

ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di mercoledì 19/11/2014

(9)

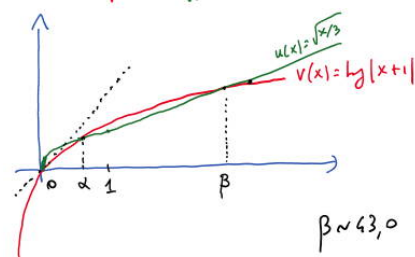
$$f(x) = 3 \lg^2|x+1| - x$$

ovvero: IL RETROGRADO GRAFICO VA FATTO CON CURA!

Dominio: $x \neq -1$. Classe $\mathbb{C}^\infty$.

$$\text{Zeri: } f(x) = 0 \Leftrightarrow 3 \lg^2|x+1| = x \Leftrightarrow \lg^2|x+1| = \frac{x}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \lg|x+1| = \sqrt{\frac{x}{3}} \end{cases} \quad \text{C'è } x=0; \text{ e poi?}$$



$$\text{Segni: } f(x) > 0 \Leftrightarrow \lg^2|x+1| > \frac{x}{3}$$

se $x < 0$, ok (sempre)

$$\text{se } x \geq 0: \Leftrightarrow \lg|x+1| > \sqrt{\frac{x}{3}} \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$$

$$\text{Sviluppi a } \pm\infty: f(x) = -x + 3 \lg^2|x| + o_{+\infty}(\lg^2|x|) \quad (\text{dopo non c'è altro da sviluppare!})$$

$$\begin{aligned} \text{Sviluppi a } 0: f(x) &= 3 \lg^2(1+x) - x = 3 \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - x = \\ &= 3 \left(x^2 - x^3 + o(x^3) \right) - x = -x + 3x^2 - 3x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \lg|x+1| \cdot \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{6 \lg|x+1| - (x+1)}{x+1}$$

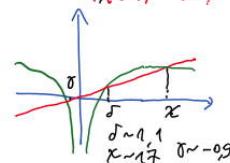
$$(\lg|\varphi(x)|)' = \frac{1}{|\varphi(x)|} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

$$\text{Poniamo } x+1 = t: \frac{6 \lg|t| - t}{t}, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \lg|t| = \frac{t}{6}$$

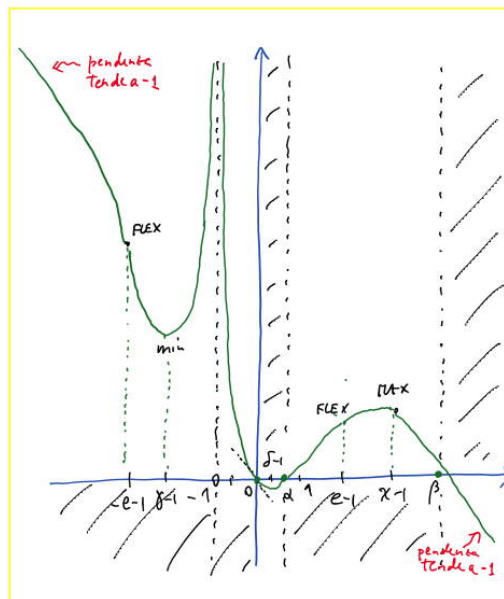
$$x = \gamma - 1, \delta - 1, \chi - 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow$$

	γ	0	δ	χ
N	+	-	-	+
D	-	-	+	+
f'	-	+	-	+
f		min		max



$$f''(x) = \frac{\left(\frac{6}{x+1} - 1 \right) (x+1) - 1 \cdot (6 \lg|x+1| - (x+1))}{(x+1)^2} = \frac{6(1 - \lg|x+1|)}{(x+1)^2}$$



$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln|x+1| \leq 1 \Leftrightarrow |x+1| \leq e \Leftrightarrow -e \leq x+1 \leq e \Leftrightarrow -e-1 \leq x \leq e-1 \quad \text{flem!}$$

(18)

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{|x|-1}\right)$$

ovvero: A DX E A SX POSSONO ACCADERE
CASE DIVERSE!

Dominio $x \neq \pm 1$; classe C^∞ tranne $x=0$,
dove f è continua ma è atteso un pto angoloso.

Notiamo che f è limitata (per l'arctg
assume valori tra $-\pi/2$ e $\pi/2$).

