**ANALISI MATEMATICA I**
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
**Lezione di lunedì 24/11/2014**

# CALCOLO INTEGRALE

L'espressione può far riferimento a due questioni apparentemente indipendenti:

(1) Calcolo delle PRIMITIVE (Anti-derivate) di una data funzione continua.

(2) Calcolo delle AREE di zone limitate del piano sottese da grafici.

Iniziamo oggi dal problema (1)

---

Data una $f : A \to \mathbb{R}$ continua, una sua PRIMITIVA (se esiste!) $F : A \to \mathbb{R}$ (ovvero t.c. $F' = f$) sarà almeno di classe $\mathcal{C}^1$: ovvero, come è naturale aspettarsi, "se derivando la qualità peggiora, integrando migliorerà".

Il problema però è un altro: UNA FUNZ. CONTINUA AMMETTE SEMPRE PRIMITIVE?

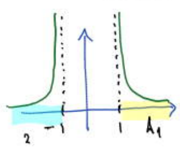
La risposta è: sì. Anzi: se A è un intervallo, la famiglia delle primitive ha una forma particolarmente semplice.

**Prop.** Sia A intervallo, $f : A \to \mathbb{R}$ funzione.
Se $f$ è di classe $\mathcal{C}^k$ (con $k \geq 0$), esiste una primitiva F di classe $\mathcal{C}^{k+1}$.
Inoltre, la famiglia di TUTTE le primitive di $f$ su A è data da
$\{ F + k : k \in \mathbb{R} \}$, ove F è una qualsiasi primitiva di $f$.

Dim. Se $f$ è continua ($\mathcal{C}^0$), mostreremo nelle prossime lezioni che una sua funzione "INTEGRALE D'AREA" è una primitiva di $f$.
Ciò detto, se $f$ è $\mathcal{C}^k$ è chiaro che una sua primitiva $F$ sarà $\mathcal{C}^{k+1}$ (perché $F'=f$, $F''=f'$, $\dots$, $F^{(k+1)}=f^{(k)}$).
Infine, se $F,G : A \to \mathbb{R}$ sono due primitive di $f$, allora $(F-G)' = f-f \equiv 0 \Rightarrow$ poiché $A$ è intervallo, esiste $k \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x)-G(x)=k$ $\forall x \in A$, ovvero $F = G+k$ □

Quanto visto risolve la questione <u>su un intervallo</u>.
Ma SE IL DOMINIO DI $f$ FOSSE UN PLURI-INTERVALLO, QUALE SAREBBE LA STRUTTURA DELLA FAMIGLIA DELLE PRIMITIVE DI $f$?

$\boxed{\text{Ex.}}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ : qui $f : A \to \mathbb{R}$ con $A = ]-\infty,-1[ \ \cup \ ]1,+\infty[$.




Su $A_1 = ]1,+\infty[$ una primitiva di $f$ è $F_1(x) = \operatorname{settcosh} x = \log(x+\sqrt{x^2-1})$
Dunque tutte le primitive di $f$ su $A_1$ sono del tipo $\operatorname{settcosh} x + K_1$.
Su $A_2 = ]-\infty,1[$ una primitiva di $f$ è $F_2(x) = -\operatorname{settcosh}(-x) = -\log(-x+\sqrt{x^2-1})$
Dunque tutte le primitive di $f$ su $A_2$ sono del tipo $-\operatorname{settcosh}(-x) + K_2$
Pertanto le famiglie delle primitive hanno costanti additive $K_1$ e $K_2$ INDIPENDENTI tra loro.

D'ora in poi assumeremo che la ricerca delle primitive si effettui su un <u>intervallo</u>: per quanto appena visto, se il dominio è un plurintervallo si tratta di risolvere il problema per ciascun intervallo in modo indipendente dagli altri.
Notazione per la famiglia delle primitive di $f : A \to \mathbb{R}$ ove $A$ è intervallo:

$$\int f(x)\,dx := \{ F(x) + k : F' = f,\ k \in \mathbb{R} \}$$

INTEGRALE INDEFINITO

Siamo ora in grado di affrontare il problema del CALCOLO CONCRETO DI UNA PRIMITIVA DI UNA DATA FUNZIONE CONTINUA.

