3.3 Derivazione

Con la nozione di "funzione continua" abbiamo individuato una classe di funzioni che si distinguono per la loro regolarità, in quanto esse "non fanno salti" nei punti del loro dominio. Dato un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ ed una funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$, può essere talora interessante studiare *con che rapidità* cambia il valore di $f(x) \in \mathbb{R}$ al cambiare della variabile $x \in A$. Si pensi ad esempio di voler descrivere, al variare del tempo, la posizione di un punto P che si muove su una retta: in tal caso, fissato un sistema di coordinate ascisse sulla retta, si sta considerando la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ove la variabile x del dominio A indica il tempo (diciamo dunque che A sia un intervallo temporale $A = [a, b]$), ed il valore $f(x)$ indica l'ascissa del punto della retta occupato da P all'istante x del punto P. Presi due istanti x_0 (iniziale) e x_1 (finale) in A con $x_0 < x_1$, il rapporto $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ tra la misura spaziale $f(x_1) - f(x_0)$ e l'intervallo temporale $x_1 - x_0$ si chiama, come noto, *velocità media* del punto P tra gli istanti x_0 e x_1, e descrive la rapidità media di movimento del punto P in tale intervallo temporale. Pensando ora di rendere sempre più vicino l'istante finale x_1 a quello iniziale x_0, per continuità anche la posizione finale $f(x_1)$ si avvicinerà sempre più a quella iniziale $f(x_0)$: ciò non significa che il limite del rapporto $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ debba per forza esistere ma, se esiste, è naturale che tale limite ci descriva la *velocità istantanea* del punto P nell'istante x_0. La nozione di "funzione derivabile" descrive per l'appunto una funzione in cui *tale passaggio al limite è possibile, con risultato finito.* Ciò permette di continuare il procedimento di ricerca di regolarità che abbiamo iniziato con le funzioni continue: non ci si accontenterà più del fatto che la funzione "non faccia salti", ma si chiederà anche che "proceda in modo liscio".

3.3.1 Derivate

Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, e sia $c \in A$ di accumulazione per A. Se $\xi \in A \setminus \{c\}$, il *rapporto incrementale* $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c}$ descrive la rapidità con cui varia la funzione f tra ξ e c in rapporto al muoversi della variabile da ξ a c: ad esempio, se f è costante esso è nullo (ovvero, la rapidità di variazione è nulla). Il significato geometrico del rapporto incrementale è evidente: nel piano cartesiano che contiene il grafico di f, esso rappresenta il coefficiente angolare (cioè, la "pendenza") della retta che congiunge i punti $(c, f(c))$ e $(\xi, f(\xi))$. È naturale allora esaminare il limite di tale rapporto incrementale quando ξ tende a c: infatti, per quanto appena detto, se esiste *finito*, geometricamente esso rappresenterà il coefficiente angolare della retta *tangente al grafico della funzione nel punto* $(c, f(c))$. Tale valore reale, se esiste, si denoterà con $f'(c)$, o con $\frac{df}{dx}(c)$, e si dirà *derivata di f in c*:

Rapporto incrementale

Derivata in un punto

$$f'(c) = \lim_{\xi \to c} \frac{f(\xi) - f(c)}{\xi - c} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

ove la seconda espressione segue subito dal cambio di variabile $h = \xi - c$ (la variabile infinitesima h si dice *incremento*). Si dirà allora che f è *derivabile in c*. È interessante notare che la derivabilità in c può essere espressa anche in questa forma:[95]

$$\text{(3.1)} \qquad \text{esiste un numero } \; f'(c) \in \mathbb{R} \; \text{ tale che } \quad f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + o_c(x-c)\,.$$

Può accadere che esistano finiti separatamente i limiti $f'_{\pm}(c) = \lim\limits_{\xi \to c^{\pm}} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c}$ (detti rispettivamente *derivata destra* e *sinistra* di f in c) senza che essi siano uguali (in tal caso, è d'uso chiamare c "*punto angoloso*", con ovvio significato geometrico): è allora chiaro che la funzione f è derivabile in c se e solo se essa è derivabile a destra e a sinistra in c con lo stesso valore finito da ambo i lati. Anche qui è fondamentale notare che la derivabilità in c è un concetto *locale*, ovvero che si studia solo in un intorno (anche assai piccolo) di c. Se f è derivabile in ogni punto c del suo dominio A, essa si dirà *derivabile in A*; in generale, il sottoinsieme $A' = \{x \in A : f \text{ è derivabile in } x\} \subset A$ si dirà *dominio di derivabilità* di f in A: si determina così una nuova funzione $f' : A' \to \mathbb{R}$, detta (funzione) *derivata* di f.

Derivata destra e sinistra

Punto angoloso

Funzione derivata

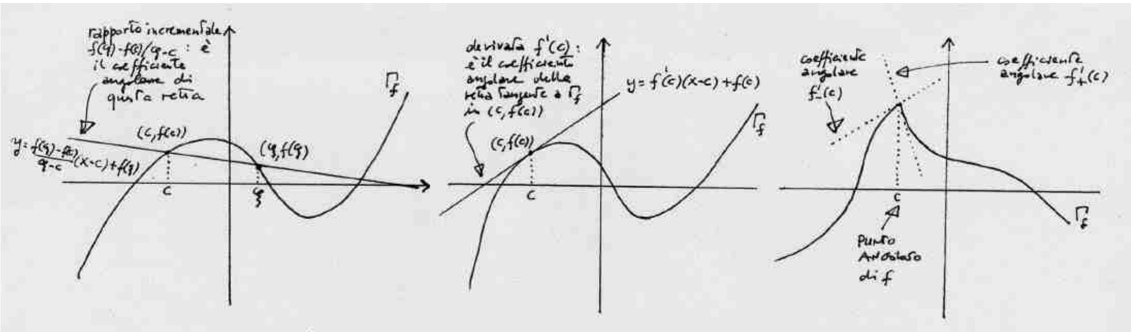

Figura 3.9: Rapporto incrementale; derivata; punto angoloso.

Vediamo ora che, effettivamente, la derivabilità è una proprietà più forte della continuità.

Proposizione 3.3.1. *Se f è derivabile in c, essa è anche continua in c, ma non viceversa.*

Dimostrazione. Se f è derivabile in c vale $\lim_{\xi \to c}(f(\xi) - f(c)) = \lim_{\xi \to c}(\xi - c)\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi - c} = 0 \cdot f'(c) = 0$, e dunque $\lim_{\xi \to c} f(\xi) = f(c)$, ovvero f è continua in c. Viceversa, la funzione modulo $f(x) = |x|$ è continua in 0 ma ivi non derivabile, perché $f'_{\pm}(0) = \lim_{\xi \to 0^{\pm}} \frac{|\xi| - |0|}{\xi - 0} = \pm 1$ (le derivate sinistra e destra esistono ma sono diverse); addirittura, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(0) = 0$ e $g(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ per $x \neq 0$ è continua in 0 (infatti $\lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$, perché x è infinitesima e $\sin(\frac{1}{x})$ limitata), ma le derivate sinistra e destra di g in 0 non esistono (perché non esiste $\lim_{\xi \to 0^{\pm}} \frac{\xi \sin(\frac{1}{\xi}) - 0}{\xi - 0} = \lim_{\xi \to 0^{\pm}} \sin(\frac{1}{\xi})$). □

Esempi. (0) Si consideri un punto P che si muove sulla retta reale, e si consideri la funzione f che ad ogni istante temporale x associa l'ascissa $f(x)$ occupata da P nell'istante considerato. Allora, come già detto,

[95] Il significato di (3.1) è che "vicino a c, la funzione $f(x)$ è approssimata dalla funzione lineare $\tilde{f}(x) := f(c) + f'(c)(x-c)$ a meno di un errore di ordine superiore a uno": questa riformulazione sarà utile quando si definirà la nozione di differenziabilità per funzioni $f(x_1, \dots, x_n)$ di una o più variabili reali (nel caso di una variabile, la differenziabilità equivale in effetti alla derivabilità).

il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c}$ descrive la *velocità media* di P nell'intervallo temporale compreso tra gli istanti ξ e c, mentre (se esiste) la derivata $f'(c)$ è la *velocità istantanea* di P nell'istante c. **(1)** Calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari. Se $f(x)$ è costante, tutti i rapporti incrementali sono nulli (il numeratore è nullo) e dunque $f'(x) \equiv 0$. Se $f(x) = ax+b$, allora $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{(a\xi+b)-(ax+b)}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{a(\xi-x)}{\xi-x} \equiv a$. Se $f(x) = ax^2+bx+c$ si ha $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{(a\xi^2+b\xi+c)-(ax^2+bx+c)}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{(\xi-x)(a(\xi+x)+b)}{\xi-x} = 2ax+b$. Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $x > 0$ si ha $f'(x) = \lim_{\xi \to x} \frac{\sqrt{\xi}-\sqrt{x}}{\xi-x} = \lim_{\xi \to x} \frac{1}{\sqrt{\xi}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, mentre per $x = 0$ si ha $\lim_{\xi \to 0} \frac{\sqrt{\xi}-0}{\xi-0} = \lim_{\xi \to 0} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = +\infty$, e dunque f non è derivabile in 0. **(2)** La funzione $f(x) = |x+1|-|x-2|$ (che dunque vale -3 per $x \leq -1$, $2x-1$ per $-1 < x \leq 2$ e 3 per $x > 2$) è continua. Nei punti $c < -1$ e $c > 2$ essa è costante, e dunque banalmente derivabile con derivata nulla; nei punti $-1 < c < 2$ il rapporto incrementale è $\frac{(2\xi-1)-(2c-1)}{\xi-c} = 2$, e dunque la derivata vale sempre 2. In $c = -1$ (risp. $c = 2$) essa è derivabile a sinistra con valore 0 (risp. 2) e a destra con valore 2 (risp. 0): dunque essa non sarà derivabile. **(3)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x$ (se $x < 0$) e $f(x) = 3x^2$ (se $x \geq 0$). Essa è continua in tutto $\mathbb{R}$. Se $c < 0$ il rapporto incrementale (all'intorno di c) vale $\frac{(-\xi)-(-c)}{\xi-c} = -1$, e dunque f è derivabile in c con valore -1; se $c > 0$ il rapporto incrementale (all'intorno di c) vale $\frac{(3\xi^2)-(3c^2)}{\xi-c} = 3(\xi+c)$, e dunque f è derivabile in c con valore $6c$. Se invece $c = 0$, la derivata sinistra vale $\lim_{\xi \to 0^-} \frac{(-\xi)-0}{\xi-0} = -1$, mentre la destra vale $\lim_{\xi \to 0^+} \frac{3\xi^2-0}{\xi-0} = 0$: dunque f non è derivabile in 0.

Proposizione 3.3.2. (Derivate e parità) *Se f è una funzione derivabile pari* (risp. dispari)*, la sua derivata f' è una funzione dispari* (risp. pari).

Dimostrazione. Se f è pari, posto $\eta = -\xi$ si ha $f'(-x) = \lim\limits_{\xi \to -x} \frac{f(\xi)-f(-x)}{\xi-(-x)} = \lim\limits_{\eta \to x} \frac{f(-\eta)-f(-x)}{-\eta-(-x)} = \lim\limits_{\eta \to x} \frac{f(\eta)-f(x)}{-(\eta-x)} = -f'(x)$, ovvero f' è dispari. Dimostrazione analoga nel caso in cui f sia dispari. $\square$

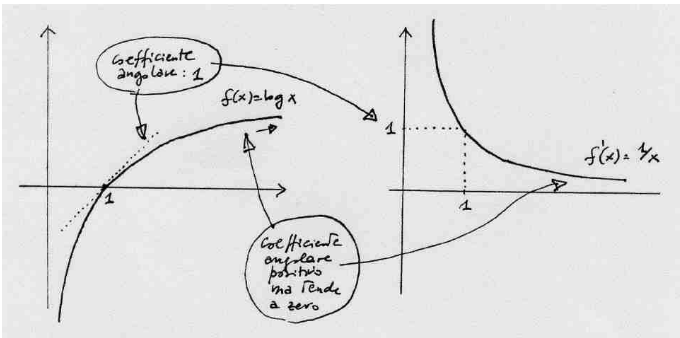

Figura 3.10: La funzione derivata descrive, punto per punto, la pendenza del grafico di una funzione.

Calcoliamo le derivate delle funzioni elementari, mettendo in evidenza il dominio naturale $A \subset \mathbb{R}$ e l'insieme di derivabilità $A' \subset A$.

Proposizione 3.3.3. *Le funzioni elementari hanno dominio di derivazione e derivate come riportato nella tabella della Figura 3.11.*

$f(x) \equiv k$ (costante)	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) \equiv 0$
$f(x) = x^\alpha$	$A = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & (\text{se } \alpha > 0) \\ \mathbb{R}_{>0} & (\text{se } \alpha < 0) \end{cases}$ $A' = \begin{cases} \mathbb{R}_{\geq 0} & (\text{se } \alpha \geq 1) \\ \mathbb{R}_{>0} & (\text{se } \alpha < 1) \end{cases}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \lvert x \rvert$	$A = \mathbb{R},\ A' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = \frac{\lvert x \rvert}{x} = \begin{cases} -1 & (\text{se } x < 0) \\ 1 & (\text{se } x > 0) \end{cases}$
$f(x) = a^x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \log a$
$f(x) = \log_a x$	$A = A' = \mathbb{R}_{>0}$	$f'(x) = 1/(x \log a)$
$f(x) = \sin x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$A = A' = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\}$	$f'(x) = 1/\cos^2 x$
$f(x) = \operatorname{cotg} x$	$A = A' = \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi\}$	$f'(x) = -1/\sin^2 x$
$f(x) = \arcsin x$	$A = [-1, 1],\ A' =]-1, 1[$	$f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$
$f(x) = \arccos x$	$A = [-1, 1],\ A' =]-1, 1[$	$f'(x) = -1/\sqrt{1 - x^2}$
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1/(1 + x^2)$
$f(x) = \operatorname{arccotg} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = -1/(1 + x^2)$
$f(x) = \sinh x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \operatorname{sett\,sinh} x$	$A = A' = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}$
$f(x) = \operatorname{sett\,cosh} x$	$A = \mathbb{R}_{\geq 1},\ A' = \mathbb{R}_{>1}$	$f'(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

Figura 3.11: Dominio di derivazione e derivate delle funzioni elementari.

Dimostrazione. Si useranno i limiti notevoli della Proposizione 3.2.14. • Se $f(x) = k$ (costante), come visto, tutti i rapporti incrementali sono nulli e dunque anche il loro limite. • Se $f(x) = x^\alpha$, esaminiamo $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$. Iniziamo dal caso $x = 0$ (e dunque andrà supposto all'inizio $\alpha > 0$): si ottiene $\lim_{h \to 0} h^{\alpha-1}$, che è finito per $\alpha \geq 1$ e vale 1 se $\alpha = 1$ e 0 se $\alpha > 1$. Se invece $x \neq 0$, ponendo $t = \frac{h}{x}$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{(1+\frac{h}{x})^\alpha - 1}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1}$. • Se $f(x) = |x|$ vale $f(x) = -x$ (se $x < 0$) e $f(x) = x$ (se $x > 0$), da cui l'affermazione segue immediatamente. • Se $f(x) = a^x$, ponendo $\tau = h \log a$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log a$. • Se $f(x) = \log_a x$, ponendo $t = \frac{h}{x}$ ed usando le proprietà del logaritmo si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(\frac{x+h}{x})}{h} = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t} = \frac{1}{x \log a}$. • Per le funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ si usano le formule di prostaferesi: ad esempio, ricordando che $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$ e $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, per $f(x) = \sin x$ ponendo $t = \frac{h}{2}$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{t \to 0} \cos(x+t) \frac{\sin t}{t} = \cos x$, mentre se $f(x) = \operatorname{tg} x$ si ha $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\sin h}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. • Sia ora $f(x) = \arcsin x$, e studiamo $\lim_{\xi \to x} \frac{\arcsin\xi - \arcsin x}{\xi - x}$. Se $x = 0$, ponendo $t = \arcsin\xi$ si ricava $\lim_{\xi \to 0} \frac{\arcsin\xi}{\xi} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} = 1$. D'ora in poi supponiamo che $x \neq 0$; anzi, poiché la funzione è dispari, la sua derivata sarà pari e dunque possiamo supporre per semplicità che $x > 0$ (e, considerando ξ in un intorno di x, anche $\xi > 0$). Se $\alpha = \arcsin\xi$ e $\beta = \arcsin x$, si ha $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2}$, da cui otteniamo facilmente le asintoticità $\arcsin\xi - \arcsin x = \arcsin\big(\xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2}\big) \sim_x \xi\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-\xi^2}\left(\xi\sqrt{1+\frac{\xi^2-x^2}{1-\xi^2}} - x\right) \sim_x \sqrt{1-\xi^2}\left(\xi(1+\frac{1}{2}\frac{(\xi+x)(\xi-x)}{1-\xi^2}) - x\right) = \sqrt{1-\xi^2}\left(1 + \frac{\xi(\xi+x)}{2(1-\xi^2)}\right)(\xi - x)$. Pertanto abbiamo $\lim_{\xi \to x} \frac{\arcsin\xi - \arcsin x}{\xi - x} = \lim_{\xi \to x} \sqrt{1-\xi^2}\left(1 + \frac{\xi(\xi+x)}{2(1-\xi^2)}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La dimostrazione per $\arccos x$ è analoga. • Sia $f(x) = \operatorname{arctg} x$, e consideriamo il limite $\lim_{\xi \to x} \frac{\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg} x}{\xi - x}$. Se $\alpha = \operatorname{arctg}\xi$

e $\beta = \operatorname{arctg} x$, si ha $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\xi - x}{1+\xi x}$, da cui $\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}(\frac{\xi-x}{1+\xi x}) \sim_x \frac{\xi-x}{1+\xi x}$ e perciò $\lim_{\xi\to x}\frac{\operatorname{arctg}\xi - \operatorname{arctg} x}{\xi - x} = \lim_{\xi\to x}\frac{1}{1+\xi x} = \frac{1}{1+x^2}$. Idem per $\operatorname{arccotg} x$. • Gli enunciati per le funzioni iperboliche e le loro inverse si provano in maniera analoga a quanto fatto per le corrispondenti funzioni circolari, tenendo presente che valgono proprietà formali analoghe come detto nel paragrafo 3.2.4. □

Dalla Proposizione precedente risulta evidente il motivo per cui si previlegia la base "naturale" $a = e$ per l'esponenziale ed il logaritmo: infatti, in tal caso il fattore $\log a$ vale 1 e l'espressione della derivata ne risulta semplificata, ovvero $(e^x)' = e^x$ e $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

Derivare funzioni ottenute sommando, sottraendo, moltiplicando, dividendo, componendo e (quando possibile) invertendo funzioni derivabili è un semplice esercizio meccanico una volta che si ricordino le relative regole di calcolo, che per comodità riportiamo tutte insieme nella prossima proposizione.

