Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica su derivazione e studi di funzione

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

mercoledì 19 novembre 2014

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito mercoledì 26/11). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 30 pt. **Ex. 2:** 20 pt. **Ex. 3:** 30 pt (2×15 pt). **Ex. 4:** 20 pt (2×10 pt; metà punti per il caso $\alpha = 2$). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{e^x - 4x}{e^x + 1}$ e tracciarne il grafico.[(1)] Determinare poi, per quanto possibile, il punto del grafico la cui retta tangente interseca l'asse y più in basso. Infine, dire cosa affermano il teorema del valor medio di Lagrange e il teorema di Weierstrass quando applicati a f nell'intervallo $[-1, 1]$, cercando (sempre per quanto possibile) di darvi seguito con i calcoli.

2. Dimostrare che il dominio di $g(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$ è tutto $\mathbb{R}$,[(2)] e che g ammette estremi assoluti, calcolandoli.[(3)] Calcolare poi, usando la formula di Taylor, lo sviluppo asintotico di $\operatorname{tg} t$ con tre termini significativi all'intorno di $t = 0$; dopo aver notato che tale sviluppo coincide con quello segnalato tempo fa, usarlo per trovare la parte principale di g all'intorno di -1, 0, $+\infty$.

3. Studiare l'andamento delle seguenti funzioni, e tracciarne il grafico:

$$\text{(a)}\quad f(x) = \sqrt{\left|\frac{2x}{x-1}\right|} + x\ ; \qquad\qquad \text{(b)}\quad g(x) = \log(1 + \sin x) + \cos 2x\ .$$

4. Calcolare i seguenti limiti prima per $\alpha = 2$ e poi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, affrontando le forme indeterminate eventualmente in più modi diversi (con de l'Hôpital; trovando la parte principale con la formula di Taylor o usando gli sviluppi asintotici già noti; con i limiti notevoli; etc.):

$$\text{(a)}\quad \lim_{-1,\,0,\,+\infty} \frac{\sqrt{x+5} - \alpha}{|x|^\alpha - \sqrt{|x|}}\ ; \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{-\infty,\,0^+} \frac{|x|^{\alpha+1} - \operatorname{arctg} x + 3x^3}{x^3 + \sin 2x^3}\, e^{\frac{\alpha}{x}}\ .$$

[(1)] In questo e nei successivi esercizi si consiglia di usare il metodo grafico per ottenere informazioni sulle soluzioni di un'equazione quando il calcolo preciso non è possibile. Si ricorda che quello grafico è un metodo *qualitativo*: il suo scopo non è di calcolare le soluzioni, ma piuttosto di appurare quante sono e dove si trovano con buona approssimazione.

[(2)] A tal fine, mostrare che esiste (trovandolo) qualche numero $M < \frac{\pi}{2}$ tale che $\left|\frac{x+1}{x^2+1}\right| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: perciò...

[(3)] Iniziare osservando che $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = 0$, poi...

Soluzioni.

1. (Vedi Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{e^x - 4x}{e^x + 1}$ ha dominio $\mathbb{R}$, ed è di classe $\mathcal{C}^\infty$; non ha parità ne' periodo. Vale $f(0) = \frac{1}{2}$; il segno di f è quello del numeratore, e un facile confronto grafico tra e^x e $4x$ mostra che esistono due punti a e b con $0 < a < 1$ e $2 < b < 3$ tali che $f(x) \geq 0$ per $x \leq a$ oppure $x \geq b$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$; in $-\infty$ il limite è determinato e vale $+\infty$, mentre la forma indeterminata in $+\infty$ si risolve raccogliendo e^x e si trova 1^-. La funzione è dunque superiormente illimitata, ma inferiormente limitata: questo si capisce notando che su $[a, b]$ la funzione (che è ivi continua e ≤ 0) ha minimo assoluto (negativo) per Weierstrass, e tale minimo sarà assoluto anche su tutto $\mathbb{R}$ perché al di fuori di quell'intervallo g è positiva. La retta $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$; invece a $-\infty$ si trova l'asintoto obliquo $y = -4x$ (si noti che, curiosamente, entrambi questi asintoti intersecano il grafico di g solo in $x = -\frac{1}{4}$). Derivando si ha $f'(x) = \frac{(4x-3)e^x - 4}{(e^x+1)^2}$, dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $x - \frac{3}{4} \geq e^{-x}$, e un confronto grafico mostra che esiste un punto c con $1 < c < 2$ tale che ciò vale se e solo se $x \geq c$: dunque il già previsto minimo assoluto di g viene assunto in tale c. Derivando ancora si trova $f''(x) = -\frac{e^x((4x-7)e^x - (4x+9))}{(e^x+1)^3}$, e ancora un confronto grafico (stavolta tra l'omografica $\frac{4x+9}{4x-7}$ e l'esponenziale e^x) ci dice che esistono due flessi d e d' con $-3 < d < -2$ e $2 < d' < 3$ tali che $f''(x) \geq 0$ (ovvero f è convessa) se e solo se $d \leq x \leq d'$.