Cattiva notizia: data una funzione continua quasi-elementare, trovare una primitiva in forma quasi-elementare è "pura coincidenza", e in ogni caso richiede capacità di analisi ben superiori a quella del derivare (procedimento piuttosto meccanico).

Buona notizia: esistono però vari metodi per integrare classi importanti di funzioni, e di questi ci occuperemo.

Il fatto base è sempre il seguente (per quanto banale possa apparire):

**Prop.** Se $A$ è intervallo e $f: A \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + K$$

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $\int x^\alpha\,dx$ (con $\alpha \neq -1$) $= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + K$ (infatti $\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{|x|}\cdot \operatorname{sign} x = \frac{1}{x}$)
  (ho messo $|x|$ per non perdere dominio rispetto a $1/x$)
- $\int e^x\,dx = e^x + K$ etc...

In realtà, interpretare una funzione da integrare come derivata di un'altra funzione richiede un po' più di "inventiva", che riassumiamo nelle seguenti tabelle.

TABELLA DEGLI INTEGRALI IMMEDIATI.

$$\int \varphi'(x)\, \varphi(x)^{\alpha}\, dx = \frac{\varphi(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K \qquad \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx = \log|\varphi(x)| + K$$

$$\int \varphi'(x)\, e^{\varphi(x)}\, dx = e^{\varphi(x)} + K \qquad \int \varphi'(x) \sin\varphi(x)\, dx = -\cos\varphi(x) + K$$

$$\int \varphi'(x) \cos\varphi(x)\, dx = \sin\varphi(x) + K \qquad \int \frac{\varphi'(x)}{\cos^2\varphi(x)}\, dx = \operatorname{tg}\varphi(x) + K$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2}\, dx = \operatorname{arctg}\varphi(x) + K$$

.... eccetera (vedere sulle dispense)

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $\int x^{\overset{\alpha}{8}}\, dx = \frac{x^9}{9} + K$
- $\int \overset{\frac{\cos x}{\sin x},\ \varphi(x)=\sin x}{\operatorname{cotg} x}\, dx = \log|\sin x| + K$
- $\int \overset{e^x(e^x-1)^{-1/5},\ \varphi(x)=e^x-1,\ \alpha=-1/5}{\frac{e^x}{\sqrt[5]{e^x-1}}}\, dx = \frac{(e^x-1)^{4/5}}{4/5} + K = \frac{5}{4}\sqrt[5]{(e^x-1)^4} + K$
- $\int \frac{\overset{\varphi'(x)}{\cos x - 1}}{\underset{\varphi(x)}{\sin x - x}}\, dx = \log|\sin x - x| + K$
- $\int e^x \cos(\overset{\varphi}{e^x})\, dx = \sin(e^x) + K$.

Al di là della tabella degli integrali immediati, vi è solo una lista di proprietà dell'integrale indefinito più un paio di ricette (sostituzione e parti) che in ultima analisi servono solo a ricondurre il soluzione alla Tabella stessa.

**Prop.** (i) LINEARITÀ: $\displaystyle\int\left(\alpha f(x)+\beta g(x)\right)dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$
per ogni $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(ii) SOSTITUZIONE: data $\underset{t}{B} \xrightarrow[C^1]{\phi} \underset{x}{A} \xrightarrow[\text{continua}]{f} \mathbb{R}$ si ha

$$\left(\int f(x)\,dx\right)(\phi(t)) = \int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

In particolare se $\phi$ è diffeomorfismo posso risostituire $t=\phi^{-1}(x)$:

$$\int f(x)\,dx = \left(\int f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt\right)(\phi^{-1}(x)).$$