Proposizione 3.3.4. *Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in $x \in A$.*

(i) (Linearità della derivazione) *Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f + \beta g$ è derivabile in x e*

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

(ii) (Regola di Leibniz per la derivata del prodotto) *La funzione prodotto fg* (ovvero $(fg)(x) = f(x)g(x)$) *è derivabile in x e vale*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Più generalmente, se $f_1, \dots, f_n$ sono derivabili in x anche il loro prodotto $F(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ è derivabile in x e vale

$$F'(x) = f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x).$$

(iii) (Derivata del quoziente e del reciproco) *Se $g(x) \neq 0$, allora $\frac{f}{g}$ è definita all'intorno di x e derivabile in x, e vale*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\ ; \qquad \text{in particolare } \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

(iv) (Regola della catena per la derivata della composizione) *Se φ è una funzione derivabile in $f(x)$, allora la funzione composta $\varphi \circ f$* (ovvero $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$) *è derivabile in x e vale*

$$(\varphi \circ f)'(x) = \varphi'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Più generalmente, se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono funzioni tali che φ_1 è derivabile in $f(x)$ e φ_j è derivabile in $\varphi_{j-1}(\cdots\varphi_1(f(x)))$ (per $j = 2, \dots, n$) *allora la funzione composta $\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ f$ è derivabile in x e vale*

$$(\varphi_n \circ \cdots \circ \varphi_1 \circ f)'(x) = \varphi_n'(\varphi_{n-1}(\cdots\varphi_1(f(x)))) \cdot \ \cdots \ \cdot \varphi_1'(f(x)) \cdot f'(x).$$

(v) (Derivata della funzione inversa) *Se f è un omeomorfismo, la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto $y = f(x)$ se e solo se $f'(x) \neq 0$, e vale*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Dimostrazione. (i) Immediata conseguenza delle proprietà del limite. (ii) Basta calcolare il limite del rapporto incrementale $\frac{f(\xi)g(\xi)-f(x)g(x)}{\xi-x}$, aggiungendo e togliendo al numeratore il termine $f(\xi)g(x)$: si ottiene allora $\lim_{\xi\to x}\left(f(\xi)\frac{g(\xi)-g(x)}{\xi-x}+\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}g(x)\right) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. La stessa idea permette di mostrare il caso generale. (iii) Si ha $\frac{1}{\xi-x}\left(\frac{f(\xi)}{g(\xi)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{g(\xi)g(x)}\,\frac{(f(\xi)-f(x))g(x)-(g(\xi)-g(x))f(x)}{\xi-x}$; passando al limite si ottiene quanto affermato. Ponendo poi $f \equiv 1$ (e dunque $f' \equiv 0$) si ottiene la formula per la derivata del reciproco. (iv) Dimostriamo la regola della catena per due funzioni (il caso generale si mostra facilmente per induzione a partire da questo) in due modi diversi. Primo modo. Usando la funzione ausiliaria $\psi(\eta) = \begin{cases}\frac{\varphi(\eta)-\varphi(f(x))}{\eta-f(x)} & \text{se } \eta \neq f(x)\\ \varphi'(f(x)) & \text{se } \eta = f(x)\end{cases}$, che per ipotesi è continua in $\eta = f(x)$, possiamo scrivere il rapporto incrementale della funzione $\varphi\circ f$ come $\frac{\varphi(f(\xi))-\varphi(f(x))}{\xi-x} = \psi(f(\xi))\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$; basta allora passare al limite per $\xi \to x$. Secondo modo. Per ipotesi (vedi (3.1)) si ha $f(\xi) = f(x)+f'(x)(\xi-x)+\sigma(\xi)(\xi-x)$ e $\varphi(\eta) = \varphi(f(x))+\varphi'(f(x))(\eta-f(x))+\tau(\eta)(\eta-f(x))$, ove σ è infinitesima per $\xi \to x$ e τ è infinitesima per $\eta \to f(x)$ (si noti che x è fissato, mentre ξ e η sono le variabili). Sostituendo $\eta = f(\xi)$ nella seconda si ottiene

$$\varphi(f(\xi)) = \varphi(f(x))+\varphi'(f(x))(f(\xi)-f(x))+\tau(f(\xi))(f(\xi)-f(x))\,,$$

ove $\tau(f(\xi))$ è infinitesima per $\xi \to x$ in base alla continuità di f in x. Sostituendo quindi $f(\xi)-f(x) = f'(x)(\xi-x)+\sigma(\xi)(\xi-x)$, sviluppando e radunando i termini si ha poi

$$\varphi(f(\xi)) = \varphi(f(x))+\big(\varphi'(f(x))\cdot f'(x)\big)(\xi-x)+\rho(\xi)(\xi-x)$$

ove $\rho(\xi) := \varphi'(f(x))\cdot\sigma(\xi)+\tau(f(\xi))\cdot(f'(x)+\sigma(\xi))$ è infinitesima per $\xi \to x$. Ma, in base a (3.1), questa è la tesi. (v) Usando il cambio di variabile $\eta = f(\xi)$, si ha $\lim_{\eta\to y}\frac{f^{-1}(\eta)-f^{-1}(y)}{\eta-y} = \lim_{\xi\to x}\frac{\xi-x}{f(\xi)-f(x)}$, che esiste finito (e vale $\frac{1}{f'(x)}$) se e solo se $f'(x) \neq 0$. □

Esempi. **(1)** La funzione $h(x) = \frac{2x^2-x+5}{x-1}$ è definita in $A = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, ed è ivi derivabile. Se $f(x) = 2x^2-x+5$ e $g(x) = x-1$, si ha $f'(x) = 2\cdot 2x-1+0 = 4x-1$ e $g'(x) = 1-0 = 1$, ed applicando la derivata di un quoziente si ricava $h'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{(4x-1)(x-1)-(2x^2-x+5)}{(x-1)^2} = 2\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$. **(2)** Essendo $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, si ritrova $f'(x) = \frac{\cos x\,\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. **(3)** Se $f(x) = x^3e^x\sin x$, si ha $f'(x) = (x^3)'e^x\sin x + x^3(e^x)'\sin x + x^3e^x(\sin x)' = 3x^2e^x\sin x + x^3e^x\sin x + x^3e^x\cos x = x^2e^x\big((x+3)\sin x + x\cos x\big)$. **(4)** La funzione $g(x) = \log|x|$ è definita per $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è ivi derivabile. Essa è la composta di $\varphi(y) = \log y$ con $f(x) = |x|$, e dunque la regola della catena dà $g'(x) = \varphi'(f(x))f'(x) = \frac{1}{|x|}\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$. **(5)** La funzione $g(x) = \operatorname{tg}(e^x)$ è la composta di $\varphi(y) = \operatorname{tg} y$ con $f(x) = e^x$, e dunque $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(e^x)}e^x = \frac{x}{\cos^2(e^x)}$. **(6)** La funzione $g(x) = e^{\sin^2(3x-5)}$ è la composta di $\varphi_3(t) = e^t$ con $\varphi_2(z) = z^2$, $\varphi_1(y) = \sin y$ e $f(x) = 3x-5$; dunque si ha $g'(x) = \varphi_3'(\varphi_2(\varphi_1(f(x))))\cdot\varphi_2'(\varphi_1(f(x)))\cdot\varphi_1'(f(x))\cdot f'(x) = e^{\sin^2(3x-5)}\cdot 2\sin(3x-5)\cdot\cos(3x-5)\cdot 3 = 3e^{\sin^2(3x-5)}\sin\big(2(3x-5)\big)$. **(7)** Abbiamo calcolato in precedenza le derivate delle funzioni trigonometriche inverse usando l'asintoticità: ritroviamole ora usando la formula di derivazione della funzione inversa. Se $x = \sin\xi$ con $|\xi| \leq \frac{\pi}{2}$ (pertanto $\xi = \arcsin x$), se $(\sin)'(\xi) = \cos\xi \neq 0$ (cioè se $\xi \neq \mp\frac{\pi}{2}$, ovvero se $x \neq \mp 1$) si ha $(\arcsin)'(x) = \frac{1}{(\sin)'(\xi)} = \frac{1}{\cos\xi} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Per derivare l'arco-coseno, l'arco-tangente e l'arco-cotangente si può procedere in modo analogo.

Esercizio. *Calcolare il dominio delle funzioni $f(x) = \operatorname{arctg}^2(\log|\sqrt{x}-x|)$ e $g(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2-3)}{\sqrt{\sin x}}$, dire dove esse sono derivabili e calcolare la loro derivata.*

Risoluzione. La funzione $f(x) = \operatorname{arctg}^2(\log|\sqrt{x} - x|)$ è definita e derivabile se $x \geq 0$ e $\sqrt{x} - x \neq 0$, ovvero in $\mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$. La sua derivata è $f'(x) = 2\operatorname{arctg}(\log|\sqrt{x} - x|)\frac{1}{1+\log^2|\sqrt{x}-x|}\frac{1}{\sqrt{x}-x}(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1) = \frac{(1-2\sqrt{x})\operatorname{arctg}(\log|\sqrt{x}-x|)}{x(1-\sqrt{x})(1+\log^2|\sqrt{x}-x|)}$. La funzione $g(x) = \frac{\operatorname{tg}(x^2-3)}{\sqrt{\sin x}}$ è definita e derivabile se $x^2 - 3 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e $\sin x > 0$, ovvero se $x \neq \pm\sqrt{3 + \frac{\pi}{2} + k\pi}$ e $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) con derivata $g'(x) = \frac{\frac{2x}{\cos^2(x^2-3)}\sqrt{\sin x} - \operatorname{tg}(x^2-3)\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{(\sqrt{\sin x})^2} = \frac{4x\sin x - \sin(x^2-3)\cos(x^2-3)\cos x}{2\sin x\sqrt{\sin x}\cos^2(x^2-3)}$.

Retta tangente e retta perpendicolare al grafico Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è derivabile in $c \in A$, la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa c dovrà passare per il punto $(c, f(c))$ con coefficiente angolare $f'(c)$:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c) \qquad \text{(retta tangente al grafico di } f \text{ in } c\text{);}$$

quanto alla retta perpendicolare, se $f'(c) \neq 0$ essa passerà per il punto $(c, f(c))$ con coefficiente angolare $-\frac{1}{f'(c)}$, mentre se $f'(c) = 0$ essa sarà la retta verticale $x = c$:

$$\begin{cases} y - f(c) = -\frac{1}{f'(c)}(x - c) & \text{se } f'(c) \neq 0 \\ x = c & \text{se } f'(c) = 0 \end{cases} \qquad \text{(retta perpendicolare al grafico di } f \text{ in } c\text{).}$$

Esercizio. **(1)** *Data la funzione $f(x) = e^{x-1} + 1$, calcolare le equazioni cartesiane delle rette tangente e perpendicolare al grafico di f nel punto di ascissa 2.* **(2)** *Data la funzione $g(x) = x^2 - x + 2$, si dica per quali $c \in \mathbb{R}$ le rette tangenti o perpendicolari al grafico di g nel punto di ascissa c passano per l'origine.* **(3)** *In quali punti del dominio di $h(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}$ la retta tangente al grafico di h è parallela alla retta $x - 2y + 7 = 0$?*

Risoluzione. **(1)** Essendo $f'(x) = e^{x-1}$, da cui $f'(2) = e$, la retta tangente (risp. perpendicolare) al grafico di f nel punto di ascissa 2 avrà equazione cartesiana $y - (e + 1) = e(x - 2)$, ovvero $y = ex - e + 1$ (risp. $y - (e + 1) = -\frac{1}{e}(x - 2)$, ovvero $y = -\frac{1}{e}x + \frac{2}{e} + e + 1$). **(2)** Nel generico punto c l'equazione della retta tangente è $y - g(c) = g'(c)(x - c)$, ovvero $y = g'(c)\,x + g(c) - c\,g'(c)$, e dunque questa passa per l'origine se e solo se $g(c) - c\,g'(c) = 0$, ovvero $(c^2 - c + 2) - c(2c - 1) = 0$, ovvero $-c^2 + 2 = 0$, ovvero $c = \pm\sqrt{2}$: in questi due punti le tangenti hanno equazioni $y = (\pm 2\sqrt{2} - 1)x$. Quanto alla perpendicolare $y - g(c) = -\frac{1}{g'(c)}(x - c)$, questa passa per l'origine se e solo se $\frac{c}{g'(c)} + g(c) = 0$, ovvero $g(c)g'(c) + c = 0$, ovvero $(c^2 - c + 2)(2c - 1) + c = 0$, da cui $2c^3 - 3c^2 + 6c - 2 = 0$. Il trinomio $P(c)$ al primo membro è strettamente crescente (infatti $P'(c) = 6(c^2 - c + 1) > 0$ per ogni c), e inoltre $P(0) = -2 < 0$ e $P(1) = 3 > 0$: ne ricaviamo che $P(c) = 0$ ha una sola soluzione reale $0 < c_0 < 1$. In tale punto, la retta perpendicolare al grafico ha equazione $y = -\frac{1}{2c_0-1}x$. **(3)** Il dominio di h è $\{x \geq 0 : x \neq 9\}$. Per $x \neq 0$ si calcola $h'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}(3-\sqrt{x})^2}$ (si noti che $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = +\infty$, e dunque h non ha derivata destra in 0). La condizione da imporre è $h'(c) = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{2}{\sqrt{c}(3-\sqrt{c})^2} = \frac{1}{2}$: ponendo $\sqrt{c} = t$ si ricava $t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$. C'è un'evidente soluzione $t = 1$; dividendo con Ruffini per $t - 1$ si ottiene $t^2 - 5t + 4 = 0$, con soluzioni $t = 1$ (nuovamente) e $t = 4$. I punti cercati sono dunque $c = 1$ e $c = 16$ (in cui le rette tangenti sono rispettivamente $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}x - 13$).

Le funzioni continue sono derivabili "quasi ovunque"? Pensando alle funzioni elementari e agli altri esempi dati finora (le funzioni con punti angolosi, la funzione $x\sin\frac{1}{x}$...) si potrebbe essere tentati di credere che una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

sia derivabile dappertutto tranne eventualmente un sottoinsieme fatto di punti isolati. Ciò però è *falso*: ad esempio, Van der Waerden ha costruito una funzione $\phi_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua ma non derivabile* in tutti i punti di $\mathbb{R}$.[96] A partire da ϕ_w è facile costruire anche una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ ma derivabile solo in un punto x_0 con prescritti valori $f(x_0) = \alpha$ e $f'(x_0) = \beta$: ad esempio $f(x) = \alpha + (x - x_0)(\beta + \phi_w(x) - \phi_w(x_0))$, oppure $f(x) = \alpha + \beta(x - x_0) + (x - x_0)^2\phi_w(x)$.

Diffeomorfismo Il raffinamento della nozione di *omeomorfismo* (ovvero, come si è visto, una funzione biiettiva e continua con inversa pure continua) è quello di *diffeomorfismo*: per definizione, si tratta di una funzione biiettiva e derivabile con inversa pure derivabile. **Diffeomorfismo**

Proposizione 3.3.5. *Un omeomorfismo è anche un diffeomorfismo se e solo se esso è ovunque derivabile con derivata mai nulla.*

Dimostrazione. Vedi Proposizione 3.3.4(v). $\square$

Esempi. **(1)** e^x è un diffeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_{>0}$: infatti esso è un omeomorfismo ovunque derivabile, e la sua derivata (ancora e^x) non si annulla mai. La sua inversa è il logaritmo: se $y > 0$, ritroviamo perciò $\log'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$. **(2)** $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ è un omeomorfismo; poiché $\sin'(x) = \cos x$, esso induce un diffeomorfismo tra $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $]-1, 1[$, con inversa $\arcsin y$. Ritroviamo dunque $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, come già calcolato in precedenza. Analogamente, $\operatorname{tg} x$ induce un diffeomorfismo tra $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\mathbb{R}$, con inversa $\operatorname{arctg} y$, e $\operatorname{tg}'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$ per ogni $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: pertanto, se $y \in \mathbb{R}$ si ha $\operatorname{arctg}'(y) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(x)} = \cos^2(\operatorname{arctg}(y)) = \frac{1}{1+y^2}$. **(3)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3$ è un omeomorfismo, ma non un diffeomorfismo: infatti essa è ovunque derivabile, ma $f'(0) = 0$.

3.3.2 Derivabilità, crescenza ed estremi locali

Abbiamo già spiegato (vedi pag. 89) che cosa significa crescenza, decrescenza, estremi ed estremanti assoluti. Dopo aver introdotto una topologia su $\mathbb{R}$ (ovvero, dopo aver precisato la nozione di "vicinanza" in $\mathbb{R}$), siamo in grado di dare una definizione "locale" di tali proprietà. Così, se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione e $c \in A$, diremo che c è un *punto di massimo locale* (o *relativo*) per f in A se lo è all'intorno di c, ovvero se esiste $\delta > 0$ tale che c sia un punto di massimo assoluto per $f|_{A\cap B_c(\delta)}$; idem per "c punto di minimo locale". Tali nozioni sono ovviamente più deboli delle analoghe nozioni assolute: ad esempio, un punto di massimo assoluto è anche un punto di massimo relativo, mentre il viceversa è in generale falso. Il seguente legame tra estremi locali e crescenza è ovvio: **Punto di massimo e minimo locale**

Proposizione 3.3.6. *Se f è crescente all'intorno sinistro e decrescente all'intorno destro di c,*[97] *allora c è un punto di massimo relativo; inoltre, se crescenza e decrescenza sono*

[96] Omettiamo di mostrare la costruzione, un po' tecnica, di ϕ_w: menzioniamo solo che essa è costruita tramite somme infinite di copie riscalate della funzione (periodica di periodo 1) "a dente di sega" $\min\{\operatorname{frac} x, 1 - \operatorname{frac} x\}$, il cui grafico sopra l'intervallo $[n, n+1]$ con $n \in \mathbb{Z}$, è costituito dai lati obliqui del triangolo isoscele di base $[n, n+1]$ e altezza 1.

[97] ovvero se esiste $\delta > 0$ tale che $f|_{A\cap B_c^-(\delta)}$ è crescente e $f|_{A\cap B_c^+(\delta)}$ decrescente.

strette allora c è un punto di massimo relativo stretto. Un enunciato simile vale per il caso di minimo relativo.

Va osservato che, contrariamente a quanto potrebbe sembrare, il viceversa è falso: ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2(2+\sin\frac{1}{x})$ se $x\neq 0$ e $f(0)=0$ (che, tendendo x a zero, oscilla in continuazione tra x^2 e $3x^2$, vedi Figura 3.12) ha in 0 un punto di minimo assoluto stretto, ma non esiste alcun $\delta>0$ tale che f sia decrescente in $]-\delta,0]$ e crescente in $[0,\delta[$.

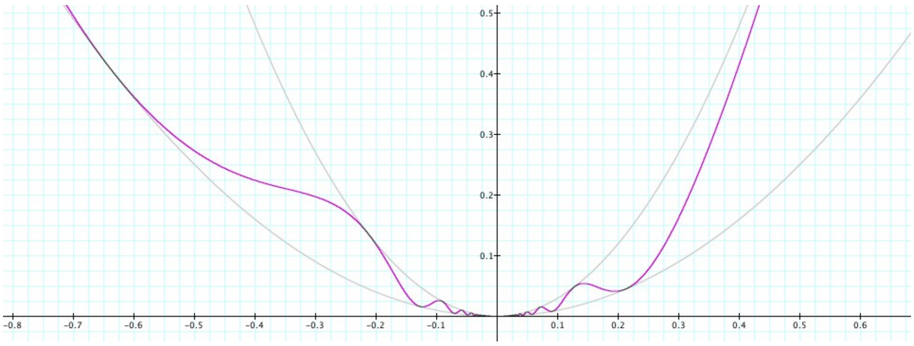

Figura 3.12: Crescenza ed estremanti locali: la funzione $x^2(2+\sin\frac{1}{x})$ (porpora), stretta tra x^2 e $3x^2$ (grigie).

Esempi. Per meglio visualizzare gli esempi seguenti, provare a tracciare il grafico delle funzioni descritte. **(1)** La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3$ è strettamente decrescente (e dunque è strettamente decrescente in tutti i punti di $\mathbb{R}$). **(2)** La funzione $f(x)=\sin(\pi x)$ ha massimo assoluto 1, e punti di massimo assoluto (e dunque anche relativo) in $\frac{1}{2}+2\mathbb{Z}$, ed ha minimo assoluto -1 con punti di minimo assoluto (e dunque anche relativo) in $-\frac{1}{2}+2\mathbb{Z}$. **(3)** La funzione $f(x)=\begin{cases}-x^2-x & \text{se } x\leq 0\\ x^2-2x & \text{se } x\geq 0\end{cases}$ non ammette massimo e minimo assoluti su $\mathbb{R}$, ma ha un punto di massimo (risp. minimo) relativo stretto in $x=-\frac{1}{2}$ (risp. in $x=1$), con valore $\frac{1}{4}$ (risp. con valore -1). **(4)** La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x+1$ (se $x<0$), 0 (se $0<x\leq 1$) e 1 (se $x\geq 1$) non ha minimo assoluto, mentre ha massimo assoluto 1 assunto nei punti $x\geq 1$ (che dunque sono tutti punti di massimo assoluto, e in particolare relativo, non stretto); essa è crescente in tutti i punti di $\mathbb{R}$, strettamente per $x<0$. **(5)** La funzione $f(x)=x+2\sin x$ non ha estremi assoluti, ma ha punti di massimo locale in $c_k=\frac{2\pi}{3}+2\mathbb{Z}\pi$ e punti di minimo locale in $c'_k=-\frac{2\pi}{3}+2\mathbb{Z}\pi$. (L'esame del grafico, ottenuto sommando x e $2\sin x$, dovrebbe giustificare la conclusione in modo "qualitativo"; per la conferma "quantitativa" dei risultati basterà attendere un po', quando avremo ben descritto il legame tra gli estremi locali di una funzione e la sua derivata.)

Se $A\subset\mathbb{R}$ è un intervallo e $f:A\to\mathbb{R}$ è una funzione, si vede immediatamente che f è crescente (risp. decrescente) se e solo se tutti i rapporti incrementali sono ≥ 0 (risp. ≤ 0): ciò fa apparire naturale che ci debba essere un legame tra la derivata di f e le zone del dominio dove essa è crescente o decrescente. Andiamo a studiare questi legami.

Proposizione 3.3.7. *Siano $f:A\to\mathbb{R}$ una funzione e $c\in A$ di accumulazione per A.*

(i) (Derivata ed estremi locali) *Se c è un punto di massimo locale, allora* (se esistono) $f'_-(c)\geq 0$ *e* $f'_+(c)\leq 0$; *analogamente, se c è un punto di minimo locale, allora* (se

esistono) $f'_-(c) \leq 0$ *e* $f'_+(c) \geq 0$.
Pertanto, se c *è un estremante locale allora* (se esiste) $f'(c) = 0$.