Come noto, la retta tangente al grafico $y = f(x)$ in un punto $(\xi, f(\xi))$ è data da $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$, cioè $y = f'(\xi)x + (f(\xi) - \xi\, f'(\xi))$: si tratta dunque di studiare la crescenza della funzione $F(\xi) := f(\xi) - \xi\, f'(\xi)$ al variare di $\xi \in \mathbb{R}$. Derivando si ha $F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) - \xi\, f''(\xi) = -\xi\, f''(\xi)$, dunque vale $F'(\xi) = 0$ per $\xi = 0$ oppure per $f''(\xi) = 0$, che come visto prima dà $\xi = d$ oppure $\xi = d'$: e vale $F'(\xi) > 0$ quando ξ e $f''(\xi)$ hanno segno discorde, ovvero per $d < x < 0$ oppure $x > d'$. In altre parole, pensando a ξ che proviene da $-\infty$, il punto di intersezione tra retta tangente e asse y scende fino a $\xi = d$, poi sale per $d < \xi < 0$, poi di nuovo scende per $0 < \xi < d'$ e di nuovo sale da $\xi = d'$ in poi: è dunque chiaro che il punto del grafico la cui retta tangente interseca l'asse y più in basso è uno tra d e d', ma dire quale dei due è piuttosto arduo (un'analisi accurata porta a verificare che è d).

Infine, il teorema del valor medio di Lagrange afferma che esiste $\eta \in]-1, 1[$ in cui "f pende come il rapporto incrementale tra -1 e 1", ovvero tale che $f'(\eta) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$, ovvero tale che $\frac{(4\eta-3)e^\eta - 4}{(e^\eta+1)^2} = -\frac{3e+5}{2(e+1)}$: determinare esattamente quale sia è però impossibile. Quanto a Weierstrass, esso afferma che f (continua) ammette estremi assoluti su $[-1, 1]$ (compatto): poiché come visto f è strettamente decrescente nell'intervallo in questione, il massimo e minimo assoluti di f ivi saranno rispettivamente $f(-1) = \frac{4e+1}{e+1} \sim 3{,}2$ e $f(1) = \frac{e-4}{e+1} \sim -0{,}3$.