Zeri: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-1/2$. Segno:
$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & -1/2 & 1 \\ \hline x & - & + & - \\ \hline f & - & + & - \end{array}$$
 $f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4 \sim -0,76$.

Limiti intermediari: $\pm\infty, \pm 1$.

Valore $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\pm x-1}\right) = \pm \operatorname{arctg} 2$ (asintoti orizz. a $\pm\infty$), $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = +\pi/2$.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{-x-1}\right) = -\pi/2$ (limiti finiti ma divergenti a dx e sx!)

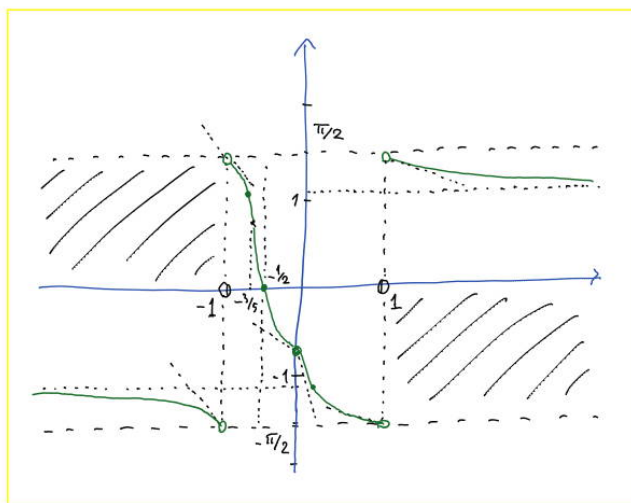
Intersezioni agli asintoti: $f(x) = \pm \operatorname{arctg} 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{|x|-1} = \pm 2 \begin{cases} (+) \Leftrightarrow x = -3/4 \\ (-) \Leftrightarrow x = 1/4 \end{cases}$

Per gli sviluppi, ricordiamo che vale $\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\left(\frac{u-v}{1+uv}\right) \quad \forall u, v: uv+1 > 0$

(infatti, detti $\alpha = \operatorname{arctg} u$ e $\beta = \operatorname{arctg} v$, si ha $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$).

• Sviluppo a $+\infty$: come visto, vale $f(x) = \operatorname{arctg} 2 + o_{+\infty}(1)$.

Si ha poi $f(x) - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{2x+1}{x-1} - 2}{1 + 2 \cdot \frac{2x+1}{x-1}}\right)$
 $= \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5x+1}\right) \stackrel{t \rightarrow 0}{=} t - \frac{t^3}{3} + o_0(t^4)$.



$$\text{D'altra parte } t = \frac{3}{5x+1} = \frac{3}{5x} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{1}{5x})} = \frac{3}{5x} (1 - \frac{1}{5x} + \frac{1}{25x^2} + \theta_{\infty}(x^{-2}))$$

$$= \frac{3}{5x} - \frac{3}{25x^2} + \frac{3}{125x^3} + \theta_{\infty}(x^{-3}), \text{ dunque}$$

$$f(x) = \arctan 2 = \left(\frac{3}{5x} - \frac{3}{25x^2} + \frac{3}{125x^3} + \theta_{\infty}(x^{-3}) \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{27}{125x^3} + \theta_{\infty}(x^{-3}) \right) + \theta_{\infty}(x^{-4})$$

$$\Rightarrow f(x) = \arctan 2 + \frac{3}{5x} - \frac{3}{25x^2} - \frac{6}{125x^3} + \theta_{\infty}(x^{-3})$$

(nota che il 2° termine $\frac{3}{5x}$ è > 0 , che f tende all'asintoto da sopra).

• Sviluppo a $-\infty$: simile.