Corollari:

(Teorema di Rolle) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *una funzione continua, e derivabile in* $]a, b[$*. Se* $f(a) = f(b)$*, allora esiste* $\xi \in]a, b[$ *tale che* $f'(\xi) = 0$.

Più generalmente:

(Teorema "del valor medio" di Lagrange) *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *una funzione continua, e derivabile in* $]a, b[$*. Allora esiste* $\xi \in]a, b[$ *tale che* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Ancora più generalmente:

(Teorema "degli incrementi finiti" di Cauchy) *Siano* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) *due funzioni continue, e derivabili in* $]a, b[$*. Allora esiste* $\xi \in]a, b[$ *tale che* $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$.

(ii) (Derivata e costanza) f *è derivabile con derivata identicamente nulla in* A *se e solo se* f *è* localmente costante*, ovvero costante su ogni intervallo contenuto in* A*. In particolare, se* A *è un intervallo e* $f, g : A \to \mathbb{R}$ *sono due funzioni derivabili con* $f' = g'$*, allora* f *e* g *differiscono per una costante additiva* (ovvero esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = g(x) + k$ per ogni $x \in A$).

(iii) (Derivata e monotonìa locale) *Sia* f *derivabile in* c*. Se* f *è crescente* (risp. *decrescente*) *all'intorno di* c*, allora* $f'(c) \geq 0$ (risp. $f'(c) \leq 0$).

(iv) (Derivata e monotonìa globale) *Se* A *è un intervallo* aperto *e* f *è derivabile in* A*, si ha che* f *è crescente* (risp. *decrescente*) *se e solo se* $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) *per ogni* $x \in A$*. In particolare,* f *è strettamente crescente* (risp. *strettamente decrescente*) *se e solo se* $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$) *per ogni* $x \in A$ *ed il sottoinsieme* $\{x \in A : f'(x) = 0\}$ *di* A *è privo di punti interni.*

Dimostrazione. (i) Se ad esempio c è un punto di massimo locale, per definizione esiste un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c}$ è ≥ 0 (risp. ≤ 0) per ogni $\xi \in U \cap A$ con $\xi < c$ (risp. $\xi > c$): per il teorema del confronto si ha allora $f'_-(c) = \lim_{\xi \to c^-} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \geq 0$ e $f'_+(c) = \lim_{\xi \to c^+} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \leq 0$. Nelle ipotesi del Teorema di Rolle, grazie al Teorema di Weierstrass (vedi pag. 101) f ammette estremi assoluti in $[a, b]$. Ci sono allora due possibilità: almeno uno tra massimo e minimo assoluto viene assunto in qualche $\xi \in]a, b[$, oppure sia massimo che minimo assoluto sono assunti negli estremi a e b. Nel primo caso, come appena visto, vale $f'(\xi) = 0$; nel secondo, la funzione è necessariamente costante in $[a, b]$, e dunque $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in]a, b[$. Per dimostrare ora il teorema di Cauchy (quello di Lagrange è solo il caso particolare $g(x) = x$), basta osservare che la funzione $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$ soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle, e dunque esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi) = 0$. (ii) Sia $f' \equiv 0$ su A; preso un intervallo $B \subset A$ ed $a, b \in B$ con $a < b$, per il teorema della media di Lagrange esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = 0$, da cui $f(a) = f(b)$, ovvero $f|_B$ è costante; il viceversa è ovvio, perché A è l'unione degli intervalli in lui contenuti. Infine, se A è un intervallo e $f' = g'$ in A, allora $h = f - g : A \to \mathbb{R}$ (essendo $h' = f' - g' \equiv 0$) è costante su A. (iii) Dire che, ad esempio, f è crescente all'intorno di c equivale a dire che esiste un intorno U di c in $\mathbb{R}$ tale che $\frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \geq 0$ per ogni $\xi \in (U \cap A) \setminus \{c\}$: per il teorema del confronto si ha allora $f'(c) = \lim_{\xi \to c} \frac{f(\xi)-f(c)}{\xi-c} \geq 0$. (iv) Come appena visto, se f è crescente in A allora

$f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$; viceversa, supponendo che valga $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$, presi due qualsiasi $a, b \in A$ con $a < b$, per il teorema della media di Lagrange esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \geq 0$, da cui $f(b) \geq f(a)$, e ciò mostra che f è crescente in A. Ora, se f è crescente in A, essa è strettamente crescente se e solo se essa non ha tratti in cui è costante, ovvero se e solo se non esistono $a, b \in A$ con $a < b$ tali che $f|_{[a,b]}$ sia costante, ovvero (per (ii)) tali che $f'|_{]a,b[} \equiv 0$: ma ciò equivale precisamente al fatto che $\{x \in A : f'(x) = 0\}$ non ha punti interni. □

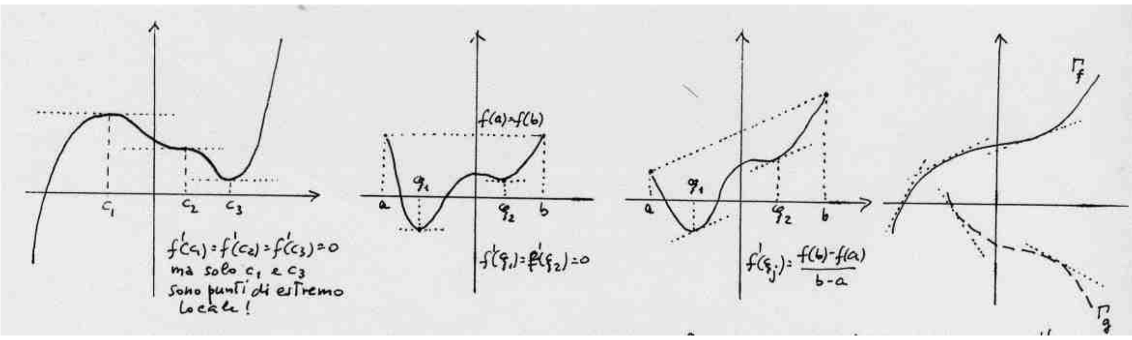

Figura 3.13: Punti stazionari ed estremi locali; i teoremi di Rolle e di Lagrange; crescenza e segno della derivata.

È opportuno fare alcuni commenti sugli enunciati appena visti (ogni capoverso si riferisce al corrispondente punto dell'enunciato).

(i) Si è visto che in un estremante locale la derivata, se esiste, è nulla; pertanto, per funzioni derivabili l'insieme degli estremanti locali è contenuto nell'insieme dei punti *stazionari* o *critici*, ovvero quelli in cui la derivata è nulla (dal punto di vista geometrico, i punti in cui la retta tangente al grafico è orizzontale, vedi Figura 3.13(a)), e ciò semplifica notevolmente la loro ricerca. Va notato che non tutti i punti stazionari sono estremanti locali (si pensi ad esempio al punto $c = 0$ per la funzione $f(x) = x^3$): ne riparleremo più tardi. Il significato geometrico del teorema di Rolle è allora chiaro (vedi Figura 3.13(b)), mentre quello del teorema della media di Lagrange è che esiste un punto interno ad $[a, b]$ in cui la pendenza della tangente al grafico è uguale alla pendenza della retta che congiunge $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$ (vedi Figura 3.13(c)).[98]

Punti stazionari

(ii) Se A non è un intervallo e $f' \equiv 0$ in A, non è detto che f sia costante su *tutto* A: si pensi, ad esempio, a $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e alla funzione $f(x) = \operatorname{sign} x$ (ovvero $f(x) = \pm 1$ per $x \gtrless 0$), oppure a $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e $f(x) = [x]$ (la "parte intera" di x, vedi pag. 48). Come appare chiaramente da questi esempi, come detto si può solo concludere che f ha un valore costante (possibilmente diverso) per ogni "componente connessa" di A.

(iii) Il viceversa dell'enunciato è falso: se $f'(c) \geq 0$ non è detto che f sia crescente all'intorno di c. Ciò si vede subito nel caso in cui $f'(c) = 0$ (all'intorno di un punto

[98] Per il significato geometrico del teorema degli incrementi finiti di Cauchy bisognerebbe pensare le due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ come un'unica funzione $F := f + ig : [a, b] \to \mathbb{C}$ a valori complessi, e vedere l'immagine di F (ovvero l'insieme degli $F(t) \in \mathbb{C}$ al variare di $t \in [a, b]$) come una curva nel piano di Gauss: allora, considerata la derivata $F' := f' + ig' : [a, b] \to \mathbb{C}$, il vettore $F'(t)$ rappresenta il vettore tangente alla curva nel suo punto $F(t)$, e il teorema dice che il vettore $F(b) - F(a)$ (che congiunge i due punti di partenza e arrivo della curva) è parallelo al vettore tangente alla curva in un suo opportuno punto $F(\xi)$.

stazionario può accadere di tutto); e non basta nemmeno che $f'(c) > 0$, come mostra l'esempio di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ (in $c = 0$ la funzione è derivabile con $f'(0) = 1 > 0$, ma per $x \neq 0$ la derivata $f'(x) = 1 - 2\cos\frac{1}{x} + 4x \sin\frac{1}{x}$ cambia segno in ogni intorno di 0). Si noti che è falsa anche una versione "stretta" dell'enunciato: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente all'intorno di $c = 0$ ma $f'(0) = 0$.

(iv) Questo fatto è di grande utilità pratica, perché dà una descrizione immediatamente calcolabile della monotonìa delle funzioni derivabili. Tra l'altro, anche molte delle funzioni non derivabili sono in realtà *derivabili a tratti*, ovvero lo sono tranne che negli estremi o in alcuni punti isolati, e dunque anche per esse il risultato vale in ognuno dei tratti di derivabilità, con la riserva di completare poi lo studio nei punti di non derivabilità con l'esame concreto, uno per uno. Facciamo un paio di semplici esempi.

Esempi. **(1)** La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è derivabile in $A' = \mathbb{R}^\times$ con derivata $f'(x) = \pm 1$ per $x \gtrless 0$: non essendoci punti stazionari (e dunque estremi locali) in $\mathbb{R}^\times$, si è tentati di chiudere la questione dicendo che non vi sono estremanti locali per f. Tuttavia ciò è falso, perché è chiaro che 0 è un punto di minimo assoluto stretto per f: ma ciò si deve dire con un discorso specifico per 0, e non si può ricavare dallo studio della derivata (che perde completamente di vista il punto 0). **(2)** La funzione $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, è derivabile in $]1, 2[$ con derivata $g'(x) = 2x$ (negli estremi -2 e 1 a rigore non possiamo dire che la funzione è "derivabile", perché lo è solo da un lato: non a caso l'enunciato richiede che l'intervallo A sia *aperto*): essendo $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]1, 2[$, nessuno dei punti interni è un estremo locale, ma anche qui è chiaro che 1 (risp. 2) è un punto di minimo (risp. massimo) assoluto stretto per g: ancora una volta, ciò va verificato direttamente in ciascuno dei due punti, e la derivata non dà alcuna informazione su di essi.

Esercizio. *Studiare la crescenza e gli estremi relativi delle funzioni*

$$f(x) = (x-1)\log|x-1| - (x-3)\log|x-3| - (\log 2)x, \qquad g(x) = -\log|\cos\frac{x}{2}| - x.$$

Risoluzione. Le funzioni sono derivabili nel loro dominio, dunque è sufficiente studiare il segno della loro derivata. La funzione $f(x) = (x-1)\log|x-1| - (x-3)\log|x-3| - (\log 2)x$ è definita per $x \neq 1$ e $x \neq 3$,[(99)] e si ricava $f'(x) = \log|x-1| + (x-1)\frac{1}{x-1} - \log|x-3| - (x-3)\frac{1}{x-3} - \log 2 = \log\left|\frac{x-1}{x-3}\right| - \log 2$, da cui $f'(x) = 0$ se e solo se $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| = 2$, ovvero $\frac{x-1}{x-3} = 2$ oppure $\frac{x-1}{x-3} = -2$, con soluzioni $x = 5$ e $x = \frac{7}{3}$; si ha poi $f'(x) > 0$ se e solo se $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| > 2$, ovvero $\frac{x-1}{x-3} > 2$ oppure $\frac{x-1}{x-3} < -2$: nel primo caso si ottiene $\frac{x-1}{x-3} - 2 = \frac{5-x}{x-3} > 0$, che dà $3 < x < 5$, e nel secondo $\frac{x-1}{x-3} + 2 = \frac{3x-7}{x-3} < 0$, che dà $\frac{7}{3} < x < 3$. Dunque f è crescente per $\frac{7}{3} < x < 3$ e $3 < x < 5$ e decrescente per $x < 1$, $1 < x < \frac{7}{3}$ e $x > 5$, e ne deduciamo che $x = \frac{7}{3}$ è un punto di minimo relativo stretto (con $f(\frac{7}{3}) = \frac{4}{3}\log\frac{4}{3} - (-\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}) - \frac{7}{3}\log 2 = \frac{4}{3}(2\log 2 - \log 3) + \frac{2}{3}(\log 2 - \log 3) - \frac{7}{3}\log 2 = -\log\frac{9}{2} \sim -1,5$) e $x = 5$ è un punto di massimo relativo stretto (con $f(5) = 4\log 4 - 2\log 2 - 5\log 2 = \log 2 \sim 0,7$). Invece, la funzione $g(x) = -\log|\cos\frac{x}{2}| - x$ è definita per $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, ovvero per $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero per $x \neq \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$) e si ricava $g'(x) = -\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - 1 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 1$, da cui $g'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1$, ovvero $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 2$, ovvero $\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}\,2 + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero $x = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); si ha poi $g'(x) > 0$ (cioè, g crescente) se e solo se $\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} > 1$, ovvero $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} > 2$, ovvero $\mathrm{arctg}\,2 + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), ovvero $2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Ne deduciamo che i punti $x_k = 2\,\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi$

[(99)] Si noti comunque che $\lim_{x\to 1} f(x) = 0 - (-2)\log 2 - \log 2 = \log 2$ e $\lim_{x\to 3} f(x) = 2\log 2 - 0 - 3\log 2 = -\log 2$, e dunque si potrebbe prolungare f per continuità a tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(1) = \log 2$ e $f(3) = -\log 2$.

(con $k \in \mathbb{Z}$) sono di minimo relativo stretto, con valori (ricordando che in generale $\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$) $g(x_k) = \frac{1}{2}\log 5 - 2\,\mathrm{arctg}\,2 - 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$).

Un altro criterio molto utile per stabilire la natura di un punto stazionario di funzioni derivabili più volte lo vedremo tra breve (Proposizione 3.3.12).

Problemi di massimo e minimo Una classica applicazione delle relazioni tra derivate e crescenza sono i *problemi di massimo e minimo*, in cui si richiede di determinare gli estremi di una certa quantità numerica, diciamo y, che dipende da un'altra, diciamo x. Si tratta dunque di studiare gli estremi di una funzione $y = f(x)$, e quando tale funzione è derivabile possiamo applicare i risultati appena trovati.

Diamo qui nel seguito alcuni esempi.

Esercizio. *Risolvere i seguenti problemi di massimo e minimo.* **(1)** *Tra tutti i triangoli isosceli di dato perimetro $2p$, trovare quello con l'area massima.* **(2)** *Tra tutte le pentole cilindriche di dato volume interno V, qual è il diametro interno di quella con la superficie interna (parete più fondo) minima?* **(3)** *Tra tutte le scatole senza coperchio a forma di parallelepipedo a base quadrata di data area totale esterna A, trovare il lato di base di quella che ha il volume massimo.* **(4)** *Un agricoltore deve scavare nel terreno una vasca, a forma di piramide retta con base quadrata e la punta in giù, che possa contenere esattamente un volume V di acqua. Per impermeabilizzare i lati della vasca, egli userà dei teli di linoleum, che pagherà al negoziante in base alla superficie acquistata. Quale sarebbe la lunghezza del lato di base della vasca che gli permetterebbe di risparmiare al massimo sull'acquisto di linoleum?* **(5)** *In un quadrato Q di lato ℓ, giacente sul piano orizzontale, si considerino due vertici opposti A e A'. Dato $0 \le x \le \ell$, dentro Q si inscriva un triangolo T avente due vertici a distanza x da A ed il terzo vertice alla medesima distanza x da A'; infine, considerato il punto V posto verticalmente ad altezza x sopra il centro di Q e la piramide di base T e vertice V, si dica per quale valore di x tale piramide ha volume massimo.*

Risoluzione. **(1)** Sia x la lunghezza della base del triangolo (dunque $0 \le x \le p$): allora i lati obliqui sono lunghi $p - \frac{x}{2}$, e per il teorema di Pitagora l'altezza risulta $\sqrt{(p-\frac{x}{2})^2 - (\frac{x}{2})^2} = \sqrt{p(p-x)}$: l'area è allora pari a $A(x) = \frac{\sqrt{p}}{2}x\sqrt{p-x}$. Da $A'(x) = \frac{\sqrt{p}}{2}(\sqrt{p-x} + x\frac{-1}{2\sqrt{p-x}}) = \frac{\sqrt{p}}{4}\frac{2p-3x}{\sqrt{p-x}}$ si ricava $A'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{2p}{3}$ e $A'(x) > 0$ se e solo se $x < \frac{2p}{3}$. In altre parole: se si allarga la base del triangolo da 0 a p mantenendo però inalterato il perimetro totale $2p$, l'area del triangolo aumenta fino a quando la base diventa lunga $\frac{2p}{3}$ e diminuisce da tale valore in poi. Dunque l'area è massima quando la base è lunga $\frac{2p}{3}$, ovvero quando il triangolo è equilatero. **(2)** Sia x il raggio interno della pentola. Se h è la sua profondità interna, vale $V = x^2\pi h$ da cui $h = \frac{V}{\pi x^2}$. La superficie interna è dunque $y = S(x) = x^2\pi + 2\pi x h = \frac{2V}{x} + \pi x^2$. Da $S'(x) = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x$ si ricava $S'(x) = 0$ se e solo se $x = \sqrt[3]{V/\pi}$, e $S'(x) > 0$ se e solo se $x > \sqrt[3]{V/\pi}$. Il valore minimo si ha allora quando il diametro interno è $2\sqrt[3]{V/\pi}$, e vale $S(\sqrt[3]{V/\pi}) = 3\sqrt[3]{V^2\pi}$. **(3)** Sia x il lato di base: allora l'altezza h deve soddisfare $A = 4hx + x^2$, da cui $h = \frac{A-x^2}{4x}$, e il volume è $V(x) = hx^2 = \frac{x(A-x^2)}{4}$. Si ha $V'(x) = \frac{A-3x^2}{4}$, da cui $V'(x) \ge 0$ per $x \le \sqrt[2]{A/3}$: pertanto $V(x)$ cresce prima di $x = \sqrt[2]{A/3}$ e decresce dopo. Dunque la scatola cercata ha il lato di base lungo $\sqrt[2]{A/3}$, ed il volume massimo è $V(\sqrt[2]{A/3}) = \frac{1}{2}(A/3)^{\frac{3}{2}}$. **(4)** Si tratta di vedere quando l'area laterale della piramide (ovvero, la superficie da rivestire di linoleum) è minima. Sia x la lunghezza del lato di base della vasca: l'altezza h della piramide (profondità centrale della vasca) soddisfa $V = \frac{hx^2}{3}$, da cui $h = \frac{3V}{x^2}$. L'apotema della piramide (altezza delle quattro facce triangolari laterali) è dato da $a = \sqrt{h^2 + (\frac{x}{2})^2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{2x^2}$: dunque l'area laterale della piramide è data da $S(x) = 4\frac{ax}{2} = \frac{\sqrt{x^6+36V^2}}{x}$, definita per $x > 0$. La derivata è $S'(x) = \frac{\frac{6x^5}{2\sqrt{x^6+36V^2}}x - \sqrt{x^6+36V^2}}{x^2} = \frac{2(x^6-18V^2)}{x^2\sqrt{x^6+36V^2}}$, e si ha $S'(x) = 0$ per $x = \sqrt[6]{18V^2}$ e $S'(x) > 0$ per $x > \sqrt[6]{18V^2}$. Dunque il massimo risparmio si ottiene quando il lato della vasca è lungo $\sqrt[6]{18V^2}$. **(5)** Levando all'area del quadrato Q i pezzi che non stanno in T, si ha che l'area di T è $\ell^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{(\ell-x)^2}{2} - \frac{(\ell-x+x)x}{2} = x(\ell - x)$, dunque la piramide ha volume $y = f(x) = \frac{x}{3}x(\ell - x) = \frac{x^2(\ell-x)}{3}$. Derivando, si ottiene $f'(x) = \frac{1}{3}(2x(\ell - x) - x^2) = \frac{1}{3}x(2\ell - 3x)$. Vale $f'(x) = 0$ per $x = \frac{2}{3}\ell$, e $f'(x) > 0$ se e solo se $0 < x < \frac{2}{3}\ell$. Pertanto il valore massimo del volume della piramide si ottiene quando $x = \frac{2}{3}\ell$.