2. (Vedi Figura 2) Dire che per un certo $M > 0$ si ha $|\frac{x+1}{x^2+1}| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ equivale a dire che $-M \leq \frac{x+1}{x^2+1} \leq M$, ovvero che $-Mx^2 - M \leq x + 1 \leq Mx^2 + M$, cioè $Mx^2 + x + M + 1 \geq 0$ e $Mx^2 - x + M - 1 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: affinché ciò accada è sufficiente che i discriminanti di entrambi i trinomi siano ≤ 0, ovvero che $1 - 4M(M+1) \leq 0$ e $1 - 4M(M-1) \leq 0$, ovvero che $4M^2 + 4M - 1 \geq 0$ e $4M^2 - 4M - 1 \geq 0$, ovvero che $M \geq \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ e $M \geq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$. Dunque se $M \geq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$ si ha $|\frac{x+1}{x^2+1}| \leq M$: poiché $\frac{\sqrt{2}+1}{2} \sim 1{,}2 < \frac{\pi}{2}$ si ha che l'argomento (che ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$) della tangente non può mai diventare del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, perciò il dominio di $g(x) = \operatorname{tg}(\frac{x+1}{x^2+1})$ è tutto $\mathbb{R}$; e nel suo dominio la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$, in particolare derivabile, in particolare continua. Inoltre, poiché evidentemente $\lim_{x \to \mp\infty} g(x) = 0$, la funzione ammette estremi assoluti: il ragionamento per dimostrarlo è abbastanza standard, ed è il seguente. Dopo aver notato che ad esempio si ha $g(1) = \operatorname{tg} 1 > 0$ e $g(-2) = \operatorname{tg}(-\frac{1}{5}) = -\operatorname{tg}\frac{1}{5} < 0$, preso un qualsiasi ε tale che $0 < \varepsilon < \min\{\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg}\frac{1}{5}\} = \operatorname{tg}\frac{1}{5}$ si ha per definizione di limite che esiste $M > 0$ tale che se $|x| > M$ allora $|g(x)| < \varepsilon$ (sarà dunque per forza $M > 2$, perché in $x = -2$ e in $x = 1$ come visto tale condizione non è soddisfatta): ma allora gli estremi assoluti di g sull'intervallo compatto $[-M, M]$ (che esistono per Weierstrass, e sono rispettivamente $\geq \operatorname{tg} 1$ per il massimo e $\leq -\operatorname{tg}\frac{1}{5}$ per il minimo) sono certamente tali anche su tutto $\mathbb{R}$. Il calcolo di tali estremi è immediato, ricordando che per funzioni derivabili essi possono venire assunti solo in punti stazionari (cioè in punti in cui la derivata si annulla): da $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{x+1}{x^2+1})} \frac{(x^2+1) - 2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2 \cos^2(\frac{x+1}{x^2+1})}$ si ha che $g'(x) = 0$ se e solo se $x = -1 \mp \sqrt{2}$, dunque il minimo assoluto è $g(-1-\sqrt{2}) = -\operatorname{tg}(\frac{\sqrt{2}-1}{2}) < 0$ (si noti che è $< -\operatorname{tg}\frac{1}{5}$) mentre il massimo assoluto è $g(-1+\sqrt{2}) = \operatorname{tg}(\frac{\sqrt{2}+1}{2}) > 0$ (si noti che è $> \operatorname{tg} 1$).

Poiché $\varphi(t) := \operatorname{tg} t$ è una funzione dispari, per trovare tre termini significativi del suo sviluppo asintotico in $t = 0$ usando la formula di Taylor dobbiamo calcolare le sue derivate almeno fino alla quinta, ottenendo dopo calcoli $\varphi'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$, $\varphi''(t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}$, $\varphi^{(3)}(t) = \frac{2(3 - 2\cos^2 t)}{\cos^4 t}$, $\varphi^{(4)}(t) = \frac{8 \sin t\,(3 - \cos^2 t)}{\cos^5 t}$ e $\varphi^{(5)}(t) = \frac{8(2\cos^4 t - 15\cos^2 t + 15)}{\cos^6 t}$: essendo $\varphi^{(0)}(0) = \varphi''(0) = \varphi^{(4)}(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, $\varphi^{(3)}(0) = 2$ e $\varphi^{(5)}(0) = 16$ la formula di Taylor dà $\operatorname{tg} t = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + o_0(t^6)$ (sviluppo già noto, e che avevamo calcolato anche con il procedimento "a cascata" dal fatto che $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$). Di questo sviluppo asintotico, per trovare le parti principali di g all'intorno di -1 e di $+\infty$ (punti in cui l'argomento della tangente è infinitesimo) in realtà ci interesserà solo il primo termine, ovvero ci basta sapere che $\operatorname{tg} t \sim_0 t$: ne ricaviamo che $g(x) \sim_{-1} \frac{x+1}{x^2+1} \sim_{-1} \frac{1}{2}(x+1)$ e $g(x) \sim_{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} \sim_{+\infty} \frac{1}{x} = x^{-1}$. Invece in $x=0$ la funzione $g(x)$ è finita, dunque $g(x) \sim_0 g(0) = \operatorname{tg} 1 = (\operatorname{tg} 1)x^0$.