• Sviluppo in 0: $f(x) = \arctan\left(\frac{2x+1}{|x|-1}\right) = -\frac{\pi}{4} + \theta_0(1)$, per

$$\arctan\left(\frac{2x+1}{|x|-1}\right) - (-\frac{\pi}{4}) = \arctan\left(\frac{\frac{2x+1}{|x|-1} - (-1)}{1 + (-1) \cdot \frac{2x+1}{|x|-1}}\right) = \arctan\left(\frac{2x+|x|}{|x|-2x-2}\right)$$

$$= \begin{cases} (0^+) & - \arctan\left(\frac{\frac{3x}{2+x}}{\frac{x}{2+3x}}\right) = -(t - \frac{t^3}{3} + \theta_0(t^4)) \\ (0^-) & - \arctan\left(\frac{\frac{x}{2+3x}}{\frac{3x}{2+x}}\right) = -(s - \frac{s^3}{3} + \theta_0(s^4)) \end{cases}$$

$$\text{e d'altra parte } \begin{cases} t = \frac{3x}{2} \cdot \frac{1}{1+x/2} = \frac{3x}{2} (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \theta(x^3)) = \frac{3x}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x^3}{8} + \theta(x^3) \\ s = \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1+3x/2} = \frac{x}{2} (1 - \frac{3x}{2} + \frac{9x^2}{4} + \theta(x^3)) = \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{9x^3}{8} + \theta(x^3) \end{cases}$$

$$\text{così } f(x) = \begin{cases} (0^+) & -\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \theta(x^3) \leftarrow \text{retta } t \text{ in } 0^+ \text{ e } y = -\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \\ (0^-) & -\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{4} + \theta(x^3) \leftarrow \text{retta } t \text{ in } 0^- \text{ e } y = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$x=0$ è un punto angoloso.

• Sviluppo in 1^+ : posto $x=1+t$ si ha $f(x) = f(1+t) = \arctan\left(\frac{3+2t}{t}\right) = \arctan\left(\frac{3}{t} + 2\right)$.

Come visto, la p.p. in $x \sim 1^+$ (cioè in $t \sim 0^+$) è $\pi/2$; per

$$\arctan\left(\frac{3}{t} + 2\right) - \frac{\pi}{2} = -\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{3}{t} + 2\right)\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\frac{3}{t} + 2}\right)$$

$$= -\arctan\left(\frac{t}{3+2t}\right) = -(w - \frac{w^3}{3} + \theta_0(w^4))$$

$$\text{D'altra parte } w = \frac{t}{3+2t} = \frac{t}{3} \cdot \frac{1}{1+2t/3} = \frac{t}{3} (1 - \frac{2t}{3} + \frac{4t^2}{9} + \theta(t^3)) = \frac{t}{3} - \frac{2t^2}{9} + \frac{4t^3}{27} + \theta(t^3)$$

$$\text{dunque } f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 + \theta_1((x-1)^2)$$

retta t a dx in 1^+ e $y = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{\pi}{2}$; il grafico in 1^+ ha pendenza $-1/3$

• Sviluppi in -1^- , -1^+ , 1^- : simili a quelli in 1^+ .

(in -1^+ viene $-\pi/2 - (x+1) + \theta_{-1^+}(x+1)$, dunque il grafico in -1^+ pende -1 ;
in 1^- viene $-\pi/2 - \frac{1}{3}(x-1) + \theta_{-1^-}(x+1)$, dunque il grafico in 1^- pende $-\frac{1}{3}$ (come in 1^+).)

Passiamo ora alla derivata, naturalmente per $x \neq 0$ (oltre che $x \neq \pm 1$):

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x+1}{|x|-1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{|x|-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x-1) - 5(2x+1)}{(|x|-1)^2} \quad \text{che con un po' di}$$

(ove $5 = \operatorname{sign} x$)

$$\text{conti diverse } f'(x) = \begin{cases} (x > 0) & -\frac{3}{5x^2 + 2x + 2} \\ (x < 0) & -\frac{1}{5x^2 + 6x + 2} \end{cases} : \text{ si nota che vale sempre } f'(x) < 0,$$

dunque f è strettamente decrescente
in ciascuno degli intervalli
che compongono il dominio.

$$\text{Notiamo inoltre che } \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\frac{1}{3}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$$

il che conferma le pendenze in -1 , 0 , 1 già ricavate dagli sviluppi.

Per accuratezza del disegno calcoliamo la pendenza nello zero $x = -\frac{1}{2}$:

$$f'(-\frac{1}{2}) = \left(-\frac{1}{5x^2 + 6x + 2}\right)_{x=-\frac{1}{2}} = -4.$$

$$\text{Derivata 2}^\text{a}: f''(x) = \begin{cases} (x > 0) & \frac{6(5x+1)}{(5x^2 + 2x + 2)^2} \\ (x < 0) & \frac{2(5x+3)}{(5x^2 + 6x + 2)^2} \end{cases} : \text{vale dunque } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$$

e $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (-\frac{3}{5} < x < 0) \vee (x > 0)$.