La regola di de l'Hôpital Il risultato che segue è di grande importanza nel calcolo dei limiti.

Teorema 3.3.8. (Regola di de l'Hôpital) *Sia $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Siano $f, g : A \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A \setminus \{c\}$, e si assuma che esista $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*
Allora, (1) *se f e g sono entrambe infinitesime in c, oppure* (2) *se g è infinita in c, esiste anche $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ e vale*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo per iniziare che $\ell = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$, e studiamo solo il limite sinistro (il ragionamento per il destro sarà lo stesso). Fissato un $\varepsilon > 0$, sia U un intorno sinistro di c tale che $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon$ per ogni $x \in U$: usando il teorema degli incrementi finiti di Cauchy (Proposizione 3.3.7(i)), si ricava subito che $\left|\frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} - \ell\right| < \varepsilon$ per ogni $x, \xi \in U$ con $x \neq \xi$. Nel caso (1) si ha $\lim_{\xi\to c^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ (essendo g derivabile $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in A \setminus \{c\}$, essa sarà strettamente monotòna e dunque si ha $g(x) = 0$ in alpiù un $x \in U$, che potrà essere tenuto fuori scegliendo un intorno U più piccolo), e per il teorema del confronto si otterrà dunque $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| < \varepsilon$ per ogni $x \in U$, che è quanto si voleva. Nel caso (2), a meno di cambiare segno ad f e a g possiamo supporre che sia $g'(x) > 0$ (dunque g strettamente crescente) e $\lim_{x\to c^-} g(x) = +\infty$; per ogni $x, \xi \in U$ con $x > \xi$ si ha, moltiplicando i membri della relazione $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)-f(\xi)}{g(x)-g(\xi)} < \ell + \varepsilon$ per $\frac{g(x)-g(\xi)}{g(x)} > 0$ e sommando dappertutto $\frac{f(\xi)}{g(x)}$ si ottiene $(\ell - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}\right) + \frac{f(\xi)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < (\ell + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}\right) + \frac{f(\xi)}{g(x)}$. Facciamo ora tendere $x \to c^-$ lasciando fermo ξ: il primo e l'ultimo membro tenderanno rispettivamente a $\ell \mp \varepsilon$ e dunque, per il teorema della permanenza del segno, esisterà un intorno sinistro $U' \subset U$ di c tale che $\ell - 2\varepsilon < (\ell - \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}\right) + \frac{f(\xi)}{g(x)}$ e $(\ell + \varepsilon)\left(1 - \frac{g(\xi)}{g(x)}\right) + \frac{f(\xi)}{g(x)} < \ell + 2\varepsilon$ per ogni $x \in U'$, da cui $\ell - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + 2\varepsilon$ per ogni $x \in U'$, e ancora una volta si ha quanto si voleva. Se $\ell = \pm\infty$ si ragionerà in modo del tutto simile, fissando un $N > 0$ e prendendo un intorno sinistro U di c tale che $\frac{f'(x)}{g'(x)} \gtrless \pm N$ per ogni $x \in U$ (si lasciano come esercizio i facili adattamenti della dimostrazione). $\square$

Esempi. Lasciamo allo studente di rivedere tutti gli esercizi fatti sui limiti cercando di applicare, quando possibile, la regola di de l'Hôpital per ritrovare i risultati già noti. Vediamo alcuni esempi. **(1)** In $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$ soddisfano alle ipotesi nel caso (1) (il $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin)'(x)}{(x)'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$ esiste e vale 1, e si ha una forma "$\frac{0}{0}$"), e dunque il limite vale 1. **(2)** In $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ la regola si può applicare arrivando a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$, quindi applicare di nuovo arrivando a $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$ come noto. **(3)** In $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ (con $\alpha, \beta > 0$) basta applicare la regola M volte (ove $M = [\beta]$ se $\beta \in \mathbb{N}$, e $M = [\beta] + 1$ se $\beta \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{N}$: in entrambi i casi vale $0 \leq M - \beta = \operatorname{frac}\beta < 1$) per arrivare a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha^M e^{\alpha x}}{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-M+1)x^{\beta-M}} = +\infty$. **(4)** In $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$, applicando tre volte la regola (dopo le prime due si è sempre in forma indeterminata $\frac{0}{0}$) si ottiene $\frac{1}{6}$, come avremmo trovato con gli sviluppi asintotici.

Nel calcolo dei limiti, la regola di de l'Hôpital è indubbiamente comoda perché è di rapida applicazione e non richiede alcuno sforzo concettuale (tranne quello di ricordarsi le regole di derivazione). Tuttavia, è il caso di mettere in guardia da un suo uso "troppo automatico", e questo per vari motivi. (1) Potrebbe capitare che la regola non sia applicabile (se non ne sono soddisfatte le ipotesi). (2) La sua applicazione talvolta potrebbe complicare le cose anziché semplificarle: non va scordato che abbiamo studiato molte maniere di calcolare i limiti, maniere che spesso risultano più convenienti (oltre a dimostrare una ben maggiore padronanza degli strumenti di calcolo da parte di chi le adopera). (3) Soprattutto, si ribadisce che la regola di de l'Hôpital ha delle ipotesi che la rendono applicabile sostanzialmente in presenza di una forma indeterminata, dunque non va assolutamente usata quando il limite è già in forma determinata o quando va discusso al variare di parametri.

Esempi. **(1)** Nel limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3x-\cos x}$ (del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$") non si può applicare la regola di de l'Hôpital, perché il limite delle derivate $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{3-\sin x}$ non esiste; d'altra parte, essendo $\sin x = o_{+\infty}(x)$ e $\cos x = o_{+\infty}(3x) = o_{+\infty}(x)$, si ricava subito che il limite di partenza è uguale a $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$. **(2)** Nel limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x}$ (del tipo "$\frac{0}{0}$") la regola si può applicare, ma porta al limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2x^2}$, più complicato di quello di partenza; in questo caso basta invece usare il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$ per arrivare a $\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{2/t} = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = 0$. **(3)** Il limite $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x+x-1}{\log x}$ è determinato e vale $+\infty$, mentre applicando improvvidamente de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x+1}{1/x} = e+1$. Altro esempio: il limite $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\alpha+\sin x}$ è determinato per ogni $\alpha \neq 0$ (e vale 0), mentre per $\alpha = 0$ come noto esso vale 1: ebbene, se improvvidamente si applica de l'Hôpital al limite originale si ottiene $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$, che non ha nulla a che vedere col precedente tranne quando $\alpha = 0$.

3.3.3 Derivate successive, funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^\infty$

Con le funzioni derivabili abbiamo selezionato, all'interno delle funzioni continue, una famiglia di funzioni "più regolari" delle altre. D'altra parte, l'azione di derivare porta, se non a un peggioramento, certamente non a un miglioramento della regolarità delle funzioni: infatti non è detto che la derivata di una funzione derivabile sia anch'essa derivabile;**(100)** anzi, potrebbe addirittura non essere più continua.**(101)** Tuttavia:

(100) Per esempio, si vede subito che la funzione $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ ha derivata $f'(x) = 2|x|$ (infatti, essendo $f(x) = \pm x^2$ per $x \gtrless 0$ si ricava subito $f'(x) = \pm 2x$ per $x \gtrless 0$, ovvero $f(x) = 2|x|$ per $x \neq 0$, mentre in 0 il rapporto incrementale $\frac{f(\xi)-f(0)}{x\xi-0} = \xi \operatorname{sign}\xi = |\xi|$ tende a 0 e dunque $f'(0) = 0$), ed il modulo è una funzione continua ma non derivabile.

(101) Il classico controesempio è dato dalla funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$, che è derivabile ovunque (per $x \neq 0$ è ovvio con derivata $g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, mentre per $x = 0$ il rapporto incrementale $\frac{g(\xi)-g(0)}{x\xi-0} = \xi\sin\frac{1}{\xi}$ tende a 0, e dunque $g'(0) = 0$) ma g' non è continua in 0 (perché $\lim_{x\to 0} g'(x) = \lim_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$ non esiste).

Proposizione 3.3.9. *Siano A un intervallo, $c \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua in A e derivabile in $A \setminus \{c\}$. Se $\lim_{x \to c} f'(x)$ esiste finito, allora f è derivabile anche in c con valore $f'(c) = \lim_{x \to c} f'(x)$, e la funzione derivata $f' : A \to \mathbb{R}$ è continua in A; se invece tali limite esiste finito a sinistra e a destra ma con valori diversi, oppure se esiste a sinistra o/e a destra ma infinito, allora f non è derivabile in c.*

Dimostrazione. Per la regola di de l'Hôpital si ha $\lim_{x \to c^\mp} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c^\mp} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to c^\mp} f'(x)$, e le conclusioni sono allora chiare. □

Diremo allora che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe $\mathcal{C}^1$* in c se essa è derivabile all'intorno di c con derivata continua in c: come visto, non tutte le funzioni derivabili sono di classe $\mathcal{C}^1$.**(102)** Per una tale funzione ci possiamo chiedere se la derivata, che è continua, sia anch'essa derivabile: diremo allora che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe $\mathcal{C}^2$* in c se è derivabile due volte all'intorno di c con derivata seconda (ovvero, la derivata della derivata) continua in c. **Funzioni di classe $\mathcal{C}^1$**

Esempio. Sia $x(t)$ la funzione che descrive, al variare del tempo t, la posizione x di un punto che si muove sull'asse cartesiano x. Come visto, la funzione derivata prima $x'(t)$ rappresenta la *velocità* (rapidità di variazione della posizione) *istantanea* del punto; analogamente, la funzione derivata seconda $x''(t)$ rappresenta l'*accelerazione* (rapidità di variazione della velocità) *istantanea* del punto.

Continuando allo stesso modo, preso un qualsiasi $k \in \mathbb{N}$ diremo che $f : A \to \mathbb{R}$ è *di classe $\mathcal{C}^k$* in c se essa è derivabile k volte (ovvero, se esistono le derivate $f', f'', \dots, f^{(k-1)}, f^{(k)}$) all'intorno di c e la derivata k-esima è continua in c. Se una funzione f è di classe $\mathcal{C}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si dirà che f è *di classe $\mathcal{C}^\infty$*. **(103)** È d'uso denotare con $\mathcal{C}^k(A)$ l'insieme delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^k$ in ogni punto di A, con $k = 0, 1, \dots, +\infty$, intendendo che $\mathcal{C}^0(A)$ sia semplicemente l'insieme delle funzioni continue in A: è semplice verificare che tutti i $\mathcal{C}^k(A)$ sono sottospazi vettoriali (vedi pag. 42) dello spazio $\mathbb{R}^A$ di tutte le funzioni $f : A \to \mathbb{R}$,**(104)** e abbiamo perciò le inclusioni di regolarità **Funzioni di classe $\mathcal{C}^k$** **Funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$**

$$\mathcal{C}^\infty(A) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^k(A) \subset \mathcal{C}^{k-1}(A) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(A) \subset \mathcal{C}^1(A) \subset \mathcal{C}^0(A) \subset \mathbb{R}^A .$$

Sottolineiamo ancora una volta che lo spazio delle funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ è *strettamente più piccolo* dello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^{k-1}$ tali che la derivata $(k-1)$-esima $f^{(k-1)}$ sia anch'essa derivabile, perché non è detto che la derivata k-esima $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ sia continua.

Proposizione 3.3.10. *Le funzioni elementari* (modulo, polinomi, esponenziale, logaritmo, potenza, trigonometriche, iperboliche) *sono di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il loro dominio tranne le seguenti eccezioni:*

(1) *la potenza x^α in $x = 0$, quando $\alpha > 0$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$* (è solo di classe $\mathcal{C}^{[\alpha]}$)*;*

(102) Tornando agli esempi appena visti $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in 0, mentre $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$ è derivabile ma non di classe $\mathcal{C}^1$ in 0.

(103) In realtà si può chiedere ancora di più: anche se noi non ce ne occuperemo, menzioniamo che c'è una classe di regolarità, delle funzioni dette *analitiche*, ancora più ristretta delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$.

(104) Notiamo infatti che se $f, g : A \to \mathbb{R}$ sono due funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora anche la funzione $\alpha f + \beta g : A \to \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^k$ (risp. $\mathcal{C}^\infty$).

(2) *il modulo* $|x|$ *in* $x = 0$ (è solo continua)*;*

(3) *l'arco-seno* $\arcsin x$ *e l'arco-coseno* $\arccos x$ *in* $x = \mp 1$ (è solo continua)*;*

(4) *il settore-coseno iperbolico* $\mathrm{sett}\cosh x$ *in* $x = 1$ (è solo continua)*.*

Dimostrazione. Discende subito dalla tabella della Figura 3.11. In particolare, per (1), sia $\alpha > 0$ con $\alpha \notin \mathbb{N}$: se $0 < \alpha < 1$ già sappiamo che x^α è solo continua in $x = 0$, mentre se $\alpha > 1$, derivando $[\alpha]$ volte la funzione x^α si ottiene $\alpha \cdot \dots \cdot (\mathrm{frac}(\alpha) + 1)x^{\mathrm{frac}(\alpha)}$ che è continua ma non più derivabile in $x = 0$. $\square$

Esempi. **(1)** $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x$ è di classe $\mathcal{C}^1$ ma non $\mathcal{C}^2$ in $\mathbb{R}$ (è comunque di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti $c \neq 0$). **(2)** $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (se $x \neq 0$) e $g(0) = 0$ è continua (ovvero di classe $\mathcal{C}^0$) e derivabile ma non di classe $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}$. **(3)** Fissato un qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, la funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = 0$ (per $x \leq 0$) e $h(x) = x^\alpha$ (per $x > 0$) è di classe $\mathcal{C}^{[\alpha]-1}$ (se $\alpha \in \mathbb{N}$) o $\mathcal{C}^{[\alpha]}$ (se $\alpha \notin \mathbb{N}$) ma non di classe superiore: infatti, se $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la derivata $(n-1)$-esima esiste ed è continua ma non è derivabile (vale $f^{(n-1)}(x) = 0$ per $x \leq 0$ e$f^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2x$ per $x > 0$), e lo stesso se $\alpha \notin \mathbb{N}$ per la derivata $[\alpha]$-esima (che vale $f^{([\alpha])}(x) = 0$ per $x \leq 0$ e $f^{([\alpha])}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[\alpha]+1)x^{\alpha-[\alpha]}$ per $x > 0$). **(4)** La funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $u(x) = 0$ (per $x \leq 0$) e $u(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ (per $x > 0$) è di classe $\mathcal{C}^\infty$: ad esempio, se $x > 0$ la derivata prima è $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ che tende a 0 quando $x \to 0^+$; la derivata seconda è $f''(x) = -(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-\frac{1}{x}}$ che pure tende a 0 quando $x \to 0^+$; e così via (varrà $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$).

Formula di Taylor La formula di Taylor, già menzionata parlando di confronto locale, fornisce lo sviluppo asintotico nella scala delle potenze intere di una funzione $f(x)$ in un punto $x = c$ in termini delle sue derivate in c (o vicino a c). Nel teorema che segue daremo due versioni di questa formula, in cui il resto viene espresso in due modi diversi: esse sono utili rispettivamente nel calcolo locale (attorno al punto base) e globale (nel dominio di f). Si faccia attenzione alla diversità delle ipotesi nei due casi. Una terza versione della formula di Taylor, con un'espressione del resto in forma integrale, verrà data più avanti parlando di integrazione (Proposizione 3.5.15).

Teorema 3.3.11. *Sia A un intervallo, $c \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^{k-1}$ in A.*

(i) (Formula di Taylor con resto nella forma di Peano) *Si assuma che f sia derivabile k volte in c. Allora*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o_c((x-c)^k) \\ &= f(c) + f'(c)\,(x-c) + \cdots + \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + o_c((x-c)^k). \end{aligned}$$

(ii) (Formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange) *Si assuma che f sia derivabile k volte in $A \setminus \{c\}$. Allora per ogni $x \in A \setminus \{c\}$ esiste qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e c tale che*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{k-1} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-c)^k \\ &= f(c) + f'(c)\,(x-c) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}(x-c)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(x-c)^k\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Poniamo $f_k(x) := \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$ (il polinomio f_k, che dipende ovviamente da c, è detto *polinomio di Taylor* di ordine k di f in c), e notiamo che vale $f_k^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$ per ogni $n = 0, 1, \dots, k$: ovvero, come si usa dire, f e f_k coincidono in c fino all'ordine k. (i) Basterà mostrare che, se $\phi : A \to \mathbb{R}$ è una qualsiasi funzione derivabile k volte in c, si ha $\phi \in o_c((x-c)^k)$ se e solo se $\phi^{(n)}(c) = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots, k$ (poi si concluderà ponendo $\phi = f - f_k$). Iniziamo dalla necessità (il "solo se", o "$\Rightarrow$"), che proveremo per induzione su k. Se $k = 0$ si ha che $\phi \in o_c(1)$, ovvero ϕ è infinitesima in c, ovvero $\phi^{(0)}(c) = \phi(c) = 0$ come voluto. Supponiamo poi che sia $\phi \in o_c((x-c)^k)$ e che valga l'ipotesi induttiva fino a $k-1$, e mostriamo che vale $\phi^{(n)}(c) = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots, k$. Poiché $\phi \in o_c((x-c)^k) \subset o_c((x-c)^{k-1})$, per l'ipotesi induttiva abbiamo $\phi^{(n)}(c) = 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots, k-1$; per il calcolo del limite $\lim_{x \to c} \frac{\phi(x)}{(x-c)^k}$ (che già sappiamo essere nullo) siamo allora autorizzati ad applicare k volte la regola di de l'Hôpital, ottenendo $0 = \lim_{x\to c} \frac{\phi(x)}{(x-c)^k} = \lim_{x\to c} \frac{\phi'(x)}{k(x-c)^{k-1}} = \cdots = \lim_{x\to c} \frac{\phi^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\phi^{(k)}(c)}{k!}$, da cui $\phi^{(k)}(c) = 0$. La sufficienza (il "se", o "$\Leftarrow$") è più facile da mostrare: se $\phi(c) = \phi'(c) = \cdots = \phi^{(k)}(c) = 0$, calcolando $\lim_{x\to c} \frac{\phi(x)}{(x-c)^k}$ si può applicare k volte la regola di de l'Hôpital, arrivando a $\lim_{x\to c} \frac{\phi^{(k)}(x)}{k!} = \frac{\phi^{(k)}(c)}{k!} = 0$, ovvero $\phi \in o_c((x-c)^k)$. (ii) Applicando il teorema degli incrementi finiti di Cauchy (Proposizione 3.3.7(i)) alle funzioni $u(t) = f(t) - f_{k-1}(t)$ e $v(t) = (t-c)^k$ si ha (notando che $u(c) = v(c) = 0$) che esiste qualche ξ_1 interno all'intervallo di estremi x e c tale che $\frac{u(x)}{(x-c)^k} = \frac{u'(\xi_1)}{k(\xi_1-c)^{k-1}}$; applicando ancora ripetutamente il teorema degli incrementi finiti a u' e v', poi a u'' e v'' e così via fino a $u^{(k-1)}$ e $v^{(k-1)}$ (sempre notando che $u^{(j)}(c) = v^{(j)}(c) = 0$ per ogni $j = 0, \dots, k-1$) si trovano via via uno ξ_2 interno all'intervallo di estremi ξ_1 e c, eccetera fino ad uno ξ_k interno all'intervallo di estremi ξ_{k-1} e c tali che $\frac{u'(\xi_1)}{k(\xi-c)^{k-1}} = \frac{u''(\xi_2)}{k(k-1)(\xi_2-c)^{k-2}} = \cdots = \frac{u^{(k-1)}(\xi_{k-1})}{k(k-1)\cdots 2(\xi_{m-1}-c)} = \frac{u^{(k)}(\xi_k)}{k!}$; essendo il primo membro uguale a $\frac{u(x)}{(x-c)^k} = \frac{1}{(x-c)^k}\big(f(x) - f_{k-1}(x)\big)$ e l'ultimo a $\frac{f^{(k)}(\xi_k)}{k!}$, si ottiene esattamente quanto si voleva con $\xi = \xi_k$. $\Box$

Pertanto, data una funzione $f(x)$ derivabile k volte in c, la formula di Taylor esibisce la funzione polinomiale $f_k(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c) + \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)\,(x-c)^k$ di grado k che meglio (a meno di un errore infinitesimo di ordine superiore) approssima $f(x)$ all'intorno di c, e il grafico di $f_k(x)$ è la curva di grado k che meglio approssima il grafico di $f(x)$ vicino a c. Ad esempio, per $k = 0$ si ottiene $f_0(x) = f(c)$ (la costante che meglio approssima f vicino a c); per $k = 1$ si ha $f_1(x) = f(c) + f'(c)\,(x-c)$ (la funzione lineare approssimante f vicino a c, il cui grafico è la retta tangente al grafico di f in c); per $k = 2$ si ha $f_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)\,(x-c)^2$ (la funzione quadratica approssimante f vicino a c, il cui grafico è la parabola "osculatrice"**(105)** al grafico di f in c), poi la cubica, e così via.