(iii) PARTI: se $F'=f$ e $G'=g$, allora $\int Fg = FG - \int fG$

$\int fg' = fg - \int f'g$

fattore finito, fattore differenziale

$$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx$$

**Dim.** (i) ovvio per la linearità delle derivate: se $F'=f$ e $G'=g$, allora $(\alpha F+\beta G)' = \alpha f+\beta g$.

(ii) Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$: devo mostrare che $F(\phi(t))$ è primitiva di $f(\phi(t))\,\phi'(t)$. Infatti

$$F(\phi(t))' = F'(\phi(t))\cdot\phi'(t) = f(\phi(t))\cdot\phi'(t).$$

Se inoltre $\phi$ è diffeo, sia $G(t)$ una primitiva di $f(\phi(t))\,\phi'(t)$: devo mostrare che $G(\phi^{-1}(x))$ è primitiva di $f(x)$. Infatti:

$$\left(G(\phi^{-1}(x))\right)' = G'(\phi^{-1}(x))\cdot\left(\phi^{-1}(x)\right)' = f(\overbrace{\phi(\phi^{-1}(x))}^{x})\cdot\cancel{\phi'(\phi^{-1}(x))}\cdot\frac{1}{\cancel{\phi'(\phi^{-1}(x))}} = f(x).$$

(iii) Per Leibniz abbiamo che $(FG)' = F'G+FG' = fG+Fg$ ovvero $Fg = (FG)' - fG$. Pertanto

$$\int Fg\,dx = \int\left((FG)'-fG\right)dx = \underbrace{\int (FG)'\,dx}_{FG} - \int fG\,dx \qquad \square$$

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $\displaystyle\int \sin x \cos^7 x \, dx =$
  - INT. IMMEDIATO: $\displaystyle -\int \overset{\varphi'}{(-\sin x)} (\overset{\varphi}{\cos x})^7 = -\frac{\cos^8 x}{8} + K$
  - SOSTITUZIONE: $x = \phi(t) = \arccos t \qquad \phi'(t) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$$\int \sin x \cos^7 x \, dx = \int \sin(\arccos t) \cdot t^7 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right) dt$$

$$= \int \cancel{\sqrt{1-t^2}} \cdot t^7 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-t^2}}}\right) dt = -\int t^7 dt = -\frac{t^8}{8} + K = -\frac{\cos^8 x}{8} + K$$

Meglio in questo caso effettuare una "sostituzione a ritroso"

$$\int \underbrace{f(x)}_{g(\alpha(x))\,\alpha'(x)} dx \overset{t=\alpha(x)}{=} \left(\int g(t)\, dt\right)\Bigg|_{t=\alpha(x)}$$

Nel nostro caso: $\alpha(x) = \cos x$, $g(t) = -t^7$, $\alpha'(x) = -\sin x$:

$$\int \sin x \cos^7 x \, dx = \int (-t^7)\, dt$$

In concreto: ho posto $\cos x = t$, e ho "differenziato ambo i membri":
$-\sin x \, dx = dt$, sostituendo poi il "pacchetto" $-\sin x \, dx$
direttamente con $dt$:
$$\int \underbrace{\sin x \, dx}_{=-dt} \, \underbrace{\cos^7 x}_{\cos x = t} = \int t^7 \cdot (-dt) = \dots$$

- $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-2x} \, dx =$
  - $\displaystyle\int (1-2x)^{1/3} dx = -\frac{1}{2}\int \overset{\varphi'}{(-2)} (\overset{\varphi}{1-2x})^{1/3} dx =$
    $\displaystyle\left[= -\frac{1}{2} \frac{(1-2x)^{4/3}}{4/3} + K = -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3} + K\right.$
  - ...