Pertanto f è strett. convessa in $]-\frac{3}{5}, 0[$, e in $]0, +\infty[$: nel flesso $x = -\frac{3}{5}$
si ha $f(-\frac{3}{5}) = -\arctan \frac{1}{2} = \arctan 2 - \pi/2 \sim -0,4$ e $f'(-\frac{3}{5}) = -5$ (quasiamente,
nel flesso $x = -\frac{3}{5}$ la funzione pende più che nello zero $x = -\frac{1}{2}$).

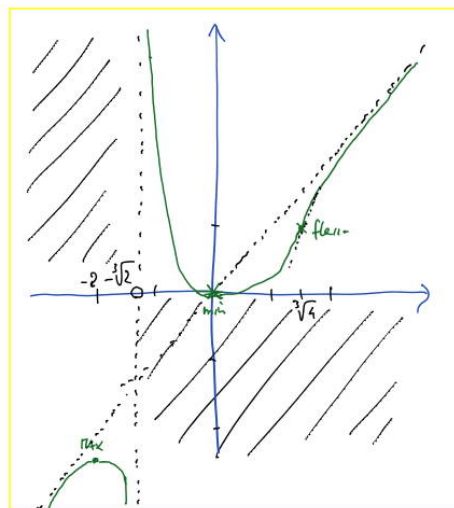
Aggiungiamo ora la risoluzione di alcuni studi di funzione (il primo è una funzione razionale; gli altri sono stati assegnati nei giorni scorsi).

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3+2}$$

Domini: $x^3+2 \neq 0 \quad x \neq -\sqrt[3]{2} \sim -1,2$
 No periodicità, no parità ($f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^3+2} = \frac{x^4}{-x^3+2} \neq f(x), -f(x)$)

Zeri: $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$; $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\sqrt[3]{2}$

Limiti: $\pm\infty, -\sqrt[3]{2}^{\pm}$. $\lim_{x \rightarrow -\sqrt[3]{2}^+} f(x) = +\infty$



Sviluppo asintotico in $+\infty$: $\frac{x^4}{x^3+2} = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \frac{\delta}{x^2} + o(x^{-2})$

da $x^4 = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + o_{+\infty}(x) + 2\alpha x + o_{+\infty}(x)$
 $x^4 = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + (2\alpha + \delta)x + o_{+\infty}(x)$ da $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = \beta \\ 0 = \gamma \\ 0 = 2\alpha + \delta \end{cases} \Rightarrow \delta = -2\alpha = -2$

da $\frac{x^4}{x^3+2} = x - \frac{2}{x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

dal che si nota che $y=x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ (e $-\infty$)
 (e ovvio che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$).

Altro modo per fare sviluppo asintotico: $\frac{1}{1+q} = 1 - q + q^2 - q^3 + \dots$ se $|q| < 1$

$\frac{x^4}{x^3+2} = \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{x^3}} = x \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{x^3}\right)} = x \cdot \left(1 - \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^6} - \frac{8}{x^9} + o(x^{-9})\right)$

Intersezioni fra grafico e asintoto $y=x$: $\frac{x^4}{x^3+2} = x \Leftrightarrow x=0$

Derivata: $f'(x) = \frac{4x^3(x^3+2) - x^4 \cdot 3x^2}{(x^3+2)^2} = \frac{x^3(x^3+8)}{(x^3+2)^2}$

Punti staz. : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=-2$

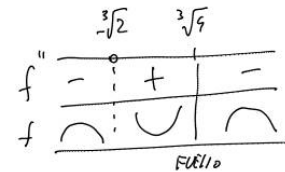
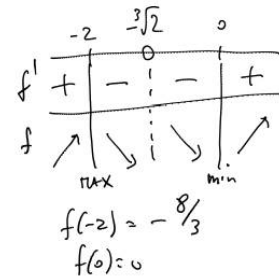
Crescenza : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+2) > 0 \Leftrightarrow (x < -2) \vee (x > 0)$

Derivata 2a : $f''(x) = \frac{12x^2(4-x^3)}{(x^3+2)^3}$

Punti staz. di f'' : $f''=0 \quad x=0, x=\sqrt[3]{4} \sim 1,5$

Concavità : $f'' > 0 \Leftrightarrow \frac{4-x^3}{x^3+2} > 0 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2} < x < \sqrt[3]{4}$