Gli sviluppi asintotici in $c = 0$ di pag. 115 seguono immediatamente dalla formula di Taylor col resto nella forma di Peano.

Esempi. **(1)** Scriviamo lo sviluppo asintotico di $f(x) = \log(x+2)$ in $c = 1$ fino all'ordine $k = 3$. Si ha $f'(x) = \frac{1}{x+2}$, $f''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ e $f'''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$, da cui lo sviluppo con resto di Peano è $f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{6}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$ ovvero $\log(x+2) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{81}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3)$, mentre lo sviluppo con resto di Lagrange è $\log(x+2) = \log 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{18}(x-1)^2 + \frac{1}{3(\xi+2)^3}(x-1)^3$ per qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e 1. **(2)** Scriviamo lo sviluppo asintotico di $g(x) = e^x$ in $c = -3$ fino all'ordine $k = 2$. Si ha $g'(x) = g''(x) = e^x$, da cui lo sviluppo con resto di Peano è $g(x) = g(-3) + g'(-3)(x+3) + \frac{g''(-3)}{2}(x+3)^2 + o_1((x+3)^2)$ ovvero $e^x = e^{-3}(1 + (x+3) + \frac{1}{2}(x+3)^2) + o_1((x+3)^2)$, mentre lo sviluppo con resto di Lagrange è

(105) dal latino *osculare* (baciare).

$e^x = e^{-3}(1+(x+3)) + \frac{e^\xi}{2}(x+3)^2$ per qualche ξ interno all'intervallo di estremi x e -3.

Il preannunciato (a pag. 132) utile criterio per stabilire la natura di un punto stazionario di funzioni derivabili più volte è il seguente.

Proposizione 3.3.12. *Siano $A \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile k volte* (con $k \geq 2$) *e $c \in A$ un punto stazionario per f* (ovvero $f'(c) = 0$)*.*

(1) *Se c è un punto di minimo* (risp. massimo) *locale per f, allora $f''(c) \geq 0$* (risp. ≤ 0).

(2) *Viceversa, si supponga che $f'(c) = \cdots = f^{(k-1)}(c) = 0$ e $f^{(k)}(c) \neq 0$. Allora:*

  (i) *se k è pari e $f^{(k)}(c) > 0$* (risp. $f^{(k)}(c) < 0$) *allora c è un punto di minimo* (risp. massimo) *locale stretto per f;*

  (ii) *se k è dispari allora c non è un estremante locale per f.*

Dimostrazione. Il punto (1) segue subito da (2): infatti dire che $f''(c) \ngeq 0$ equivale a dire che $f''(c) < 0$, e in tal caso per (2) c sarebbe un punto di massimo locale stretto per f, il che renderebbe impossibile per c essere un punto di minimo locale per f. Possiamo dunque concentrarci sul provare (2). Dalla formula di Taylor (Teorema 3.3.11) si ricava che $f(x) - f(c) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + o_c((x-c)^k)$: essendo $f^{(k)}(c) \neq 0$, dal teorema della permanenza del segno discende che esiste un intorno U di c in cui il segno di $f(x) - f(c)$ coincide con quello del polinomio $p(x) = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$ (infatti da $\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^k} = f^{(k)}(c) + \frac{o_c((x-c)^k)}{(x-c)^k}$ si ricava $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^k} = f^{(k)}(c) \neq 0$, dunque esiste un intorno di c in cui $\frac{f(x)-f(c)}{(x-c)^k}$ ha il segno di $f^{(k)}(c)$, ovvero in cui $f(x) - f(c)$ ha il segno di $f^{(k)}(c)(x-c)^k$); inoltre, a meno di restringere tale intorno, si può supporre che in U l'unico zero di $p(x)$ sia c. Se k è pari allora per ogni $x \in U \setminus \{c\}$ vale $f(x) - f(c) = p(x) \gtrless 0$ a seconda che $f^{(k)}(c) \gtrless 0$, da cui l'affermazione (i). Se invece k è dispari e $f^{(k)}(c) > 0$ (risp. $f^{(k)}(c) < 0$) allora si ha $f(x) - f(c) = p(x) > 0$ se $x > c$ (risp. se $x < c$) e $f(x) - f(c) = p(x) < 0$ se $x < c$ (risp. se $x > c$), da cui (ii). $\square$

Esempi. **(1)** Sia $f(x) = x^k$: si ha $f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0$ e $f^{(k)}(0) = k! > 0$. Per la Proposizione 3.3.12, 0 è un punto di minimo locale stretto se k è pari, e non è un estremante locale se k è dispari (già si sapeva). **(2)** Sia $f(x) = 3(x + \sin x \cos x) - 4\cos^3 x$. Si ha $f'(x) = 3 + 3\cos 2x + 12 \sin x \cos^2 x = 6\cos^2 x(1 + 2\sin x)$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$). Si ha $f''(x) = 2\cos x(1 - \sin x - 3\sin^2 x)$; essendo $f''(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0$ e $f''(\frac{7\pi}{6} + 2k\pi) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$, possiamo dire che i punti $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (risp. $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$) sono di minimo (risp. massimo) locale stretto; invece $f''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, dunque ancora non si può dire nulla sulla natura di tali punti stazionari. Un ulteriore conto dà $f'''(x) = 2(3\sin^3 x + 8\sin^2 x - 7\sin x - 1)$, ed essendo $f'''(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 6 \neq 0$ e $f'''(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi) = 22 \neq 0$, concludiamo che i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ non sono estremanti locali.

Serie di Taylor e funzioni analitiche Sia A un intervallo, $c \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in A. La *serie di Taylor di f di punto iniziale c* è la serie numerica **Serie di Taylor**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad = \quad f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots$$

(Quando il punto iniziale è $c = 0$, la serie è detta *di McLaurin.*) Dalla formula di Taylor con resto di Peano (Teorema 3.3.11(i)) sappiamo che per la ridotta k-esima della serie di

Taylor si ha $f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o_c((x-c)^k)$; tuttavia, non è chiaro né per quali $x \in A$ converga tale serie (oltre, naturalmente, a $x = c$, in cui la somma è $f(c)$) né se, per un x in cui la serie converge, la somma coincida effettivamente con $f(x)$ o no.

Esempio. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$ (se $x \neq 0$) e $f(x) = 0$ (se $x \leq 0$) è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (la funzione è pari, ed il limite per $x \to 0$ delle derivate di ogni ordine in $x \neq 0$ è sempre nullo: se $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$, $f''(x) = (-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})e^{-\frac{1}{x}}$, ..., con $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f''(x) = \cdots = 0$). Essendo $f^{(n)}(0) = 0$ per ogni $n \geq 0$, la serie di Taylor di f centrata in 0 è identicamente nulla, mentre la funzione $f(x)$ è nulla solo per $x = 0$. In questo caso, dunque, la serie di Taylor di f centrata in $c = 0$ converge banalmente per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma essa non ha nulla a che vedere col valore della funzione nei punti $x \neq c$.

Funzione analitica

La funzione f si dirà *analitica* (o *sviluppabile in serie di Taylor*, o *di classe* $\mathcal{C}^\omega$) nel punto c se esiste un $\delta > 0$ tale che la serie di Taylor di f centrata in c converga ad $f(x)$ per ogni $x \in B_c(\delta)$ (ovvero tale che $|x - c| < \delta$); il $\sup_{\widetilde{\mathbb{R}}}$ di tali $\delta > 0$ si dirà allora *raggio di convergenza* della serie di Taylor di f centrata in c. Come visto nell'esempio precedente, vi sono delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ che non sono analitiche; tuttavia, la gran parte delle funzioni costruite a partire da funzioni elementari sono analitiche (ciò che varia sensibilmente è piuttosto il raggio di convergenza, che dipende dalla funzione f considerata e dal punto c attorno al quale si sta sviluppando). Citiamo, senza dimostrazione, il seguente criterio, che mostra l'analiticità delle funzioni elementari (potenze, esponenziale, logaritmo, seno, coseno, tangente, arcotangente,...) in ogni punto del loro dominio di derivabilità.

Proposizione 3.3.13. (Condizione sufficiente per l'analiticità) *Sia A un intervallo, $c \in A$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^\infty$ in A. Se esistono $L > 0$ e $\delta > 0$ tali che $|f^{(k)}(x)| \leq L^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in A$ tale che $|x - c| < \delta$, allora f è analitica in c* (con raggio di convergenza $\geq \delta$).

3.4 Studio dell'andamento di una funzione

Abbiamo ormai sviluppato gli strumenti necessari per studiare le funzioni reali di una variabile reale $f : A_f \to \mathbb{R}$ (ove $A_f \subset \mathbb{R}$ rappresenta il *dominio naturale* di f, vedi pag. 87) in modo dettagliato, con lo scopo finale di tracciarne il grafico

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A_f,\, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Diamo subito uno schema di massima dei punti da determinare in questo studio:

(1) dominio naturale A_f;
(2) eventuali periodicità di f;
(3) eventuali parità di f;
(4) continuità di f;
(5) limiti interessanti di f;
(6) limitatezza di f;
(7) intersezioni del grafico Γ_f con gli assi coordinati;
(8) segno di f;
(9) asintoti di f, e loro eventuali intersezioni col grafico Γ_f;
(10) derivabilità di f, e calcolo di f';
(11) punti stazionari di f;
(12) crescenza di f;
(13) estremanti locali di f;
(14) derivabilità ulteriore di f, e calcolo di f'';
(15) punti stazionari di f';
(16) convessità di f;
(17) punti di flesso di f, e calcolo della "tangente inflessionale";
(18) descrizione della regolarità di f.

Molti di questi punti sono già chiari, altri meno, altri ancora no: in ogni caso, li trattiamo uno ad uno nel seguito.

(1) Il dominio naturale A_f della funzione può essere esplicitamente assegnato nel caso in cui f è definita punto per punto, oppure, se f è descritta solo tramite la sua espressione algebrica, esso è per definizione il più grande sottoinsieme di f in tutti i punti del quale tale espressione ha senso (vedi pag. 87).

Esempio. Se si definisce $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^4-3} & (\text{se } x < -2) \\ \sin x & (\text{se } -2 \le x < 1) \\ \sqrt{x^4-3} & (\text{se } 0 \le x \le \frac{3}{2}) \\ \sqrt{6} & (\text{se } x = 3) \end{cases}$ è già stabilito che sia $A_f = \mathbb{R}_{<1} \cup [0, \frac{3}{2}] \cup \{3\}$, mentre se si dà solo l'espressione $g(x) = \frac{\sqrt{1+\log x}}{x^2-5}$ si intende che A_g sia definito dal sistema $\begin{cases} 1+\log x \geq 0 \\ x > 0 \\ x^2-5 \neq 0 \end{cases}$, ovvero $A_g = \mathbb{R}_{\geq \frac{1}{e}} \setminus \{\sqrt{5}\}$.

(2) Si tratta di vedere se f è una funzione periodica (vedi pag. 89). In tal caso, denotato con $\tau_f > 0$ il periodo di f, basterà studiare f in un tratto di A_f ottenuto intersecando A_f con un intervallo chiuso di lunghezza τ_f.

Esempio. $f(x) = \log(2\sin^2 x - 1)$ ha dominio naturale $A_f = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| > \frac{1}{2}\}$, ovvero $A_f = \{x \in \mathbb{R} : |\sin x| > \frac{1}{2}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi[$; tuttavia, essendo periodica di periodo $\tau_f = \pi$, si può studiarla in un qualsiasi tratto ottenuto intersecando A_f con un intervallo chiuso lungo π, ad esempio in $A_f \cap [0,\pi] =]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

(3) Si tratta di vedere se f è una funzione pari oppure dispari (vedi pag. 89). In tal caso, basterà studiare la funzione in $A_f \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(4) Vanno determinati i punti di A_f in cui f è continua.

(5) Vanno calcolati i limiti di f nei punti di accumulazione di A_f in $\widetilde{\mathbb{R}}$ che non stanno in A_f, e in tutti i punti di A_f in cui f è discontinua. Se tali punti stanno in $\mathbb{R}$ (cioè, se sono diversi da $\pm\infty$), bisogna aver cura di considerare distintamente i limiti a destra ed a sinistra, perché essi possono essere diversi.

Esempio. Per la funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} e^{\frac{1}{x}}$, in cui si ha $A_f = (\mathbb{R}_{<1}) \setminus \{0\}$, i limiti interessanti sono in $-\infty$, 0^-, 0^+ e 1^- (e valgono rispettivamente $-\infty$, 0^-, $+\infty$ e $+\infty$).

(6) Le intersezioni del grafico Γ_f con l'asse x sono date dalle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ in A_f, ovvero sono i punti $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in A_f,\ f(x) = 0\}$; se 0 sta nel dominio A_f, l'asse y e Γ_f si intersecano ovviamente nell'unico punto $(0, f(0))$.

(7) Si tratta di determinare i tratti del dominio A_f in cui la funzione è positiva o negativa, ovvero $A_f^{\pm} = \{x \in A_f : f(x) \gtrless 0\}$. Si noti che ciò permette una verifica incrociata con il calcolo dei limiti interessanti, in cui capita a volte di azzeccare che si tratta di un infinito, finito o infinitesimo ma di sbagliare il segno.

Esempio. Se $f(x) = (x-3)e^{-\frac{1}{x}}$, essendo $A_f^+ = \mathbb{R}_{>3}$ e $A_f^- = (\mathbb{R}_{<3}) \setminus \{0\}$ si è certi che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(8) La funzione è *(superiormente/inferiormente) limitata* se tale è la sua immagine. Dunque, ad esempio, f è limitata se esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni x nel dominio A_f; naturalmente, ciò non è vero se uno dei limiti interessanti è ∞.

Esempio. Se $f(x) = \sin g(x)$ oppure $f(x) = \frac{1}{1+g(x)^2}$ allora certamente vale $|f(x)| \leq 1$ per ogni x nel dominio $A_f = A_g$; se $f(x) = \operatorname{arctg}^2 g(x)$ allora $|f(x)| \leq (\frac{\pi}{2})^2 = \frac{\pi^2}{4}$ per ogni $x \in A_f = A_g$; se

$f(x) = \sqrt{4 - g(x)^2}$ allora $|f(x)| \le 2$ (anzi, in questo caso, $0 \le f(x) \le 2$) per ogni $x \in A_f = \{x \in A_g : 4 - g(x)^2 \ge 0\} = \{x \in A_g : |g(x)| \le 2\}$.

(9) Nell'uso comune, sono detti *asintoti* di $f(x)$ le curve del piano "alle quali il grafico tende indefinitamente" quando la variabile x tende a uno degli infiniti. La definizione precisa e generale è però la seguente: una funzione $\widetilde{f}$ definita in un intorno di $c \in \widetilde{\mathbb{R}}$ è un *asintoto per f in c* se $f - \widetilde{f} = o_c(1)$, ovvero se $f - \widetilde{f}$ è infinitesima in c. Si noti che questa nozione (che è evidentemente una relazione di equivalenza) è distinta da quella di "asintoticità": se ad esempio $f(x) = x$ e $\widetilde{f}(x) = x + 1$ le funzioni f e $\widetilde{f}$ sono asintotiche a $+\infty$ ma f non è asintoto per $\widetilde{f}$ (il resto $\widetilde{f} - f = 1$ è $o_{+\infty}(f)$ ma non è infinitesimo); se invece $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $\beta(x) = \frac{x+1}{x^2}$, f è asintoto per $\widetilde{f}$ ma f e $\widetilde{f}$ non sono asintotiche (il resto $\widetilde{f} - f = \frac{1}{x}$ è infinitesimo ma non è $o_{+\infty}(f)$, anzi vale il contrario). **Asintoto**

Determinare un asintoto per f diciamo a $+\infty$ può essere utile per meglio comprendere l'andamento di $f(x)$ quando x tende verso $+\infty$, e dunque per tracciare il grafico con maggiore accuratezza. Gli asintoti più importanti sono ovviamente, per la loro semplicità, le funzioni polinomiali $\widetilde{f}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ (di grado n se $a_n \neq 0$), e dunque in particolare le costanti $\widetilde{f}(x) \equiv k$, le lineari $\widetilde{f}(x) = mx + q$, le quadratiche $\widetilde{f}(x) = ax^2 + bx + c$ (i cui grafici, come sappiamo, sono rispettivamente una retta non parallela all'asse y ed una parabola con asse parallelo all'asse y), le cubiche, le quartiche e così via. Come capire se e quando una di queste funzioni può essere un asintoto per f? Vediamo ad esempio per le rette.

Proposizione 3.4.1. *$y = mx + q$ (con $m, q \in \mathbb{R}$) è asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni:*

- (c_0) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ *esiste finito e vale m;*
- (c_1) $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$ *esiste finito e vale q.*

Dimostrazione. Per definizione $y = mx + q$ è asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se $f(x) = mx + q + o_{\pm\infty}(1)$ da cui $\frac{f(x)}{x} = m + \frac{q}{x} + o_{\pm\infty}(\frac{1}{x})$, da cui $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$; essendo poi $q = f(x) - mx + o_{+\infty}(1)$, passando al limite si ricava $q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx)$. Viceversa, da $\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = q$ si ricava subito $\lim_{x \to \pm\infty} \big(f(x) - (mx + q)\big) = 0$. $\square$

Se $y = mx + q$ è asintoto per f e $m = 0$ (ovvero se si ha una retta della forma $y = k$, parallela all'asse x) ciò equivale a chiedere che sia $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = k$ e si dirà che la retta $y = k$ è un "asintoto orizzontale a $\pm\infty$"; se invece $m \neq 0$, è d'uso dire che $y = mx + q$ è un "asintoto obliquo" per f a $\pm\infty$. Osserviamo che, nell'importante caso in cui f sia una funzione razionale fratta (ovvero $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomi, di grado diciamo rispettivamente $r, s \ge 0$), il caso tipico in cui f ammette asintoto orizzontale è quando $r = s$, ed il caso tipico in cui f ammette asintoto obliquo è quando $r = s + 1$.
Inoltre, se $c \in \mathbb{R}$ è un punto di accumulazione per A_f tale che $\lim_{x \to c^-} f(x) = \infty$ (risp. tale che $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$) è d'uso anche dire che la retta $x = c$ è un "asintoto verticale sinistro" (risp. "destro") per f, e che è un "asintoto verticale bilatero" se è asintoto verticale sia sinistro che destro.

Una volta compreso il caso delle rette, anche per i polinomi di grado superiore il problema

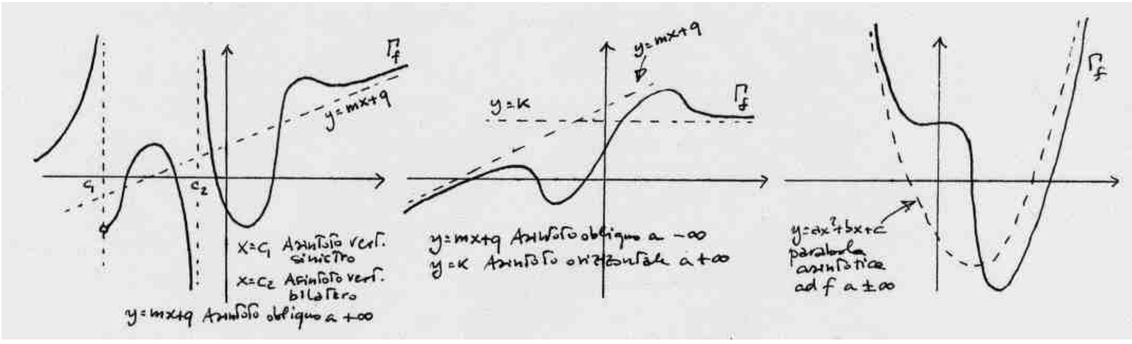

Figura 3.14: Asintoti lineari e quadratici.

diventa più comprensibile, e la funzione $\widetilde{f}(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ sarà asintoto per f a $\pm\infty$ se e solo se valgono le seguenti $n+1$ condizioni:

(c_n) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^n}$ esiste finito e vale a_n;

(c_{n-1}) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-a_n x^n}{x^{n-1}}$ esiste finito e vale a_{n-1};

$\vdots$

(c_1) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-a_n x^n-\cdots-a_2 x^2}{x}$ esiste finito e vale a_1;

(c_0) $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - a_n x^n - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x)$ esiste finito e vale a_0.