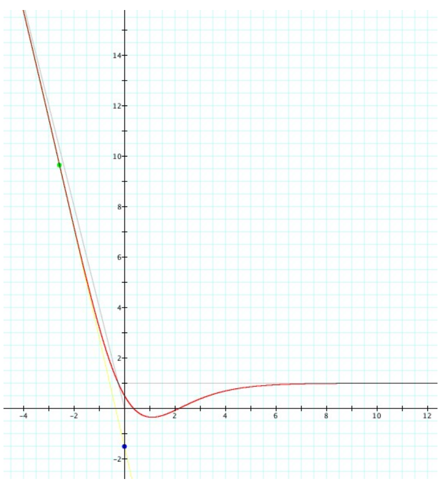
3. $\boxed{f(x) = \sqrt{|\frac{2x}{x-1}|} + x}$ (Vedi Figura 3) La funzione è definita per $x \neq 1$, e nel suo dominio è $\mathcal{C}^\infty$ tranne che in $x=0$ dove a priori è solo continua (ma vedremo meglio dopo cosa succede lì). I limiti interessanti sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ e $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$; dunque f non è limitata in alcun senso. Cercando gli zeri di f si ottiene $\sqrt{|\frac{2x}{x-1}|} = -x$, che nell'ipotesi $x \le 0$ equivale a $|\frac{2x}{x-1}| = \frac{2x}{x-1} = x^2$, da cui $x=0$ oppure $x=-1$ (la soluzione $x=2$ non è accettabile). Quanto al segno, si ha $f(x) > 0$ per $\sqrt{|\frac{2x}{x-1}|} > -x$: se $-x<0$ (cioè se $x>0$) ciò è sempre verificato, mentre se $x \le 0$ equivale a $|\frac{2x}{x-1}| = \frac{2x}{x-1} > x^2$, ovvero $-1 < x < 0$. Si vede facilmente che la retta $y = x + \sqrt{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$, e interseca il grafico in $x = \frac{1}{2}$. Detto $\sigma := \operatorname{sign}(\frac{2x}{x-1})$ (dunque $\sigma = 1$ per $x<0$ o per $x>1$, e $\sigma=-1$ per $0<x<1$), la derivata per $x \neq 0$ è $f'(x) = \frac{\sigma(-\frac{2}{(x-1)^2})}{2\sqrt{|\frac{2x}{x-1}|}} + 1 = 1 - \frac{\sigma}{|x-1|\sqrt{|2x(x-1)|}}$, dunque se $\sigma < 0$ (ovvero per $0<x<1$) si ha sempre $f'(x) > 0$, ovvero f è strettamente crescente, mentre se $\sigma = 1$ (cioè per $x<0$ o per $x>1$) si ha $f'(x) = 0$ per $|x-1|\sqrt{|2x(x-1)|} = |x-1|\sqrt{2x(x-1)} = 1$, ovvero per $(x-1)^2 2x(x-1) = 2x(x-1)^3 = 1$, cioè $(x-1)^3 = \frac{1}{2x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in due punti a e b con $-1<a<0$ e $1<b<2$; e $f'(x) > 0$ per $x<a$ e $x>b$, dal che si deduce che a e b sono rispettivamente di massimo e minimo locale. Notando che $\lim_{x\to 0^\mp} f'(x) = \mp\infty$ si può inoltre concludere che, come era preventivabile, f è continua ma non derivabile in $x=0$ (il grafico ha ivi una cuspide); essendo poi f strettamente decrescente prima e crescente dopo, $x=0$ è un punto di minimo locale singolare. Derivando ulteriormente si può trovare un flesso in $x = \frac{1}{4}$, con f convessa per $\frac{1}{4} < x < 1$ e per $x>1$ e concava altrove.