$f(\sqrt[3]{4}) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4} \sim 1, \quad f'(\sqrt[3]{4}) = \frac{4}{3}$



(1)

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

Domini $[-1, 1]$; funzione dispari ($f(-x) = -f(x)$), dunque studiare per $x \geq 0$. Zeri $x=0, x=1$; segno > 0 per $x > 0$.
 f è ∞ tra cui per $x=1$ in cui è continua ma probabilmente non derivabile (attorno pendenza verticale).
 Nessun limite intermedio.

Sviluppo in $x \sim 0$: $x(1 + \frac{1}{2}(-x^2) - \frac{1}{8}(-x^2)^2 + o(x^5)) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^4)$

Sviluppo in $x \sim 1$: posto $t=1-x$, ho $f(x) = f(1-t) = (1-t)\sqrt{2t-t^2}$

$= \sqrt{t}(1-t) \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1-t/2} = \sqrt{2} \sqrt{t}(1-t)(1-t/2 + o(t))$

$= \sqrt{2} \sqrt{t} (1 - \frac{3t}{2} + o(t)) = \sqrt{2} \sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{2}} t \sqrt{t} + o(t \sqrt{t})$,

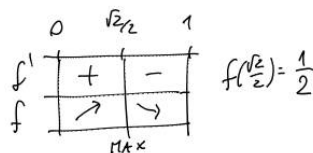
dunque $f(x) = \sqrt{2} (1-x)^{1/2} - \frac{3}{\sqrt{2}} (1-x)^{3/2} + o((1-x)^{3/2})$.

Derivata $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

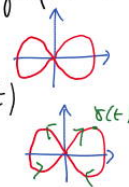
Vale $f'(x)=0$ per $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'(x) > 0$ per $0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Si ha $f'(0)=1$, e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$ (come previsto).

Si ha poi $f'' = \frac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} = -\frac{x(3-2x^2)}{(1-x^2)^{3/2}}$ che in $[0,1]$ è < 0 (f s'inv. ancora)



Nota Da $y = x\sqrt{1-x^2}$ si ricava $y^2 = x^2(1-x^2)$, dunque il nostro grafico è parte del luogo geometrico $y^2 = x^2(1-x^2)$ detto curva otto. Tale luogo è parametrizzato da $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\sin t, \sin t \cos t)$ per $t \in [0, 2\pi]$ (si noti che $\gamma(0) = \gamma(\pi) = \gamma(2\pi) = (0, 0)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (1, 0)$, ...)



(3) $f(x) = x^3 e^x$

Dominio $\mathbb{R}$; classe e^∞ .

Zeri $x=0$, segno $f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t^3 e^{-t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{t^3}{e^t}\right) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Sviluppi: $x \sim \pm\infty$ è già espressa nelle scale

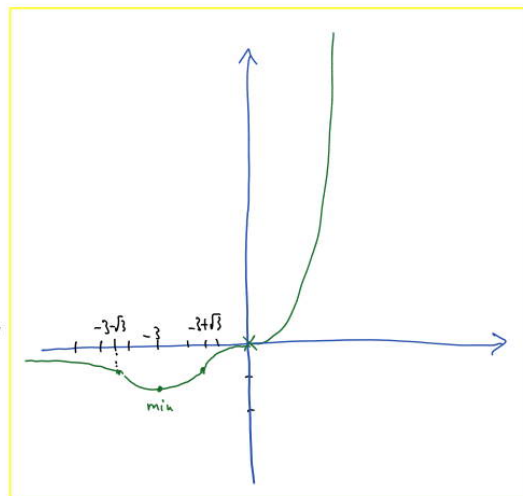
con potenze ed esponenziali;

$x \sim 0 \quad f(x) = x^3(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = x^3+x^4+\frac{x^5}{2}+o(x^5)$.