Nella pratica, spesso si intendono e ricercano come "asintoti" solo le rette, accorgendosi occasionalmente di qualche asintoto polinomiale di grado superiore (ad esempio, tornando al caso della funzione razionale fratta $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q di grado rispettivamente $r, s \geq 0$, il caso tipico in cui f ammette come asintoto una funzione polinomiale di grado n è quando $r = s + n$). Si ponga attenzione al fatto che, come detto, la ricerca degli asintoti a $-\infty$ e a $+\infty$ deve essere *indipendente*.

Esempio. La funzione $f(x) = e^x - \frac{x}{x-1}$ ha asintoto orizzontale $y = -1$ a $-\infty$ e non ammette asintoti a $+\infty$; la funzione $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ tende a 0^+ quando $x \to +\infty$ (e dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$) mentre $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = -2$ e $\lim_{x\to-\infty}\big(g(x) - (-2)x\big) = 0$, e perciò $y = -2x$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Infine, osserviamo che per gli asintoti (che diventano significativi solo verso $-\infty$ e/oppure verso $+\infty$) può essere utile calcolare le eventuali intersezioni del grafico di f con quello dell'asintoto $\widetilde{f}$, ovvero risolvere il sistema tra l'equazione dell'asintoto $y = \widetilde{f}(x)$ e quella della funzione $y = f(x)$.

(10) Si determinano i punti di A_f in cui f è derivabile (eventualmente solo a sinistra o solo a destra).

(11) I punti stazionari di f sono, per definizione, i punti di A_f in cui la derivata esiste (bilatera: dunque in particolare devono essere punti interni di A_f) ed è nulla: ovvero, sono le soluzioni di $f'(x) = 0$ nell'interno di A_f. Come si è visto, gli estremanti locali in cui f

è derivabile si trovano tra questi punti, ma non è detto che un punto stazionario sia un estremante locale per f: esso potrebbe essere semplicemente un punto in cui la tangente al grafico ha pendenza nulla. Serve dunque determinare la natura dei punti stazionari di f, e ciò si fa solitamente nel passo che segue, in cui si studia la crescenza di f.

(12)-(13) Si vogliono determinare le "zone del dominio" in cui f è (strettamente) crescente oppure decrescente: a tal fine useremo correntemente la Proposizione 3.3.6 e tutti i punti della Proposizione 3.3.7, che invitiamo ad andare a rileggere con attenzione. Si tratta, nei casi più comuni in cui le funzioni sono derivabili dappertutto o quasi, di studiare il segno di f', ovvero la disequazione $f'(x) > 0$, ed applicare tali risultati: ciò permette anche, nella grande maggioranza dei casi, di determinare la natura dei punti stazionari.

Esempio. Se $f(x) = x^2$, si ha $f'(x) = 2x$ e dunque l'unico punto stazionario è $x_0 = 0$. La disequazione $f'(x) > 0$ è soddisfatta se e solo se $x > 0$, dunque per la Proposizione 3.3.7 f è strettamente decrescente (risp. strettamente crescente) se e solo se $x < 0$ (risp. per $x > 0$), e per la Proposizione 3.3.6 ciò mostra che il punto stazionario $x_0 = 0$ è un punto di minimo locale stretto, come ovviamente già sapevamo (è anche un minimo globale stretto). Se invece $g(x) = x^3$, poiché $g'(x) = 3x^2$ l'unico punto stazionario è ancora $x_0 = 0$, ma qui la disequazione $g'(x) > 0$ è soddisfatta per ogni $x \neq 0$, e dunque per la Proposizione 3.3.7(iv) f è strettamente crescente in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$: pertanto $x_0 = 0$, non può essere né massimo né minimo locale.

(14) Se f è derivabile due volte, come vedremo anche la derivata seconda f'', in quanto derivata della derivata (e dunque, in quanto "studio della variazione della pendenza") dà interessanti informazioni sull'andamento di f. È dunque il caso di determinare i punti di A_f in cui f è derivabile due volte, calcolare tale derivata.

(15) I punti stazionari di f' sono i punti di derivabilità di f' in cui $f'' = (f')'$ esiste ed è nulla: ovvero, le soluzioni di $f''(x) = 0$. Si tratta dei punti in cui "l'andamento della pendenza della funzione diventa stazionario". Che cosa significa? Si tratta della nozione di *convessità*, che andiamo ad introdurre qui sotto.

(16) Un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^n$ è detto "convesso" se per ogni coppia di punti di D il segmento che li unisce è tutto contenuto in D, ovvero per ogni $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in D$ vale $[\underline{x}_0, \underline{x}_1] = \{\underline{x}_0 + t(\underline{x}_1 - \underline{x}_0) : t \in [0,1]\} \subset D$. Se $A \subset A_f$ è un intervallo, si dice che f è *convessa* in A se il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ "sopragrafico di f" dato da $\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ è convesso in $\mathbb{R}^2$: ora, poiché la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ è data da $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, chiaramente la convessità di f in A equivale al richiedere che per ogni $a, b \in A$ con $a < b$ valga $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ per ogni $x \in]a,b[$. Se tale disuguaglianza è stretta (ovvero, se per ogni $a, b \in A$ con $a < b$ vale $f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ per ogni $x \in]a,b[$) si dirà che f è *strettamente convessa* in A. Diciamo anche che, reciprocamente, f è detta *concava* o *strettamente concava* in A se valgono le disuguanze opposte.
Non è difficile osservare che "convessità" e "concavità" significano rispettivamente "pendenza crescente" e "pendenza decrescente": dunque appare naturale la seguente

Proposizione 3.4.2. *Sia $A \subset A_f$ un intervallo* aperto *su cui f sia derivabile. Allora f è convessa* (risp. strettamente convessa) *in A se e solo se f' è crescente* (risp. strettamente crescente) *in A.*

In particolare, se esiste $f'' = (f')'$ in A, allora f è convessa (risp. strettamente convessa) *in A se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$* (risp. $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in A$ ed il sottoinsieme $\{x \in A : f''(x) = 0\}$ di A è privo di punti interni)*,*

Enunciati analoghi valgono sostituendo "f convessa", "f' crescente" *e* "$f'' \geq 0$" *rispettivamente con* "f concava", "f' decrescente" *e* "$f'' \leq 0$".

Dimostrazione. (Necessità) Per $a, b \in A$ con $a < b$ consideriamo la "funzione di convessità" $g_{a,b} : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da $g_{a,b}(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\Big)$ (dunque si ha $g_{a,b} \gtrless 0$ a seconda che f sia concava o convessa; si noti che $g_{a,b}(a) = g_{a,b}(b) = 0$). Supponiamo f convessa, ovvero $g_{a,b}(x) \leq 0$ per ogni a, b ed $a < x < b$, e proviamo che $f'(a) \leq f'(b)$. Iniziamo col notare che deve essere $g'_{a,b}(a) \leq 0$ (infatti, essendo $g_{a,b}(a) = 0$ e $g_{a,b}(x) \leq 0$, si ha che il rapporto incrementale $\frac{g_{a,b}(x)-g_{a,b}(a)}{x-a}$ è ≤ 0 all'intorno destro di a, e dunque tale resta anche il suo limite per il teorema del confronto): ma, essendo $g'_{a,b}(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, cioè significa che $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. In modo simile si prova che $g'_{a,b}(b) \geq 0$, ovvero $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$: ma allora $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$, da cui $f'(a) \leq f'(b)$ come richiesto. Se f' fosse crescente ma non strettamente, esisterebbero a, b tali che $g'_{a,b} \equiv 0$ e dunque tali che $g_{a,b}$ è costante, e ciò direbbe che f è convessa ma non strettamente. • (Sufficienza) Supponiamo ora che valga $f'(a) \leq f'(b)$ per ogni a, b con $a < b$, e proviamo che f è convessa. Presi dunque a, b con $a < b$, notiamo subito che, essendo f' crescente, anche $g'_{a,b} = f' - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è crescente; inoltre, poiché $g_{a,b}(a) = g_{a,b}(b) = 0$, per il Teorema di Rolle esiste $c \in]a, b[$ tale che $g'_{a,b}(c) = 0$, e dunque $g'_{a,b}(x) \leq 0$ per $x \in]a, c]$ e $g'_{a,b}(x) \geq 0$ per $x \in [c, b[$, ovvero $g_{a,b}$ è decrescente in $]a, c]$ e crescente in $[c, b[$. Ma allora $0 = g_{a,b}(a) \geq g_{a,b}(x)$ per $x \in]a, c]$ e $g_{a,b}(x) \leq g_{a,b}(b) = 0$ per $x \in [c, b[$, ovvero $g_{a,b}(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, che è quanto si voleva. Se inoltre f' è strettamente crescente, le precedenti disuguaglianze sono strette e dunque f è strettamente convessa. • Le affermazioni fatte nel caso in cui esista $f'' = (f')'$ in A discendono allora subito dalla Proposizione 3.3.7(iv). Per la concavità i ragionamenti sono gli stessi. $\square$

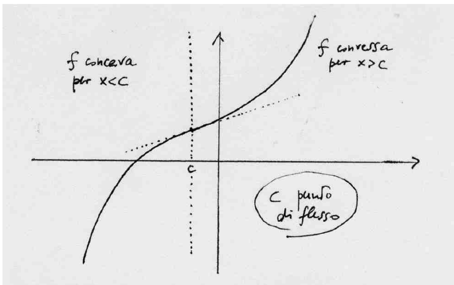

Figura 3.15: Convessità e flessi.

(17) Un punto $c \in A_f$ interno ad A_f si dirà *flesso* se f "cambia la convessità in c", ovvero se esiste $\delta > 0$ tale che f è convessa in $B_c^-(\delta) = [c - \delta, c]$ e concava in $B_c^+(\delta) = [c, c + \delta]$, o viceversa. I punti in cui f è derivabile due volte si trovano tra i punti stazionari di f' (perché, da quanto si è detto, deve essere $f''_-(c) \geq 0$ e $f''_+(c) \leq 0$ o viceversa). Una volta appurato che un punto c è un flesso per f, ai fini di un disegno accurato del grafico Γ_f può essere interessante determinare la retta tangente al grafico in $(c, f(c))$ (ovvero

$y = f(c) + f'(c)(x - c))$, detta *tangente inflessionale*. Tornando per un attimo ai punti stazionari di f (cioè, tali che $f'(x) = 0$), è abbastanza chiaro che se essi non sono estremanti locali, essi saranno assai probabilmente dei flessi (detti magari "orizzontali" per distinguerli dagli altri, detti "obliqui"), anche se ciò non è sempre vero.

Esempio. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2 \operatorname{sign} x \sin^2 \frac{1}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ è continua (perché $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$) e anzi derivabile (infatti, controllando in 0, vale $\lim_{\xi\to 0} \frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0} = \lim_{\xi\to 0} |\xi| \sin^2 \frac{1}{\xi} = 0$ e dunque $f'(0) = 0$) anche se non di classe $\mathcal{C}^1$ (infatti $\lim_{x\to 0} f'(x)$ non esiste); il punto 0 è stazionario ma non è un estremante (perché $f(0) = 0$, $f(x) \leq 0$ per $x < 0$ e $f(x) \geq 0$ per $x > 0$), ma non è neppure un flesso (perché in ogni intorno a sinistra e a destra di 0 la convessità continua a cambiare).

(18) Si tratta di determinare la classe di regolarità globale di f, ed eventualmente le zone del dominio in cui la regolarità è migliore.

Esempio. $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & (\text{se } x < 1) \\ -\frac{1}{\pi}\sin(\pi x) & (\text{se } x \geq 1) \end{cases}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ (infatti nel punto 1 essa è derivabile perché $f'_-(1) = 1 = f'_+(1)$ e la funzione derivata $f'(x) = 2x - 1$ (per $x < 1$), $f'(1) = 1$ e $f'(x) = -\cos(\pi x)$ (per $x > 1$) è continua ma non è derivabile in 1 perché $f''_-(1) = 2$ mentre $f''_+(1) = 0$), mentre su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ essa è chiaramente di classe $\mathcal{C}^\infty$.

Se si vuole, si può anticipare alcune di queste valutazioni di regolarità già al momento di parlare di continuità: ad esempio, nel caso in questione si poteva affermare senza dubbio già da subito che la funzione f era di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, mentre per il comportamento in 1 bisognava attendere di aver calcolato le derivate sinistra e destra.

Prima di dare diversi esempi di studio dell'andamento di una funzione, sarà il caso di prepararsi nella mente i grafici delle funzioni più semplici. Daremo dunque per scontato che si sappiano tracciare e pensare senza difficoltà:

- I grafici delle funzioni elementari, ovvero delle potenze x^α, dell'esponenziale a^x, del logaritmo $\log_a x$, delle funzioni goniometriche $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ e delle loro inverse $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ e $\operatorname{arccotg} x$, delle funzioni iperboliche $\sinh x$ e $\cosh x$, del modulo $|x|$ e del modulo delle funzioni elementari, e delle traslate verticali delle funzioni elementari, cioè del tipo $f(x) + k$ con k costante reale.[106]

- I grafici delle suddette funzioni, in cui la variabile x sia traslata (eventualmente col modulo). Si veda anche a pag. 90.

  Esempio. La funzione $\frac{1}{\sqrt{x+3}} = (x+3)^{-\frac{1}{2}}$, definita per $x \geq -3$, ha come grafico quello di $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ traslato "a destra di -3", ovvero a sinistra di 3; mentre $\log|x - 1|$ è definita per $x \neq 1$, ed il suo grafico è quello di $\log x$ prima traslato a destra di 1 e poi simmetrizzato rispetto alla retta $x = 1$.

- I grafici delle funzioni lineari $y = mx + q$ e quadratiche $y = ax^2 + bx + c$, che sono rispettivamente rette e parabole.

[106] Ovviamente, il grafico del modulo di una funzione $f(x)$ si ottiene dal grafico originale di f riflettendo rispetto all'asse x quelle parti di grafico che si trovano al di sotto dell'asse; ed il grafico della funzione $f(x) + k$ è quello di f traslato verticalmente di k.

- I grafici delle funzioni "omografiche" del tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$: si tratta, come si vede subito, di iperboli con asintoti le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$.

Esercizio. *Studiare l'andamento e tracciare il grafico delle seguenti funzioni:*

$$(\mathbf{1})\ f(x) = \frac{x^2}{x-1}; \quad (\mathbf{2})\ f(x) = \frac{x^3}{x+1}; \quad (\mathbf{3})\ f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x; \quad (\mathbf{4})\ f(x) = \log|x-1| + \sqrt{|x|}$$

$$(\mathbf{5})\ f(x) = \begin{cases} x^2+5x+6 & (\text{se } x < -1) \\ -x+1 & (\text{se } -1 < x < 0) \\ \sqrt{3+2x-x^2} & (\text{se } 0 \leq x \leq 3) \\ 0 & (\text{se } 3 < x < 5) \end{cases}; \qquad (\mathbf{6})\ f(x) = \sqrt{x^2-x}; \qquad (\mathbf{7})\ f(x) = x\log\frac{2x}{x-1};$$

$$(\mathbf{8})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-\sqrt{3}}{x-3}; \quad (\mathbf{9})\ f(x) = \log(1-\operatorname{tg} x); \quad (\mathbf{10})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\log|x-2|}{x}; \quad (\mathbf{11})\ f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|};$$

$$(\mathbf{12})\ f(x) = \operatorname{arctg}\frac{|x|}{x+2}+\frac{x}{2}; \quad (\mathbf{13})\ f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}; \quad (\mathbf{14})\ f(x) = \log\left(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\right); \quad (\mathbf{15})\ f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}.$$

Risoluzione. Per ogni funzione seguiremo lo schema proposto all'inizio del presente paragrafo (dominio naturale, eventuale periodicità,...).

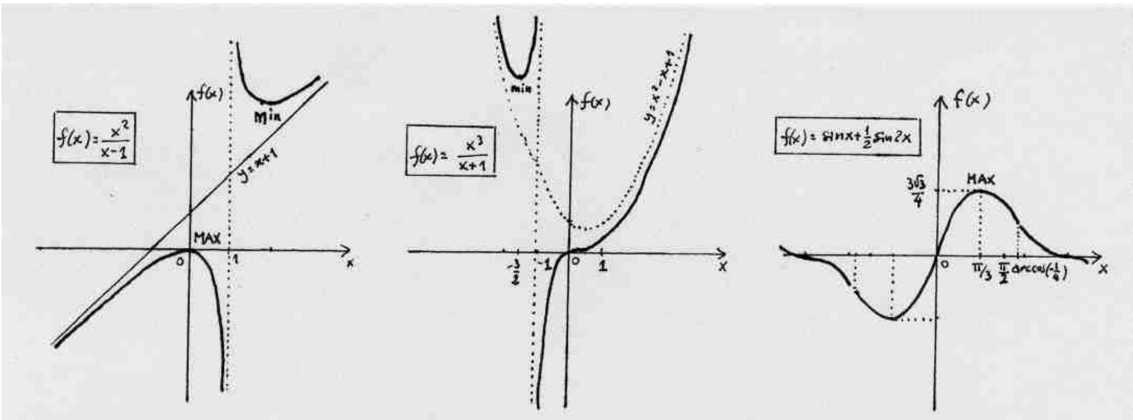

Figura 3.16: Grafico di **(1)** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, **(2)** $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, **(3)** $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

(1) $[f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, vedi Figura 3.16(a)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; la funzione non ha periodicità e parità (infatti $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)-1} = -\frac{x^2}{x+1}$ in generale è diversa sia da $f(x)$ che da $-f(x)$); essa è continua in tutto il dominio (perché ottenuta tramite operazioni e/o composizione da funzioni continue, cosa che non ripeteremo più in futuro); i limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$; l'equazione $f(x) = 0$ dà $x = 0$, e dunque $f(0) = 0$; la disequazione $f(x) > 0$ dà $x > 1$, e dunque $f(x) < 0$ per $x < 1$ e $x \neq 0$; come visto, $x = 1$ è asintoto verticale bilatero e non ci sono asintoti orizzontali, mentre $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (1)x) = 1$ da cui la retta $y = x + 1$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$, mentre $f(x) = x + 1$ non ha soluzioni e dunque non vi sono intersezioni tra l'asintoto e Γ_f. La funzione è derivabile in tutto il dominio (ancora, perché ottenuta tramite operazioni e/o composizione da funzioni derivabili, cosa che non ripeteremo più in futuro) con derivata $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$; si ottengono dunque i punti stazionari $x = 0$ e $x = 2$. La disequazione $f'(x) > 0$ vale se e solo se $x < 0$ oppure $x > 2$: pertanto f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_{<0}$ e $\mathbb{R}_{>2}$ e strettamente decrescente in $]0, 2[$, da cui si ricava che $x = 0$ è un punto di massimo locale stretto (con valore $f(0) = 0$) e $x = 2$ un punto di minimo locale stretto (con valore $f(2) = 4$). La funzione è derivabile ulteriormente in tutto il dominio con derivata seconda $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$: vale $f''(x) \neq 0$, e $f''(x) \gtrless 0$ se e solo se $x \gtrless 1$, dunque f è strettamente concava per $x < 1$, strettamente convessa per $x > 1$ e priva di flessi. Infine è chiaro che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il dominio.

(2) [$f(x) = \frac{x^3}{x+1}$, vedi Figura 3.16(b)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e non vi sono periodicità e parità; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto il dominio. I limiti interessanti sono $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$; l'equazione $f(x) = 0$ dà $x = 0$, e dunque $f(0) = 0$; la disequazione $f(x) > 0$ è soddisfatta se e solo se $x < -1$ oppure $x > 0$, e dunque $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$. $x = -1$ è asintoto verticale bilatero e non ci sono asintoti orizzontali e obliqui; tuttavia, essendo f una funzione razionale fratta col grado del numeratore superiore di 2 a quello del denominatore, è sensato attendersi l'esistenza di un asintoto quadratico $y = ax^2 + bx + c$. Si ha infatti $a = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, $b = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)-x^2}{x} = -1$ e $c = \lim_{x \to \mp\infty}(f(x) - x^2 + x) = 1$, da cui l'asintoto $y = x^2 - x + 1$, privo di intersezioni con f. La derivata è $f'(x) = \frac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$; si ottengono dunque i punti stazionari $x = -\frac{3}{2}$ e $x = 0$. La disequazione $f'(x) > 0$ vale se e solo se $x > -\frac{3}{2}$ (e $x \neq -1$): pertanto f è strettamente crescente in $\mathbb{R}_{>-\frac{3}{2}} \setminus \{-1\}$ e strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{<-\frac{3}{2}}$, da cui si ricava che $x = -\frac{3}{2}$ è un punto di minimo locale stretto (con valore $f(-\frac{3}{2}) = \frac{27}{4} \sim 6,7$) mentre $x = 0$ non è un punto di estremo locale. Vale poi $f''(x) = \frac{2x(x^2+3x+3)}{(x-1)^3}$, perciò $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f''(x) > 0$ (ovvero f strettamente convessa) se e solo se $x < -1$ oppure $x > 0$: pertanto si ha un flesso (orizzontale) in $x = 0$.