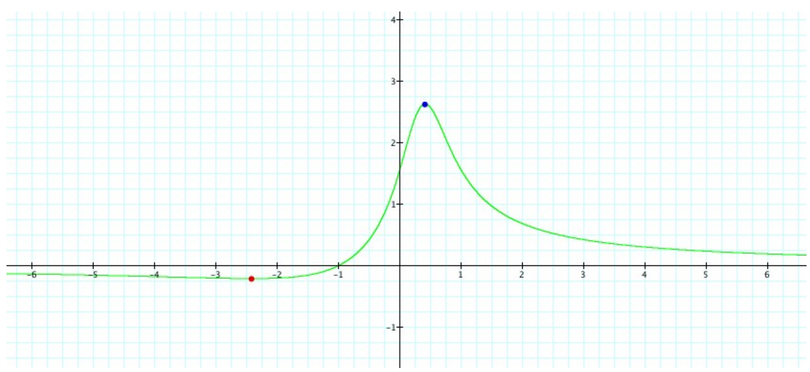
$\boxed{g(x) = \log(1+\sin x) + \cos 2x}$ (Vedi Figura 4) La funzione ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, nel quale è $\mathcal{C}^\infty$; essa non ha parità e ha periodo 2π, dunque la studieremo in $A =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Si ha $g(x) = 0$ quando $\log(1+\sin x) = -\cos 2x$: posto $t = \sin x$ si ottiene $\log(1+t) = 2t^2 - 1$, e il metodo grafico mostra che ciò accade in due punti a, $b \in]-1,1[$ con $a \sim -0{,}5$ e $b \sim 0{,}9$: pertanto g si annulla in A nei quattro punti $x_1 = \arcsin a \sim -0{,}5$, $x_2 = \arcsin b \sim 1{,}1$, $x_3 = \pi - \arcsin b \sim 2$ e $x_4 = \pi - \arcsin a \sim 3{,}5$. Sempre il metodo grafico mostra che $g(x) > 0$ quando $\log(1+t) > 2t^2 - 1$, ovvero per $a<t<b$, e dunque per $x_1 < x < x_2$ e $x_3 < x < x_4$. L'unico limite interessante è quello negli estremi di A, che vale $-\infty$; dunque g è inferiormente illimitata, ma necessariamente limitata superiormente (ragionamento analogo a quello già fatto prima: per Weierstrass, sul compatto $[x_1, x_4]$ la funzione assume massimo assoluto necessariamente >0, che sarà massimo assoluto anche su A perché fuori da $[x_1, x_4]$ la funzione è negativa). Derivando si ottiene $g'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} - 2\sin 2x = -\frac{\cos x\,(4\sin^2 x + 4\sin x - 1)}{1+\sin x}$: si ha $g'(x) = 0$ in $\frac{\pi}{2}$ oppure in $x_1' = \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sim 0{,}2$ e in $x_2' = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{2}-1}{2} \sim 2{,}9$, mentre $g'(x) > 0$ quando $\cos x(\sin x - \frac{\sqrt{2}-1}{2}) < 0$, ovvero per $-\frac{\pi}{2} < x < x_1'$ oppure $\frac{\pi}{2} < x < x_2'$, dunque x_1' e x_2' sono punti di massimo locale (anzi, assoluto in A: in essi vale $g(x_1') = g(x_2') = \log(\frac{\sqrt{2}+1}{2}) + \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \sim 1{,}1$) e $\frac{\pi}{2}$ un punto di minimo locale (con $g(\frac{\pi}{2}) = \log 2 - 1 \sim -0{,}3$). Derivando ancora, dopo calcoli si ottiene $g''(x) = \frac{8\sin^3 x + 8\sin^2 x - 4\sin x - 5}{1+\sin x}$; ponendo $u = \sin x$ e studiando l'andamento del polinomio cubico $p(u) = 8u^3 + 8u^2 - 4u - 5$ (che tende a $\mp\infty$ quando x tende a $\mp\infty$, ha massimo locale <0 in $u = -\frac{\sqrt{10}+2}{6} \sim -0{,}85$ e minimo locale (ovviamente pure <0) in $u = \frac{\sqrt{10}-2}{6} \sim 0{,}2$, vale $p(1) = 7 > 0$ e dunque ha un unico zero in un certo $u_0 \in]0,1[$, che si verifica valere circa $0{,}7$) si vede che g ha dei flessi in $x_1'' = \arcsin u_0 \sim 0{,}85$ e $x_2'' = \pi - \arcsin u_0 \sim 2{,}3$.

4. Come al solito trattiamo da subito i limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$; il caso $\alpha = 2$ uscirà come caso particolare.