Derivata $f'(x) = x^2(x+3)e^x$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x=0) \vee (x=-3)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -3$. Dunque $x=0$ è punto di flesso con minimo (prevedibile poiché $f(x) \sim x^3$), e $x=-3$ è di minimo. ($f(-3) = -\frac{27}{e^3} \sim -1,3$)

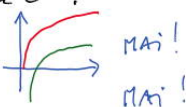
Per $f''(x) = x(x^2+6x+6)e^x$: si ha $f''(x) = 0$ per $(x=0) \vee (x=-3 \pm \sqrt{3})$,
e $f''(x) > 0$ per $(-3-\sqrt{3} < x < -3+\sqrt{3}) \vee (x > 0)$, dove in cui f è strettamente convessa.
I punti $x=0$ e $x=-3 \pm \sqrt{3}$ sono flessi.



(4) $f(x) = \log x - 2\sqrt{x}$

dominio $x > 0$, classe $\mathcal{C}^\infty$.

Zeri: $\log x = 2\sqrt{x}$



Segno: $\log x > 2\sqrt{x}$

Dunque f è sempre < 0 .

limiti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} - 2 \right) = -\infty$

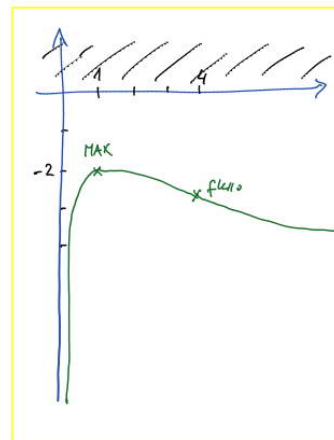
Sviluppi: $x \sim 0$ $f(x) = \log x - 2\sqrt{x}$ $x \sim +\infty$ $f(x) = -2\sqrt{x} + \log x$
(in 0 e $+\infty$ è già espresso nelle scale potenze-log)

$x \sim 1$ Sia $t = x-1 \sim 0$: $f(x) = f(1+t) = \log(1+t) - 2\sqrt{1+t} = t - \frac{t^2}{2} + o_2(t^2) - 2\left(1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o_2(t^2)\right)$
 $= -2 - t + \frac{3}{4}t^2 + o_2(t^2)$ (già capiamo che sarà pts di max locale!) $\cap$

Perché $f(x) \sim -2\sqrt{x}$ non ci sarà asintoto lineare.

Derivata $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1-\sqrt{x}}{x}$, dunque $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$ pts di max loc. $\cap$ su $f(1) = -2$

Poi $f' = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1} - x^{-1/2} \Rightarrow f'' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x^2}$, dunque $f'' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$:
ne segue che $x=4$ è pts di flesso, su $f(4) = 2\log 2 - 4 \sim -2,6$ e $f'(4) = -\frac{1}{4}$.



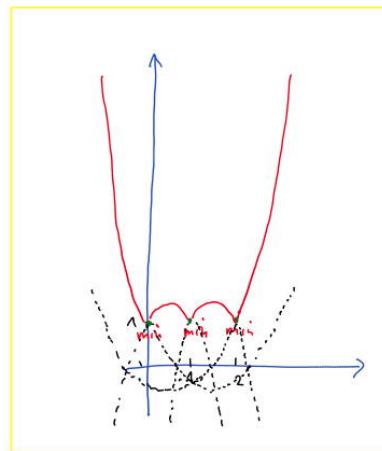
(5)

$f(x) = |x^2 - 2x| + |x-1|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1 & (x > 2) \\ -(x^2 - 3x + 1) & (1 < x \leq 2) \\ -(x^2 - x - 1) & (0 < x \leq 1) \\ x^2 - 3x + 1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

$f(0) = f(1) = f(2) = 1$

sono tre punti di minimi (globali) singolari.



(6)

$$f(x) = x - \tan x$$

Domínio $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, dove $\mathbb{C}^\infty$.

Questa funzione non è periodica, ma (potremmo dire) "quasi-periodica", nel senso che $f(x + \pi) = \pi + f(x)$, dunque se la disegnassimo in uno dei periodi delle tangente (il migliore è ovviamente $]-\pi/2, \pi/2[$, anche perché f è dispari) essa sarei determinata anche negli altri periodi trasladando il grafico in verticali di multipli di π .