(3) [$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$, vedi Figura 3.16(c)] La funzione è definita e di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$, e periodica di periodica 2π; inoltre essa è dispari. Pertanto sarà sufficiente studiarla su $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \pi]$. La funzione è limitata, perché $|f(x)| = |\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x| \leq |\sin x| + \frac{1}{2}|\sin 2x| \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Non vi sono limiti interessanti; notiamo che vale $f(x) = \sin x + \sin x \cos x = \sin x(1 + \cos x)$, e pertanto $f(x) = 0$ se e solo se $\sin x$ oppure $\cos x = -1$, cioè $x = 0$ o $x = \pi$, e $f(x) > 0$ in $]0, \pi[$. La derivata è $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$; dunque $f'(x) = 0$ per $\cos x = -1$ (ovvero $x = \pi$) oppure $\cos x = \frac{1}{2}$ (ovvero $x = \frac{\pi}{3}$), e $f'(x) > 0$ per $\cos x > \frac{1}{2}$, ovvero $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$, e ne ricaviamo che $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo locale (con $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sim 1,3$) mentre $x = \pi$ non è un estremante locale. Si ha infine $f''(x) = -\sin x + 2\sin 2x = -\sin x(4\cos x + 1)$, da cui $f''(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$ (ovvero $x = 0, \pi$) oppure $\cos x = -\frac{1}{4}$ (ovvero $x = \alpha := \arccos(-\frac{1}{4}) \sim 1,82$), e, essendo $\sin x > 0$ in $]0, \pi[$, si ha $f''(x) > 0$ (ovvero f è strettamente convessa) se e solo se $\cos x < -\frac{1}{4}$, cioè $\alpha < x < \pi$. Pertanto $x = 0$, $x = \alpha$ e $x = \pi$ sono tutti flessi. In $x = 0$ e $x = \alpha$ si hanno flessi obliqui, con $f(0) = 0$, $f(\alpha) = \sqrt{1 - (-\frac{1}{4})^2}(1 + (-\frac{1}{4})) = \frac{3\sqrt{15}}{16} \sim 0,72$ e tangenti inflessionali di pendenze $f'(0) = 2$ e $f'(\alpha) = 2(-\frac{1}{4})^2 + (-\frac{1}{4}) - 1 = -\frac{9}{8} \sim -1,1$; invece in $x = \pi$ si ha un flesso orizzontale, con $f(\pi) = 0$. Per disegnare il grafico con maggior cura, naturalmente si può calcolare f anche in altri punti scelti: ad esempio, $f(\frac{\pi}{2}) = 1$.

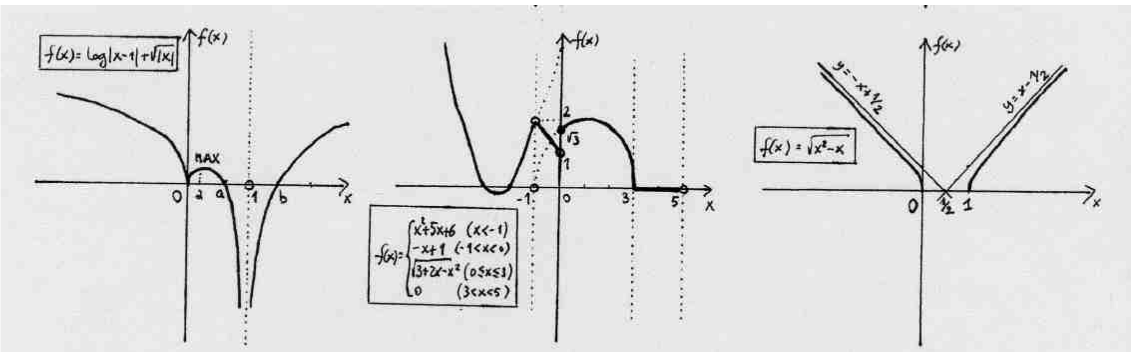

Figura 3.17: Grafico di **(4)** $f(x) = \log|x-1| + \sqrt{|x|}$, **(5)** $f(x) = x^2 + 5x + 6$ (se $x < -1$), $-x + 1$ (se $-1 < x < 0$), $\sqrt{3 + 2x - x^2}$ (se $0 \leq x \leq 3$), 0 (se $3 < x < 5$), **(6)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

(4) $[f(x) = \log|x-1| + \sqrt{|x|}$, vedi Figura 3.17(a)] Il dominio è dato dalle condizioni $|x-1| > 0$ e $|x| \geq 0$, ovvero $x \neq 1$; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}_{<0}$, in $]0,1[$ e in $\mathbb{R}_{>0}$, ed è di certo continua anche in $x = 0$, in cui vale $f(0) = 0$. Non ci sono periodicità né parità. I limiti interessanti sono facilmente $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = -\infty$. Per determinare i punti in cui $f(x) = 0$ e $f(x) > 0$, in questo caso è conveniente usare il metodo di *confronto dei grafici*: infatti $f(x) \geq 0$ se e solo se $\log|x-1| \geq -\sqrt{|x|}$, e si ricava l'esistenza di due punti a, b con $0 < a < 1 < b < 2$ tali che $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, $x = a$ oppure $x = b$, e $f(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, $0 < x < a$ oppure $x > b$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale bilatero, mentre non vi sono asintoti lineari. Per la derivabilità ci resta solo il dubbio in $x = 0$. La cosa più semplice è calcolare la derivata negli altri punti, e vedere se i suoi limiti destro e sinistro per $x \to 0$: infatti (vedi Proposizione 3.3.9) se esistono finiti, essi saranno rispettivamente $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$, e se invece uno o entrambi esistono ma sono infiniti allora la corrispondente derivata non esiste. In effetti, per $x \neq 0, 1$ si ha $f'(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|}}$ e dunque $\lim_{x\to\mp} f'(x) = \mp\infty$, da cui ricaviamo che f è continua ma non derivabile in 0. Ora, al fine di studiare $f'(x) \geq 0$ notiamo che $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$: perciò possiamo supporre che sia $x > 0$, e dunque $f'(x) = \frac{x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)}$. Ponendo $\sqrt{x} = t > 0$, si deve studiare $\frac{t^2+2t-1}{2t(t^2-1)} \geq 0$, che equivale a $\frac{t^2+2t-1}{t-1} \geq 0$: vale $= 0$ se e solo se $t^2 + 2t - 1 = 0$, ovvero $t = \sqrt{2} - 1$ da cui $x = \alpha := 3 - 2\sqrt{2} \sim 0,17$, e > 0 se e solo se $0 < t < \sqrt{2} - 1$ oppure $t > 1$, ovvero se e solo se $0 < x < \alpha$ oppure $x > 1$, ovvero per $x > 0$ la funzione f è strettamente crescente in $]0, \alpha[$ e in $\mathbb{R}_{>1}$ e strettamente decrescente in $]\alpha, 1[$, oltreché, come visto, in $\mathbb{R}_{<0}$. Pertanto $x = \alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale (con $f(\alpha) \sim 0,22$); inoltre, sebbene f non vi sia derivabile, dalle considerazioni fatte possiamo anche dire che 0 è un punto di minimo locale (con $f(0) = 0$). Derivando ulteriormente, si ha $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\operatorname{sign} x}{2}(-\frac{1}{2})|x|^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sign} x = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{4|x|\sqrt{|x|}} < 0$ per ogni $x \neq 0, 1$, dunque f è strettamente concava.

(5) $[f(x) = x^2 + 5x + 6$ (se $x < -1$), $-x + 1$ (se $-1 < x < 0$), $\sqrt{3 + 2x - x^2}$ (se $0 \leq x \leq 3$), 0 (se $3 < x < 5$), vedi Figura 3.17(b)] La funzione è definita a tratti, e notiamo che in ciascuno di questi tratti la relativa definizione ha senso (serve solo controllare $\sqrt{3 + 2x - x^2}$, in cui il radicando $3 + 2x - x^2$ è ≥ 0 se e solo se $x \in [-1, 3]$, intervallo che contiene $[0, 3]$): dunque il dominio è definito d'autorità come $\mathbb{R}_{<-1} \cup]-1, 0[\cup [0, 3] \cup]3, 5[= \mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1\}$. La funzione è certamente di classe $\mathcal{C}^\infty$ in $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1, 0, 3\}$. Si noti che f non è definita in -1 e dunque è privo di senso chiedersi se f sia ivi continua o no; tuttavia, essendo $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$, si potrebbe prolungare f per continuità ponendo $f(-1) := 2$. Invece f è definita in 0 come $f(0) = \sqrt{3}$, però $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ è diverso da $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{3}$ e dunque f è discontinua in 0. Infine, f è definita in 3 come $f(3) = 0$, ed è ivi continua essendo $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 0$. Ricapitolando, f è continua in tutto il dominio $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1\}$ tranne che in 0. Per i limiti interessanti abbiamo ancora $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. Vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = -3$, $x = -2$ e $x \geq 0$, e $f(x) > 0$ se e solo se $x < -3$, $-2 < x < -1$ e $x > -1$. In $\mathbb{R}_{<5} \setminus \{-1, 0, 3\}$ la derivata $f'(x)$ vale $2x + 5$ (per $x < -1$), -1 (per $-1 < x < 0$), $\frac{1-x}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ (per $0 < x < 3$) e 0 (per $x > 3$); resta da vedere se f sia derivabile anche in $x = 3$, ma ciò non è vero perché $\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -\infty$ (ricordare sempre la Proposizione 3.3.9). La derivata è nulla per $x = -\frac{5}{2}$, $x = 1$ e $x > 0$, strettamente positiva (e dunque f strettamente crescente) se e solo se $-\frac{5}{2} < x < -1$, $0 < x < 1$, e strettamente negativa (e dunque f strettamente decrescente) se e solo se $x < -\frac{5}{2}$, $-1 < x < 0$ e $1 < x < 3$: ne ricaviamo che $x = -\frac{5}{2}$ è un punto di minimo locale stretto (con $f(-\frac{5}{2}) = -\frac{1}{4}$) e $x = 1$ un punto di massimo locale stretto (con $f(1) = 2$). Per i punti $x = 0, 3$ bisogna esaminare in dettaglio: vale $f(0) = \sqrt{3}$, ed in ogni intorno di 0 vi sono punti in cui $f(x) < f(0)$ (si ricordi che $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$) ed altri in cui $f(x) > f(0)$ (perché $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ e f è strettamente crescente in $0 < x < 1$): dunque 0 non è un estremante locale per f. Invece $x = 3$ è un punto di minimo locale non stretto, perché $f(x) > 0$ in un intorno sinistro di 3 e $f(x) \geq 0$ per $x \geq 3$. La funzione è strettamente convessa in $\mathbb{R}_{<1}$, strettamente concava in $]0, 3[$ e lineare in $]-1, 0[$ e $\mathbb{R}_{>3}$.

(6) $[f(x) = \sqrt{x^2 - x}$, vedi Figura 3.17(c)] Il dominio della funzione è definito da $x^2 - x \geq 0$, ovvero è $\mathbb{R}_{\leq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 1}$; essa è ivi continua, e $\mathcal{C}^\infty$ nel suo interno. Non vi sono periodicità o parità. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$, vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0, 1$, ed è $f(x) > 0$ in tutti gli altri punti del suo dominio. Si noti che vale $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x} = \mp 1$, mentre $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\mp 1)x) =$

$\lim_{x\to\mp\infty}(\sqrt{x^2-x}\pm x) = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}\mp x} = \lim_{x\to\mp\infty}\frac{-1}{\operatorname{sign} x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\mp 1} = \pm\frac{1}{2}$, da cui $y = \mp x \pm \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo in $\mp\infty$. La derivata $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$ non è mai nulla nel dominio, ed è $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$: dunque f è strettamente decrescente per $x < 0$ e strettamente crescente per $x > 1$. La derivata seconda $f''(x) = -\frac{1}{4}(x^2-x)^{-\frac{3}{2}}$ è sempre < 0 nel dominio, e dunque f è strettamente concava. (Si osservi che la funzione diventa pari col cambio di variabili $X = x - \frac{1}{2}$, ovvero $x = X + \frac{1}{2}$: infatti essa diventa $F(X) = f(X+\frac{1}{2}) = \sqrt{(X+\frac{1}{2})^2 - (X+\frac{1}{2})} = \sqrt{X^2 - \frac{1}{4}}$.)

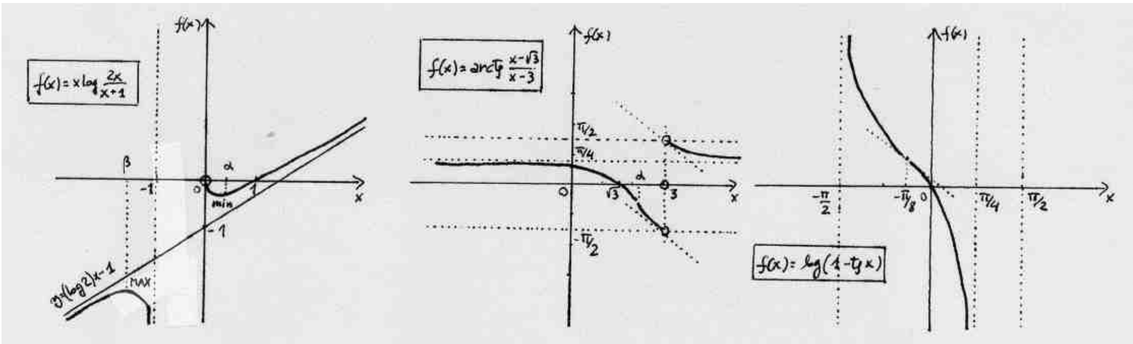

Figura 3.18: Grafico di **(7)** $f(x) = x\log\frac{2x}{x+1}$, **(8)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-\sqrt{3}}{x-3}$, **(9)** $f(x) = \log(1-\operatorname{tg} x)$.

(7) $[f(x) = x\log\frac{2x}{x+1}$, vedi Figura 3.18(a)] Il dominio è dato dalla condizione $\frac{2x}{x+1} > 0$, ovvero $x < -1$ oppure $x > 0$; in esso la funzione è $\mathcal{C}^\infty$, e non ci sono periodicità o parità. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$.(107) Vale $\lim_{x\to\mp\infty}\frac{f(x)}{x} = \log 2$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (\log 2)x) = -1$;(108) pertanto $y = (\log 2)x - 1$ è un asintoto obliquo per f a $\pm\infty$, privo di intersezioni con f.(109) Vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $\frac{2x}{x+1} = 1$, ovvero $x = 1$; studiando poi $f(x) > 0$, si ha $\log\frac{2x}{x+1} > 0$ se e solo se $\frac{2x}{x+1} > 1$ ovvero se e solo se $x < -1$ oppure $x > 1$, da cui $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. La derivata è $f'(x) = \log\frac{2x}{x+1} + \frac{1}{x+1}$; per semplificare i conti poniamo $t = \frac{2x}{x+1}$ ovvero $x = -\frac{t}{t-2} =: \varphi(t)$ e dunque $f'(x) = \log t + 1 - \frac{t}{2}$. Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log t = \frac{t}{2} - 1$, e ciò vale (usando il confronto grafico) se e solo se $t = a, b$ con $0 < a < 1$ e $5 < b < 6$, ovvero (osservando il grafico di $\varphi(t)$) se e solo se $x = \alpha := \frac{a}{2-a}$ oppure $x = \beta := -\frac{b}{b-2}$ con $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$ e $-\frac{5}{3} < \beta < -\frac{3}{2}$; e $f'(x) > 0$ se e solo se $\log t > \frac{t}{2} - 1$, ovvero se e solo se $a < t < b$, ovvero se e solo se $x < \beta$ oppure $x > \alpha$. Ciò dice che $x = \beta$ (risp. $x = \alpha$) è un punto di massimo (risp. minimo) relativo stretto; inoltre, essendo $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, ricordando l'espressione di $f'(x)$ si ricava $f(\beta) = \beta\log\frac{2\beta}{\beta+1} = \beta(-\frac{1}{\beta+1}) = -\frac{\beta}{\beta+1} =: \psi(\beta)$ (e dunque, essendo $-\frac{5}{3} < \beta < -\frac{3}{2}$, si ricava $-3 = \psi(-\frac{3}{2}) < f(\beta) < \psi(-\frac{5}{3}) = -\frac{5}{2}$) e $f(\alpha) = \psi(\alpha)$ (e dunque, essendo $\frac{1}{5} < \alpha < \frac{1}{2}$, si ricava $-\frac{1}{3} = \psi(\frac{1}{2}) < f(\alpha) < \psi(\frac{1}{5}) = -\frac{1}{6}$). Essendo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$ (finito), per sapere con quale pendenza il grafico parte a destra di $x = 0$ è anche interessante calcolare $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ (dunque il grafico partirà con pendenza "verticale in basso"). Infine, si calcola $f''(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$, e ciò mostra che f è priva di flessi ed è strettamente concava (risp. strettamente convessa) per $x < -1$ (risp. per $x > 0$).

(107) Il limite è della forma $0\cdot\infty$: ponendo $\frac{2x}{x+1} = t$, esso diventa $\lim_{t\to 0^+}\frac{t\log t}{t+2} = 0^-$ (basta ricordare che $\lim_{t\to 0^+} t\log t = 0^-$). Oppure, scrivendolo nella forma $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{2x}{x+1}\right)}{1/x}$ e applicando de l'Hôpital, esso diventa $\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x}{x+1}\right) = 0^+$.

(108) Infatti vale $\lim_{x\to\mp\infty}(x\log\frac{2x}{x+1} - (\log 2)x) = \lim_{x\to\mp\infty} x\log\frac{x}{x+1} = \lim_{x\to\mp\infty} x\log\left(1-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\mp\infty} x(-\frac{1}{x}) = -1$ (usando il fatto che $t = \frac{1}{x} \to 0$ e lo sviluppo asintotico di $\log(1+t)$); oppure, meno elegantemente, si può applicare de l'Hôpital.

(109) Da $f(x) = (\log 2)x - 1$ si ricava $\log(1+t) = t$ per $t = \frac{1}{x} > 0$: ma le funzioni $\log(1+t)$ e t si intersecano solo se $t = 0$, e ciò è impossibile.

(8) $[f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-\sqrt{3}}{x-3}$, vedi Figura 3.18(b)] Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{3\}$; la funzione non ha periodicità o parità, ed è $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio; inoltre, f è limitata perché $|f(x)| \le \frac{\pi}{2}$ per ogni x nel dominio. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}^{\mp}$ (dunque $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$, privo di intersezioni con f) e $\lim_{x\to 3^{\mp}} f(x) = \pm\frac{\pi}{2}^{\pm}$; vale $f(x) = 0$ per $x = \sqrt{3}$ e $f(0) = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$, ed $f(x) > 0$ se e solo se $\frac{x-\sqrt{3}}{x-3} > 0$, ovvero $x < \sqrt{3} \sim 1,7$ oppure $x > 3$. La derivata è $f'(x) = -\frac{3-\sqrt{3}}{2(x^2-(3+\sqrt{3})x+6)}$: dunque $f'(x) < 0$ per ogni $x \neq 3$, ovvero f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}_{<3}$ ed in $\mathbb{R}_{>3}$. Poiché i limiti di f per $x \to 3^{\mp}$ sono finiti, è interessante calcolare $\lim_{x\to 3^{\mp}} f'(x) = -\frac{3-\sqrt{3}}{6} \sim -0,21$; si ha inoltre $f'(\sqrt{3}) = -\frac{3+\sqrt{3}}{6} \sim -0,79$. La derivata seconda è $f''(x) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{2x-(3+\sqrt{3}}{(x^2-(3+\sqrt{3})x+6)^2}$; vale $f''(x) = 0$ per $x = \alpha := \frac{3+\sqrt{3}}{2} \sim 2,37$, e $f''(x) > 0$ (ovvero, f strettamente convessa) per $x > \alpha$: dunque $x = \alpha$ è un flesso, con $f(\alpha) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ e tangente inflessionale di pendenza $f'(\alpha) = -\frac{3+\sqrt{3}}{3} \sim -1,58$.