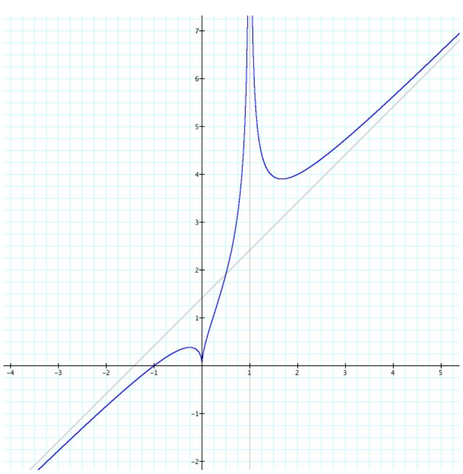
$\boxed{\lim_{-1,\,0,\,+\infty} \frac{\sqrt{x+5}-\alpha}{|x|^\alpha - \sqrt{|x|}}}$ In questo esercizio si intende che $\alpha \neq \frac{1}{2}$. • Quando x tende a -1 il denominatore è infinitesimo, mentre il numeratore tende a $2-\alpha$: dunque se $\alpha \neq 2$ il limite vale ∞ (col segno che dipende da quello di $2-\alpha$, dal fatto che si tende $-1^\mp$ e da quale dei due prevale al denominatore tra $|x|^\alpha$ e $\sqrt{|x|}$: più precisamente, quando x tende a $-1^\mp$ il limite vale $\mp\infty$ quando $\alpha < \frac{1}{2}$, vale $\pm\infty$ quando $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ e vale nuovamente $\mp\infty$ quando $\alpha > 2$). Invece quando $\alpha = 2$ abbiamo $\lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-\sqrt{|x|}}$, in forma indeterminata $\frac{0}{0}$: usando de l'Hôpital si trova $\lim_{x\to-1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{2x - \frac{-1}{2\sqrt{|x|}}} = -\frac{1}{6}$; con Taylor si sviluppano numeratore e denominatore con $\sqrt{x+5} - 2 = (2 + \frac{1}{4}(x+1) + o_{-1}(x+1)) - 2 \sim_{-1} \frac{1}{4}(x+1)$ e $x^2 - \sqrt{|x|} = (1 - 2(x+1) + o_{-1}(x+1)) - (1 + \frac{1}{2}(x+1) + o_{-1}(x+1)) \sim_{-1} -\frac{3}{2}(x+1)$ da cui si ottiene nuovamente $-\frac{1}{6}$; altrimenti, posto $x = -1+t$ lo sviluppo del numeratore è $\sqrt{x+5} - 2 = 2\sqrt{1+\frac{t}{4}} - 2 = 2(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4} + o_0(t)) - 2 \sim_0 \frac{1}{4}t$ e quello del denominatore è $(-1+t)^2 - \sqrt{1-t} = (1 + t^2 - 2t) - (1 + \frac{1}{2}(-t) + o_0(t)) \sim_0 -\frac{3}{2}t$, da cui si ha ancora $-\frac{1}{6}$. • Quando x tende a 0 il denominatore è infinitesimo per $\alpha > 0$ (con trascurabilità di $-\sqrt{|x|}$ se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ e di $|x|^\alpha$ se $\alpha > \frac{1}{2}$), finito per $\alpha = 0$ e infinito per $\alpha < 0$, mentre il numeratore tende a $\sqrt{5} - \alpha$, e dunque è finito se $\alpha \neq \sqrt{5}$ e infinitesimo per $\alpha = \sqrt{5}$. Ne segue che per $\alpha < 0$ il limite vale 0^+, per $\alpha = 0$ vale $\sqrt{5}$, per $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ vale $+\infty$, per $\frac{1}{2} < \alpha < \sqrt{5}$ vale $-\infty$ e per $\alpha > \sqrt{5}$ vale $+\infty$. Resta il solo caso $\alpha = \sqrt{5}$ in cui si ottiene la forma indeterminata $\lim_{x\to 0\mp} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}}-\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0\mp} \frac{\sqrt{5}\sqrt{1+\frac{x}{5}}-\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}}-\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0\mp} \frac{(\sqrt{5}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{5}}+o_0(x))-\sqrt{5}}{-\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0\mp} \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}x}{-\sqrt{|x|}} = 0^\pm$ (in alternativa si poteva usare ad esempio de l'Hôpital riottenendo $\lim_{x\to 0\mp} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}}-\sqrt{|x|}} = \lim_{x\to 0\mp} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{\sqrt{5}\,x^{\sqrt{5}-1}-\frac{\operatorname{sign} x}{2\sqrt{|x|}}} = 0^\pm$). • Infine, quando x tende a $+\infty$ il numeratore è sempre $\sim_{+\infty} \sqrt{x}$ mentre al denominatore si può trascurare x^α oppure $\sqrt{x}$ a seconda che $\alpha \lessgtr \frac{1}{2}$: dunque se $\alpha < \frac{1}{2}$ il limite vale -1 e se $\alpha > \frac{1}{2}$ vale 0^+.

