text{zeri: } -3 \pm \sqrt{9+29} = -1 \pm \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $\alpha = -1 - \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\beta = -1 + \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\gamma = 3$

N	+	-	-	+	0	+
D	+	+	+	+	-	-
f''	+	-	-	+	-	-
f	↖	↘	↘	↖	↖	↖
	PIÙSSO		PIÙSSO			

(24)

$$f(x) = (|x|-1)e^{\frac{1}{x+1}}$$

Domini: $x \neq -1$. No parità, periodo.

Zeri: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ (per $x \neq -1$)

Segni: $f(x) > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$. $f(0) = -e$

f è C^∞ tranne in $x=0$, dove è continua ma è atteso un punto angoloso.

Limiti: $-\infty, -1^+, +\infty$.

$f(x) \sim_{\pm\infty} |x|$: Sono attesi asintoti obliqui!

(in part. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$). Invece $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0^+$:

in effetti $f(x) = (-x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = -(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} = -te^{\frac{1}{t}}$ con $t = x+1 \rightarrow 0^-$ che è infinitesimo rapido.

Sviluppi asintotici in -1^- è già finito: è la p.p. (scale potenza-exp)

Invece $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$: infatti $f(x) = -te^{\frac{1}{t}}$ con $t = x+1 \rightarrow 0^+$.

Sviluppi in $\pm\infty$: $f(x) = (|x|-1)e^{\frac{1}{x+1}} = (|x|-1)\left(1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 + \theta_{\pm\infty}(x^{-2})\right)$

Si ha $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \theta_{\pm\infty}(x^{-2})\right)$. Dunque, posto $\sigma = \text{sgn } x$:

$$f(x) = (\sigma x - 1)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \theta(x^{-3}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \theta(x^{-3})\right) + \theta_{\pm\infty}(x^{-2})\right)$$

$$= (\sigma x - 1)\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \theta_{\pm\infty}(x^{-2})\right) = \sigma x + (\sigma - 1) + \left(-\frac{\sigma}{2} - 1\right)\frac{1}{x} + \theta\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\swarrow (+\infty: \sigma=1) \quad x - \frac{3}{2x} + \theta_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y=x \text{ è asintoto obliquo a } +\infty$$

$$\text{e ci fido da sotto } \left(-\frac{3}{2x} < 0\right)$$

$$\searrow (-\infty: \sigma=-1) \quad -x - 2 - \frac{1}{2x} + \theta_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y=-x-2 \text{ è asintoto obliquo a } -\infty$$

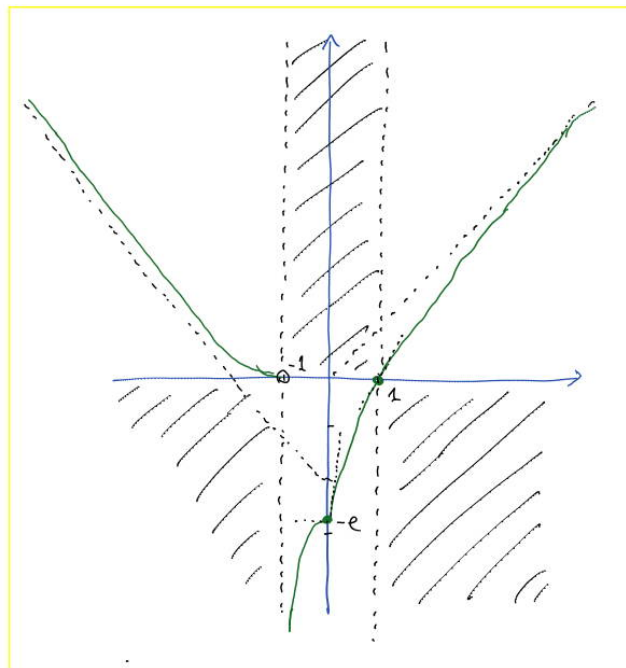
$$\text{e ci fido da sopra } \left(-\frac{1}{2x} > 0 \text{ per } x < 0\right)$$

Dal precedente sviluppo a $\pm\infty$ abbiamo già dedotto che $y=x$ (risp. $y=-x-2$)

è asintoto per f a $+\infty$ (risp. a $-\infty$): naturalmente ci poteva essere

visto anche al metodo usuale, come mostriamo ora.

Per $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x+1}} = 1 = m$, e poi

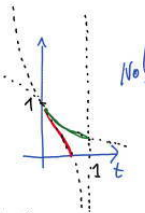


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(e^{\frac{1}{x+1}} - 1) - e^{\frac{1}{x+1}}) = (\text{posto } t = \frac{1}{x+1})$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{(1-t)(e^t - 1)}{t} - e^t \right) = 1 \cdot 1 - 1 = 0 = q; \text{ e similmente per } -\infty.$$

Eventuali intersezioni con gli asintoti (dal lato che interessa):

$$\begin{cases} f(x) = x \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = x \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-1}{x} = e^{-\frac{1}{x+1}} \\ x > 0 \end{cases} \quad \left[\text{posto } t = \frac{1}{x+1} \right] \quad \begin{cases} \frac{1-2t}{1-t} = e^{-t} \\ 0 < t < 1 \end{cases}$$



dopo per $x > 0$ non c'è intersezione: il grafico di $f(x)$ resta sotto $y = x$.

Similmente si dimostra che per $x < 0$ il grafico di $f(x)$ resta sopra l'asintoto $y = -x - 2$.

Derivata: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} \rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{\frac{1}{x+1}} + (x-1) \cdot e^{\frac{1}{x+1}} \cdot \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$
 $= e^{\frac{1}{x+1}} \left(1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} \right) = \begin{cases} (x > 0) & \frac{x^2 + x + 2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} > 0 \text{ f' sempre positivo!} \\ (x < 0) & -\frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \end{cases}$

Dopo $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2e \sim 5,4$, superficie da $x=0$ è asintotica!

$$f'(1) = \frac{4}{4} e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \sim 1,6$$

Derivata 2°: a conti fatti viene $f''(x) = \begin{cases} (x > 0) & -\frac{3x+5}{(x+1)^4} e^{\frac{1}{x+1}} \\ (x < 0) & -\frac{1}{(x+1)^3} e^{\frac{1}{x+1}} \end{cases}$

dopo $f''(x) \neq 0$, e $f''(x) > 0$ per $x < -1$.

Svilupp. in $x \sim 0$: $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x+1}} = (-1+x)e^{\frac{1}{1+x}} = -e(1-x)e^{\frac{1}{1+x}-1}$
 $= -e(1-x)e^{\frac{-x}{1+x}} = -e(1-x) \left(1 + \left(-\frac{x}{1+x}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{1+x}\right)^2 + \theta(x^3) \right)$

D'altra parte $\frac{x}{1+x} = x \cdot \frac{1}{1+x} = x(1-x+x^2+\theta(x^3)) = x - x^2 + x^3 + \theta(x^3)$

dopo $f(x) = -e(1-x) \left(1 - (x - x^2 + \theta(x^3)) + \frac{1}{2} (x^2 - 2x\theta(x^3) + \theta(x^3)^2) + \theta(x^3) \right)$

$$= -e(1-x) \left(1 - x + \frac{3}{2} x^2 + \theta(x^3) \right)$$

$$= \begin{cases} (x > 0) & -e(1 - 2x + \frac{3}{2} x^2 + \theta(x^3)) \end{cases} \quad \text{rettang. : } y = -2ex - e$$

$$\begin{cases} (x < 0) & -e(1 + \frac{1}{2} x^2 + \theta(x^3)) \end{cases} \quad \text{pt di max rel. (in } 0^-).$$