... $1-2x = t \Rightarrow -2\,dx = dt \qquad dx = -\frac{1}{2} dt$

$$\int \sqrt[3]{1-2x}\, dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \left(-\frac{1}{2} dt\right) = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\, dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{4/3}}{4/3} + K = \dots$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}} dx \qquad x = \phi(t) = t^2 \qquad \int \frac{1}{t^2+t} \cdot 2t\, dt = 2\int \frac{\overset{\varphi'}{1}}{\underset{\varphi}{t+1}} dt$

$$= 2\log|t+1| + K = 2\log(\sqrt{x}+1) + K$$

- $\displaystyle\int \overset{F}{x} \overset{g}{\sin x}\, dx \overset{f=1 \quad G=-\cos x}{=} x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx \qquad \int Fg = FG - \int fG$

$$= -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + K$$

$\boxed{\text{Ex}}$ Determinare i seguenti integrali indefiniti usando le tabelle degli integrali immediati, ed eventualmente i metodi di sostituzione e di integrazione per parti:

Trucco: $\underbrace{1}_{g} \cdot \underbrace{\log x}_{F}$

- $\int x^2 e^x \, dx$ • $\int \log x \, dx$ • $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$ • $\int \operatorname{arctg} x \, dx$
- $\int x^2 \log x \, dx$ • $\int \frac{3x}{2+x^4} \, dx$ • $\int \left(\sqrt{5-3x} - 2e^{\sqrt{x}}\right) dx$ • $\int \log(\sqrt{x}+1) \, dx$

Form. bisezione  $= \sin x (1-\cos^2 x) \ldots$

- $\int \sin^2 x \, dx$ • $\int \left(\frac{3}{4+7x} - 5 \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) dx$ • $\int \sin^3 x \, dx$
- $\int x^2 \sin x \, dx$ • $\int \sqrt{x} \log x \, dx$ • $\int \left(3e^{2x} - 3\cos(3x-1)\right) dx$ • $\int \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$
- $\int \left(2x - \sqrt[4]{x-1}\right) dx$ • $\int \left(2\cos 3x - 3 \cdot 2^{1-2x}\right) dx$ • $\int \left(e^{2x} - e^x\right) \cos(e^x) \, dx$

Porre $t = \operatorname{tg} x/2$ e usare le formule parametriche

- $\int \frac{1}{\sin x} dx$ • $I_n = \int \sin^{2n}(x) \, dx \quad (n \in \mathbb{N})$

Trovare una formula per ricorrenza che leghi $I_n$ a $I_{n-1}$.
Sugg: $\sin^{2n} x = \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{\sin^{2n-1}(x)}_{F}$

---

· INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI $\quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ← polinomi.

1° caso (il più facile): $\deg Q(x) = 0$, ovvero $Q$ = costante.

Si tratta dunque di integrare un polinomio $P(x)$, cosa che sappiamo fare.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\int \left(\frac{2}{5}x^7 - 8x^3 + x - 5\right) dx = \frac{2}{5} \frac{x^8}{8} - 8 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 5x + K.$

2° caso: deg $Q(x) = 1$, ovvero $Q(x) = ax+b$ con $a \neq 0$.

$$\int \frac{P(x)}{ax+b}\,dx$$

Conviene porre $ax+b = t$, così dopo il cambio la funzione integranda diventa un polinomio più un eventuale addendo $\alpha/t$.

$\boxed{\text{Ex.}}$

$$\int \frac{3x^3-x+5}{2x+1}\,dx \quad \begin{pmatrix} 2x+1=t \\ x=\frac{t-1}{2} \\ dx = 1/2\,dt \end{pmatrix} = \int \frac{3/8\,(t-1)^3 - \frac{t-1}{2}+5}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{16}\int \frac{3(t-1)^3-4(t-1)+40}{t}\,dt = \frac{1}{16}\int\frac{3t^3-9t^2+9t-3-4t+4+40}{t}\,dt$$

$$= \frac{1}{16}\int\frac{3t^3-9t^2+5t+41}{t}\,dt = \frac{1}{16}\int\left(3t^2-9t+5+\frac{41}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{16}\left(t^3-\frac{9}{2}t^2+5t+41\log|t|\right)+K$$ e poi mettere $t=2x+1$.