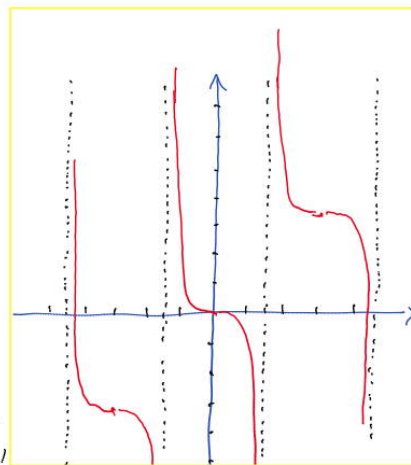
Studiando dunque in $[0, \pi/2[$. Zeri: $x = \tan x \Leftrightarrow x = 0$.

Segno: $x > \tan x$ mai in $[0, \pi/2[$: dunque $f(x) < 0$. Limite: $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = -\infty$.

Sviluppi: $x \rightarrow 0$ $x - \tan x = x - (x + x^3/3 + o(x^3)) = -x^3/3 + o(x^3)$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. $f'(x) = 0$ per $x = 0$; $f'(x) < 0$ per $0 < x < \pi/2$ (strett. decr.).

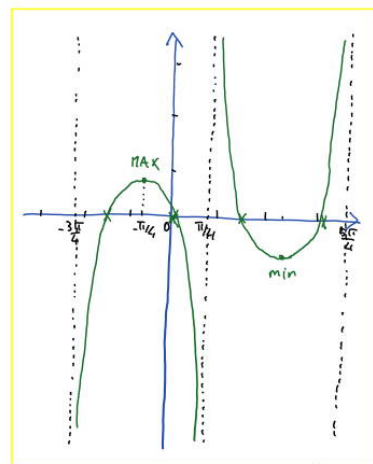
$f''(x) = -\frac{2}{\cos^3 x} < 0$ (f strett. conv.).



(7)

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x}$$

Domínio $\sin x \neq \cos x$. Se $\sin x = 0$ ($x = 2k\pi$) ok; se no equivale a $\tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pi/4 + k\pi$. Classe $\mathbb{C}^\infty$.
 f è periodica, di periodo 2π : la studieremo dunque in $]-3\pi/4, \pi/4[\cup]\pi/4, 5\pi/4[$. In realtà si vede facilmente che $f(\pi/2 - x) = -f(x)$, dunque una volta studiata su $]-3\pi/4, \pi/4[$ essa si può disegnare su $]\pi/4, 5\pi/4[$ con l'opportuna simmetrizzazione rispetto a $x = \pi/4$. Limitiamoci così a $]-3\pi/4, \pi/4[$.



Zero: $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = K\pi \Leftrightarrow x = K\frac{\pi}{2}$ ($= -\frac{\pi}{2}$ qui).

Segno: $N(x) > 0 \Leftrightarrow 2K\pi < 2x < \pi + 2K\pi \Leftrightarrow K\pi < x < \frac{\pi}{2} + K\pi$ (da noi: $]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$).

$D(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x > \cos x \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2K\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2K\pi$ (da noi: máxi)

Perfundo

	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
N	+	-	+	+
D	-	-	-	-
f	-	+	-	-

Seu $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ si ha $f(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < 0$

Limiti: $\lim_{x \rightarrow -\frac{3\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\infty$

Se desenvolve em $x=0$: $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x - \cos x} = ax + bx^2 + cx^3 + \theta_4(x^3)$

$\sin 2x = (ax + bx^2 + cx^3 + \theta_4(x^3))(\sin x - \cos x)$

$2x - \frac{(2x)^3}{6} + \theta_4(x^3) = (ax + bx^2 + cx^3 + \theta_4(x^3))(-1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \theta_4(x^3))$

$= -ax + (a-b)x^2 + (\frac{a}{2} + b - c)x^3 + \theta_4(x^3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ a-b = 0 \\ \frac{a}{2} + b - c = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \\ c = -\frac{5}{3} \end{cases}$ $\text{dye } f(x) = -2x - 2x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \theta_4(x^3)$

$f'(x) = \frac{2 \cos 2x (\sin x - \cos x) - \sin 2x (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin x - \cos x) - 2 \sin x \cos x (\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$

$= \frac{2(\cos x + \sin x) [-(\cos x - \sin x)^2 - 2 \sin x \cos x]}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x < -\cos x$

$f(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ máxi. local.

$f''(x) = -2 \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)^2 - (\sin x + \cos x) \cdot 2(\cos x + \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^4}$

$= 2 \frac{(\cos x - \sin x)^2 + 2(\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^3} < 0$ em $[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow f$ está concava ali