(9) $[f(x) = \log(1 - \operatorname{tg} x)$, vedi Figura 3.18(c)] Il dominio è dato dalle condizioni $1 - \operatorname{tg} x > 0$ per il logaritmo (ovvero $\operatorname{tg} x < 1$, che dà $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$) e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ per la tangente, ovvero $A_f = \{-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione è $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio e periodica di periodo π, e la studiamo dunque in $A_f \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}^-} f(x) = -\infty$; vale $f(x) = 0$ se e solo se $1 - \operatorname{tg} x = 1$, ovvero se e solo se $x = 0$, e $f(x) > 0$ se e solo se $1 - \operatorname{tg} x > 1$, ovvero se e solo se $x < 0$. La derivata è $f'(x) = \frac{1}{1-\operatorname{tg} x}(-\frac{1}{\cos^2 x}) = -\frac{1}{\cos x(\cos x - \sin x)} < 0$ su tutto il dominio, in cui f è perciò strettamente decrescente. La derivata seconda è $f''(x) = -\frac{\sin 2x + \cos 2x}{\cos^2 x(\cos x - \sin x)^2}$, che si annulla quando $\sin 2x + \cos 2x = 0$ ovvero quando $\operatorname{tg} 2x = -1$, che dà $2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, da cui $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k}{2}\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); di questi valori, solo $-\frac{\pi}{8}$ sta in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$. Vale infine $f''(x) > 0$ (ovvero, f strettamente convessa0 se e solo se $\sin 2x + \cos 2x < 0$, ovvero se e solo se $-\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < 2x < -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, cioè $-\frac{5\pi}{8} + k\pi < x < -\frac{\pi}{8} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, dunque per $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{8}$ nel nostro dominio; pertanto $x = -\frac{\pi}{8}$ è un flesso, con (usando le formule di bisezione) $f(-\frac{\pi}{8}) = \log(1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}) = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 \sim 0,35$ e $f'(-\frac{\pi}{8}) \sim -0,83$.

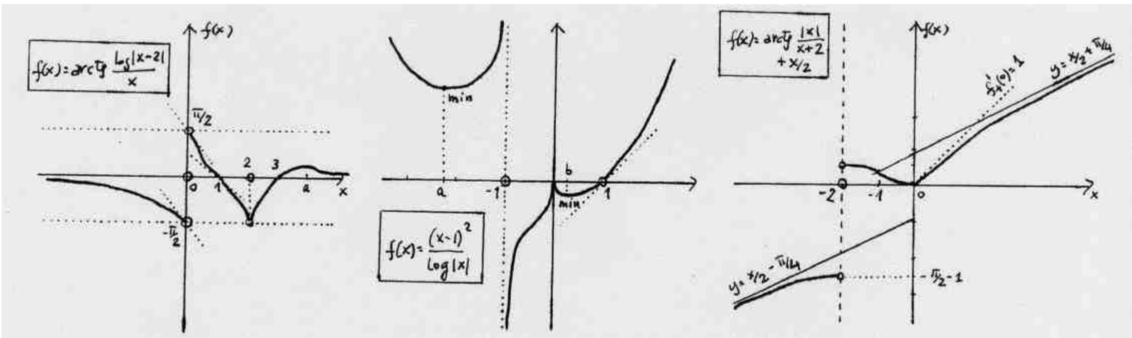

Figura 3.19: Grafico di **(10)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\log|x-2|}{x}$, **(11)** $f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|}$, **(12)** $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{|x|}{x+2} + \frac{x}{2}$.

(10) $[f(x) = \operatorname{arctg}\frac{\log|x-2|}{x}$, vedi Figura 3.19(a)] Il dominio di f è dato da $|x-2| > 0$ e $x \neq 0$, ovvero $\mathbb{R}\setminus\{0, 2\}$; essa non è periodica né ha parità, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel dominio. Limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0^{\mp}$ (infatti l'argomento dell'arco-tangente è infinitesimo), $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \mp\frac{\pi}{2}$, e $\lim_{x\to 2^{\mp}} f(x) = -\frac{\pi}{2}$. La funzione è limitata, perché per ogni x nel dominio vale $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$. Si ha $f(x) = 0$ per $\log|x-2| = 0$, ovvero per $|x-2| = 1$, cioè $x - 2 = \pm 1$, cioè $x = 1$ oppure $x = 3$; invece $f(x) > 0$ vale se e solo se $\frac{\log|x-2|}{x} > 0$; il numeratore è > 0 per $|x-2| > 1$, ovvero per $x - 2 < -1$ oppure $x - 2 > 1$, ovvero per $x < 1$ oppure $x > 3$, mentre il denominatore è > 0 per $x > 0$; riassumendo, $f(x) > 0$ nel dominio se e solo se $0 < x < 1$ oppure $x > 3$. Come visto, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$. La derivata è $f'(x) = \frac{\frac{x}{x-2} - \log|x-2|}{x^2 + \log^2|x-2|}$. Usando un confronto grafico tra le funzioni $\frac{x}{x-2}$ e $\log|x-2|$, individuiamo un $6 < a < 7$ tale che $\frac{x}{x-2} \ge \log|x-2|$ se e solo se $2 < x < a$, e dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $x = a$ e $f'(x) > 0$ (ovvero f strettamente crescente) se e solo se $2 < x < a$ e $f'(x) < 0$ (ovvero

f strettamente decrescente) se e solo se $x < 0$, $0 < x < 2$ o $x > a$: ne ricaviamo che $x = a$ è un massimo locale stretto, con $f(a) = \text{arctg}\,\frac{\log|a-2|}{a} = \text{arctg}\,\frac{\frac{a}{a-2}}{a} = \text{arctg}\,\frac{1}{a-2} = \text{arccotg}(a-2)$, e dunque $0,2 \sim \text{arccotg}\,5 < f(a) < \text{arccotg}\,4 \sim 0,25$. È interessante anche calcolare $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = -\frac{1}{\log 2} \sim -1,44$ e $\lim_{x\to 2^\mp} f'(x) = \mp\infty$. Non calcoliamo la derivata seconda, che ha un'espressione troppo complicata; notiamo tuttavia che $f'(1) = -\frac{1}{2}$, e perciò, essendo questo valore maggiore sia di $f'_+(0)$ che del limite $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$, esisteranno di certo almeno due flessi tra 0 e 2.

(11) $[f(x) = \frac{(x-1)^2}{\log|x|}$, vedi Figura 3.19(b)] Il dominio è dato da $|x| > 0$ (cioè $x \neq 0$) e $\log|x| \neq 0$ (cioè $|x| \neq 1$), ovvero $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel dominio, non è periodica né ha parità; i suoi limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$,[110] $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = 0^\mp$.[111] La funzione non si annulla mai (tutt'al più, come visto, potrebbe essere prolungata per continuità in $x = 1$ col valore 0); essa è > 0 se e solo se $\log|x| > 0$, ovvero se e solo se $|x| > 1$, cioè per $x < -1$ oppure $x > 1$. Si ha $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, dunque essa non ammette asintoti obliqui. La derivata vale $f'(x) = 2\frac{x-1}{\log^2|x|}\left(\log|x| - \frac{x-1}{2x}\right)$; Un confronto grafico tra le funzioni $\log|x|$ e $\frac{x-1}{2x}$ ci mostra due punti $-3 < a < -2$ e $0 < b < 1$ tali che $\log|x| \geq \frac{x-1}{2x}$ se e solo se $x \leq a$, $0 < x \leq b$ oppure $x \geq 1$; l'altro fattore in cui il segno può cambiare è $x - 1$, che è > 0 per $x > 1$: riassumendo, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = a, b$; $f'(x) > 0$ (ovvero f strettamente crescente) se e solo se $a < x < -1$, $-1 < x < 0$, $b < x < 1$ e $x > 1$, mentre $f'(x) < 0$ (ovvero f strettamente decrescente) se e solo se $x < a$ e $0 < x < b$. Ne deduciamo che $x = a$ e $x = b$ sono punti di minimo locale stretto con $f(a) = \frac{(a-1)^2}{\log|a|} = (a-1)^2\frac{2a}{a-1} = 2a(a-1) =: \psi(a)$ (pertanto $12 = \psi(-2) < f(a) < \psi(-3) = 24$; in realtà $(a; f(a)) \sim (-2,09; 12,95)$) e $f(b) = 2b(b-1) = \psi(b)$ (pertanto $-\frac{1}{2} < f(b) < 0$; in realtà $(b; f(b)) \sim (0,28; -0,41)$). Calcoliamo anche $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \pm\infty$ e e $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = 1$ (dunque f potrebbe essere prolungata anche come funzione $\mathcal{C}^1$ a $x = 1$ con $f(1) = 0$ e $f'(1) = 1$).[112] Anche qui non calcoliamo la derivata seconda.

(12) $[f(x) = \text{arctg}\,\frac{|x|}{x+2} + \frac{x}{2}$, vedi Figura 3.19(c)] Il dominio è $A_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$; la funzione non ha periodicità né simmetrie, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che eventualmente nel punto $x = 0$, in cui però è perlomeno continua. I limiti interessanti sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x\to -2^\mp} f(x) = \mp\frac{\pi}{2} - 1$. Si nota subito che $f(0) = 0$, e per lo studio generale di $f(x) \geq 0$ si potrà seguire il metodo di confronto grafico già seguito negli esempi precedenti (si ponga $t = \frac{x}{x+2}$ ovvero $x = -\frac{2t}{t-1}$: dunque se $x \geq 0$ si ha $f(x) \geq 0$ se e solo $\text{arctg}\,t \geq \frac{t}{t-1}$, mentre se $x < 0$ si ha $f(x) \leq 0$ se e solo $\text{arctg}\,t \leq -\frac{t}{t-1}$...); tuttavia, in questo caso vogliamo dedurre queste informazioni dalla derivata, tra breve. Guardiamo invece se vi sono asintoti obliqui: in effetti si ricava subito $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - \frac{1}{2}x) = \mp\frac{\pi}{4}$, e perciò $y = \frac{1}{2}x \mp \frac{\pi}{4}$ è asintoto obliquo a $\mp\infty$; cercando le intersezioni con f, da $f(x) = \frac{1}{2}x \mp \frac{\pi}{4}$ si ricava $\text{arctg}\,\frac{|x|}{x+2} = \mp\frac{\pi}{4}$, ovvero $\frac{|x|}{x+2} = \mp 1$; se $\frac{|x|}{x+2} = 1$ si ottiene $|x| = x + 2$, ovvero $x = -1$, mentre se $\frac{|x|}{x+2} = -1$ si ottiene $|x| = -x - 2$, priva di soluzioni. Veniamo ora alla derivata, che è $f'(x) = \frac{x(x+2)}{2(x^2+2x+2)}$ (per $x < 0$, $x \neq -2$) e $f'(x) = \frac{x^2+2x+4}{2(x^2+2x+2)}$ (per $x > 0$): essa non si annulla mai nel dominio A_f, è $f'(x) > 0$ (dunque f strettamente crescente) per ogni $x > 0$ e $x < -2$, e $f'(x) < 0$ (dunque f strettamente decrescente) per ogni $-2 < x < 0$. Tornando allo studio di $f(x) \geq 0$, possiamo affermare che in $\mathbb{R}_{<-2}$ la funzione cresce strettamente da $-\infty = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ a $-\frac{\pi}{2} - 1 = \lim_{x\to -2^-} f(x)$ e dunque vale $f(x) < 0$; in $]-2, 0[$ la funzione decresce strettamente da $\frac{\pi}{2} - 1 = \lim_{x\to -2^-} f(x) > 0$ a $0 = f(0)$, e dunque vale $f(x) > 0$; infine, in $\mathbb{R}_{>0}$ la funzione cresce strettamente da $0 = f(0)$ a $+\infty = \lim_{x\to+\infty} f(x)$, e dunque vale $f(x) > 0$. Va notato, in particolare, che 0 è un punto di minimo relativo stretto; inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$. Infine, la derivata seconda vale $f''(x) = 2\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (per $x < 0$, $x \neq -2$) e $f''(x) = -2\frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$ (per $x > 0$): si

---

[110] Infatti, essendo $x - 1 \sim_{\mp\infty} x$, si ha $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1/x} = +\infty$.

[111] Infatti, essendo x all'intorno di 1, si ha $\log|x| = \log x = \log(1 + (x-1)) \sim_1 x - 1$ e pertanto $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \lim_{x\to 1^\mp} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1^\mp}(x-1) = 0^\mp$.

[112] Iniziamo da $x \to 0^\pm$. Essendo $\frac{x-1}{2x} \sim_0^* \frac{1}{x}$ si ha $\log|x| = o_0(\frac{x-1}{2x})$ e dunque $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \lim_{x\to 0^\mp} 2\frac{x-1}{\log^2|x|}(-\frac{x-1}{2x}) = \lim_{x\to 0^\mp} \frac{(x-1)^2}{x\log^2|x|} = \pm\infty$ (perché il denominatore, come noto, tende a $0^\pm$). Se ora $x \to 1^\pm$, si ha $\frac{x-1}{\log^2|x|} \sim_1 \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$ e $\log|x| - \frac{x-1}{2x} = (x-1) - \frac{x-1}{2x} + o_1(x-1) \sim_1 (x-1)(1 - \frac{1}{2x}) \sim_1 \frac{1}{2}(x-1)$, da cui $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = \lim_{x\to 1^\mp} 2\frac{1}{x-1}\frac{1}{2}(x-1) = 1$.

ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = -1$, e $f''(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 0$: pertanto $x = -1$ è un flesso con $f(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sim 0,28$ e $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

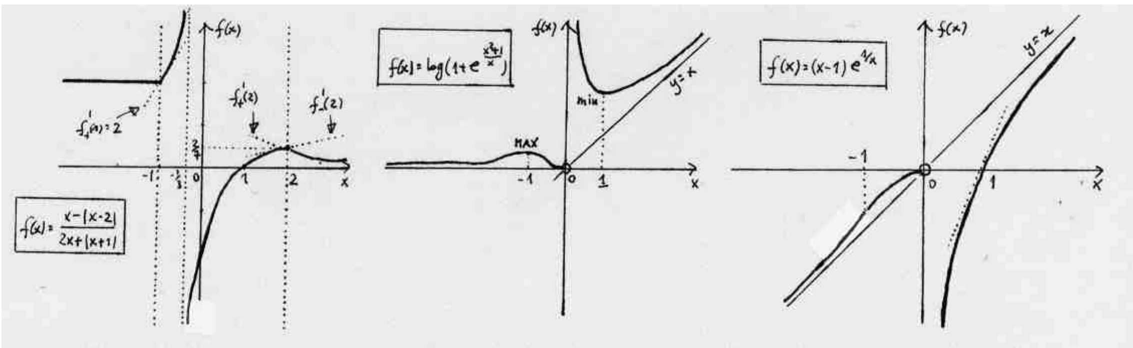

Figura 3.20: Grafico di **(13)** $f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}$, **(14)** $f(x) = \log\big(1 + e^{\frac{x^2+1}{x}}\big)$, **(15)** $f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$.

(13) [$f(x) = \frac{x-|x-2|}{2x+|x+1|}$, vedi Figura 3.20(a)] Il dominio di f è dato da $2x + |x+1| \neq 0$: se $x \geq -1$ ciò dà $2x + x + 1 \neq 0$, ovvero $x \neq -\frac{1}{3}$, mentre se $x < -1$ si ha $2x - (x+1) \neq 0$, sempre vero; riassumendo, il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$. La funzione è continua, non ha periodicità né simmetrie, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che eventualmente nei punti $x = -1$ e $x = 2$. Si tratta ora semplicemente di scrivere la funzione continua f in forma più chiara a seconda del segno delle quantità contenute nei moduli: si ha così $f(x) \equiv 2$ (per $x \leq -1$), $f(x) \equiv \frac{2(x-1)}{3x+1}$ (per $-1 < x \leq 2$, $x \neq -\frac{1}{3}$) e $f(x) = \frac{2}{3x+1}$ (per $x > 2$); nei punti "di saldatura" si ha $f(-1) = 2$ e $f(2) = \frac{2}{7}$. Il resto dello studio è allora immediato perché si tratta di studiare ciascuna delle funzioni affini sul pezzo di dominio che le compete, e lo lasciamo continuare allo studente: in particolare notiamo che vale $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ (in cui $f'(1) = \frac{1}{2}$), che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x < -\frac{1}{3}$ o $x > 1$, che la funzione ha un punto di minimo locale non stretto in $x = -1$ e un punto di massimo locale stretto in $x = 2$, punti nei quali essa non è derivabile (le derivate esistono a sinistra e a destra, ma sono diverse).

(14) [$f(x) = \log\big(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\big)$, vedi Figura 3.20(b)] Il dominio di f è $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\setminus\{0\}$; la funzione, non periodica né simmetrica, è di classe $\mathcal{C}^\infty$ ovunque; vale $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ed è chiaro che, essendo $1+e^{\frac{x^2+1}{x}} > 1$, si ha $f(x) > 0$ per ogni x nel dominio. Come visto, $y = 0$ è asintoto a $-\infty$ e $x = 0$ è asintoto verticale a destra; si ha poi $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$, e dunque $y = x$ è asintoto a $+\infty$, privo di intersezioni con f.[113] La derivata è $f'(x) = \frac{e^{\frac{x^2+1}{x}}}{1+e^{\frac{x^2+1}{x}}} \frac{x^2-1}{x^2}$, dunque $f'(x) = 0$ per $x = \pm1$ e $f'(x) > 0$ per $x < -1$ o $x > 1$: si ricava che $x = -1$ (risp. $x = 1$) è un punto di massimo (risp. minimo) locale stretto, con $f(-1) = \log(1+e^{-2}) \sim 0,13$

[113] Infatti, essendo $e^{\frac{x^2+1}{x}}$ infinito a $+\infty$ si ha $1+e^{\frac{x^2+1}{x}} \sim_{+\infty} e^{\frac{x^2+1}{x}}$, e grazie alla Proposizione 3.2.17(iii-c) abbiamo allora $\log\big(1 + e^{\frac{x^2+1}{x}}\big) \sim_{+\infty} \log e^{\frac{x^2+1}{x}} = \frac{x^2+1}{x}$, e pertanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = 1$. Poi $\log\big(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\big) - x = \log\big(1+e^{\frac{x^2+1}{x}}\big) - \log e^x = \log(e^{-x}+e^{\frac{1}{x}})$; ma essendo $\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+e^{\frac{1}{x}}) = 1$, pur avendosi $e^{-x} + e^{\frac{1}{x}} \sim e^{\frac{1}{x}}$ stavolta non possiamo applicare la Proposizione 3.2.17(iii-c) (per concludere che $\log(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}) \sim_{+\infty} \log(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}$): dobbiamo essere più prudenti. Tuttavia basta applicare la continuità del logaritmo: infatti $\lim_{x\to+\infty} \log(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}}) = \log(\lim_{x\to+\infty}(e^{-x} + e^{\frac{1}{x}})) = \log 1 = 0$. Per l'assenza di intersezioni, imponendo $f(x) = x$ e procedendo come appena fatto si trova $e^{-x} + e^{\frac{1}{x}} = 1$, impossibile perché se $x < 0$ si ha $e^{-x} > 1$ e $e^{\frac{1}{x}} > 0$, mentre se $x > 0$ si ha $e^{-x} > 0$ e $e^{\frac{1}{x}} > 1$, così che in ogni caso il primo membro è > 1.

e $f(1) = \log(1 + e^2) \sim 2,12$. Vale inoltre $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0^-$.[(114)] Tralasciamo lo studio della derivata seconda; tuttavia, certamente vi saranno almeno due flessi a, b per $x < 0$, con $a < -1$ e $-1 < b < 0$.

(15) $[f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x}}$, vedi Figura 3.20(c)] Il dominio di f è $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; la funzione non è periodica né simmetrica, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$; vale $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = 1$ e $f(x) > 0$ se e solo se $x > 1$; si ha $\lim_{x\to \mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ e $\lim_{x\to \mp\infty}(f(x) - x) = 0$, e perciò $y = x$ è asintoto a $\mp\infty$, senza intersezioni con f.[(115)] La derivata è $f'(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, strettamente positiva (e dunque, f strettamente crescente) in tutto il dominio. Si noti che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^+$ e (ovvio, visto che $y = x$ è asintoto) $\lim_{x\to \mp\infty} f'(x) = 1$. Infine, la derivata seconda è $f''(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(x+1)$, dunque $f''(x) = 0$ per $x = -1$ e $f''(x) > 0$ (dunque, f strettamente convessa) per $x < -1$: pertanto $x = -1$ è un flesso, con $f(-1) = -\frac{2}{e} \sim -0,73$ e $f'(-1) = \frac{3}{e} \sim 1,1$.

[(114)]Infatti vale $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x^2+1}{x}} \frac{1}{x^2} = -\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^-$.

[(115)]Infatti, essendo $\frac{1}{x}$ infinitesimo e ricordando che $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)$ si ha $(x - 1)e^{\frac{1}{x}} - x = (x-1)(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x^2}))-x = x+1+\frac{1}{2x}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x})-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x^2})-x = -\frac{1}{2x}+o_{\mp\infty}(\frac{1}{x}) \sim -\frac{1}{2x}$, da cui $\lim_{x\to \mp\infty}(f(x) - x) = 0$. Per le intersezioni, si noti che $(x - 1)e^{\frac{1}{x}} = x$ significa (ponendo $t = \frac{1}{x}$) $e^t = \frac{1}{1-t}$, il che sarebbe vero solo per $t = 0$, impossibile.