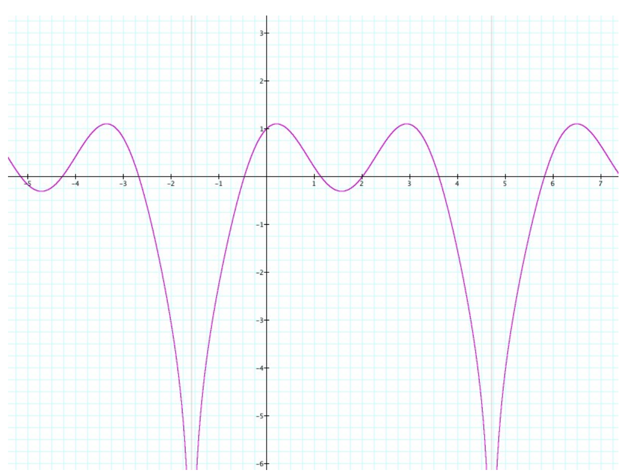
$\boxed{\lim_{-\infty,\ 0^+} \frac{|x|^{\alpha+1}-\operatorname{arctg} x+3x^3}{x^3+\sin 2x^3}\, e^{\frac{\alpha}{x}}}$ • Quando x tende a $-\infty$ il denominatore è un infinito asintotico a x^3, mentre il numeratore è un infinito asintotico a $3x^3$ (se $\alpha < 2$), asintotico a $(-x)^3 + 3x^3 = 2x^3$ (se $\alpha = 2$) e asintotico a $(-x)^{\alpha+1}$ (se $\alpha > 2$). D'altra parte $e^{\frac{\alpha}{x}}$ tende sempre a 1. Dunque il limite vale 3 (se $\alpha < 2$), vale 2 (se $\alpha = 2$) e vale $-\infty$ (se $\alpha > 2$). • Quando x tende a 0^+ il denominatore è un infinitesimo asintotico a $x^3 + 2x^3 = 3x^3$. Quanto al numeratore, converrà ricordare innanzitutto che $\operatorname{arctg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^4)$ (questo sviluppo si può trovare ad esempio con la formula di Taylor, derivando $\operatorname{arctg} x$ fino al terzo ordine): così se $\alpha + 1 > 1$ (cioè se $\alpha > 0$) esso è asintotico a $-\operatorname{arctg} x \sim -x$ perché tutto il resto è $o_0(x)$; se $\alpha = 0$ esso diventa $x - \operatorname{arctg} x + 3x^3 \sim_0 \frac{10}{3}x^3$; se infine $\alpha + 1 < 1$ (cioè se $\alpha < 0$) esso è asintotico a $x^{\alpha+1}$ perché tutto il resto è $o_0(x^{\alpha+1})$. D'altra parte $e^{\frac{\alpha}{x}}$ tende a $+\infty$ (se $\alpha > 0$), è uguale a 1 (se $\alpha = 0$) e tende a 0^+ (se $\alpha < 0$). Dunque se $\alpha > 0$ il limite vale senz'altro $-\infty$; se $\alpha = 0$ vale $\frac{10/3}{3} = \frac{10}{9}$; e se $\alpha < 0$ esso diventa $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha+1}}{3x^3}\, e^{\frac{\alpha}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-2}}{3}\, e^{\frac{\alpha}{x}}$, in forma indeterminata $\infty \cdot 0$, che posto $t = \frac{1}{x}$ diventa $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{2-\alpha}}{3\, e^{(-\alpha)t}} = 0$ (ricordando che $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^\gamma}{e^{\delta t}} = 0$ se $\delta > 0$).





1. Grafico di $f(x) = \frac{e^x - 4x}{e^x + 1}$ dell'ex. 1: in evidenza il punto di intersezione più basso della tangente con l'asse y. **2.** Grafico di $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ dell'ex. 2.





3. Grafico di $f(x) = \sqrt{\left|\frac{2x}{x-1}\right|} + x$ dell'ex. (3.a). **4.** Grafico di $g(x) = \log(1 + \sin x) + \cos 2x$ dell'ex. (3.b).