Lo stesso procedimento funziona se il denominatore è una qualsiasi potenza naturale di un binomio di 1° grado.

$\boxed{\text{Ex.}}$

$$\int\frac{x^2-3}{(x-2)^5}\,dx \quad \begin{pmatrix} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{pmatrix} = \int\frac{t^2+4t+4-3}{t^5}\,dt$$

$$= \int\left(t^{-3}+4t^{-4}+t^{-5}\right)dt = \frac{t^{-2}}{-2}+4\,\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-4}}{-4}+K$$

$$= -\frac{1}{2(x-2)^2}-\frac{4}{3(x-2)^3}-\frac{1}{4(x-2)^4}+K.$$

Addirittura, uscendo per un attimo dall'àmbito delle funzioni razionali, sotto potrei avere una qualsiasi potenza reale di un binomio di 1° grado.

$\boxed{\text{Ex.}}$

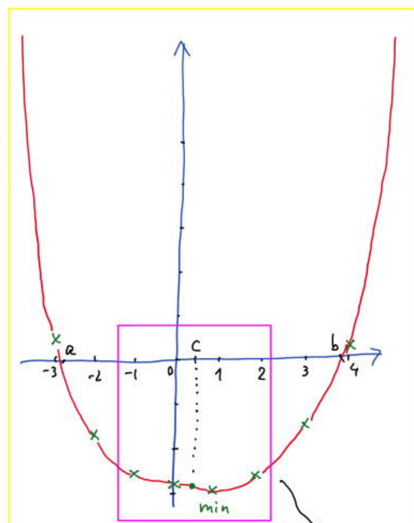
$$\int\frac{x^2+x-1}{\sqrt[5]{x+1}}\,dx \quad \begin{pmatrix} x+1=t \\ dx=dt \\ x=t-1 \end{pmatrix} \quad \int\frac{t^2-2t+1+t-1-1}{t^{1/5}}\,dt$$

$$= \int\left(t^{9/5}-t^{4/5}-t^{-1/5}\right)dt = \frac{t^{14/5}}{14/5}-\frac{t^{9/5}}{9/5}-\frac{t^{4/5}}{4/5}+K =$$

$$= \frac{5}{14(x+1)^2\sqrt[5]{(x+1)^4}}-\frac{5}{9(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^4}}-\frac{5}{4\sqrt[5]{(x+1)^4}}+K$$

RISOLUZIONE DI ALCUNI DEGLI ESERCIZI
DI STUDIO DI FUNZIONE NON SVOLTI IN AULA

(10) $\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\log(x^2+4) + 2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$

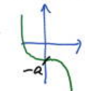


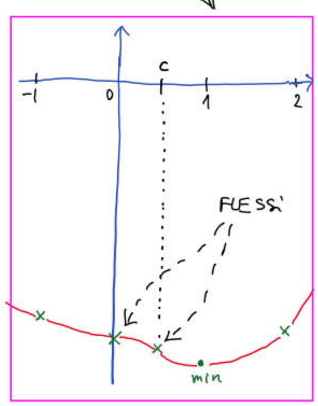

Dominio: $\mathbb{R}$. Classe $C^\infty$.
Per una funzione così è chiaramente complicato studiare zeri e segno, anche il confronto grafico. Cerchiamo allora di trarre il massimo profitto dalle informazioni di altro tipo che riusciremo ad ottenere.
Ad esempio gli sviluppi:

- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + o_{\pm\infty}(x)$ ($f$ asintotica a parabola)
- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\left(\log\left(1+\frac{x^2}{4}\right) + \log 4\right) + 2\left(\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o_0(x^4)\right)$

$$= \cancel{\frac{1}{2}x^2} - \cancel{x} - 2\left(\cancel{\frac{x^2}{4}} + o_0(x^3) + 2\log 2\right) + \cancel{x} - \frac{x^3}{12} + o_0(x^4)$$

$$= -4\log 2 - \frac{x^3}{12} + o_0(x^4) \underset{0}{\sim} -4\log 2 - \frac{x^3}{12}$$

(dunque $f$ per $x \sim 0$ si comporta come una cubica del tipo $-a - bx^3$ con $a, b > 0$:  probabile flesso orizzontale!)




Limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right) = +\infty$

Derivata: $f'(x) = x-1-2\cdot\frac{2x}{x^2+4}+2\,\frac{1/2}{1+x^2/4} = \frac{x^2(x-1)}{x^2+4}$.

| | | 0 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | | $+$ | | |
| $f$ | → | | → | | ↗ |
| | | | | min | |

$f'(x)=0 \iff (x=0)\vee(x=1)$ ; $f'(x)>0 \iff x>1$

Dunque $x=0$ è flesso orizzontale (come atteso!), mentre $x=1$ è pto di minimo.

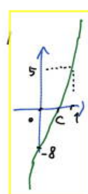
Ora, ragioniamo: per $x\to\pm\infty$ $f$ tende a $+\infty$ (in modo parabolico); è $C^\infty$ (in particolare continua), è strettamente decrescente fino a $x=1$ e strettamente crescente dopo, con minimo assoluto $f(1)=\frac{1}{2}-1-2\log 5 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} \sim -\frac{1}{2}-2\cdot 1{,}6+2\cdot 0{,}5 \sim -2{,}8$ (valore negativo): per il Teorema degli zeri ne segue che $f$ AVRÀ ESATTAMENTE DUE ZERI, uno prima di $x=1$ e uno dopo. Per localizzarli in modo qualitativo può essere sufficiente stimare i valori di $f$ negli interi vicini a $x=1$:

$f(-3) = 9/2+3-2\log 13+2\operatorname{arctg}(-3/2) \sim 0{,}4 > 0$ ← cambio segno!
$f(-2) = 2+2-2\log 8+2\operatorname{arctg}(-1) \sim -1{,}7 < 0$
$f(-1) = 1/2+1-2\log 5+2\operatorname{arctg}(-1/2) \sim -2{,}6 < 0$
$f(0) = -4\log 2 \sim -2{,}7 < 0$
$f(1) = 1/2-1-2\log 5+2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \sim -2{,}8 < 0$ (minimo ass.)
$f(2) = 2-2-2\log 8+2\operatorname{arctg} 2 \sim -2{,}6 < 0$
$f(3) = 9/2-3-2\log 13+2\operatorname{arctg} 3/2 \sim -1{,}6 < 0$ ← cambio segno!
$f(4) = 8-4-2\log 20+2\operatorname{arctg} 2 \sim 0{,}2 > 0$

Pertanto $f$ si annulla in $x=a$ con $-3<a<-2$ e in $x=b$ con $3<b<4$.

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{(3x^2-2x)(x^2+4)-2x^3(x-1)}{(x^2+4)^2} = \frac{x\,(x^3+12x-8)}{(x^2+4)^2}$.

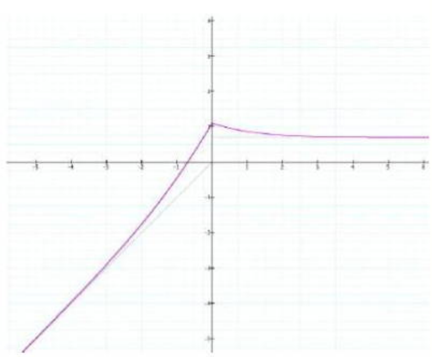
Esaminiamo la cubica $\varphi(x) := x^3+12x-8$ : per $x\to\pm\infty$ tende a $\pm\infty$, la derivata $\varphi'(x)=3x^2+12$ è $>0$ e dunque $\varphi(x)$ è strettamente crescente, ed essendo $\varphi(0)=-8<0$ e $\varphi(1)=5>0$ esiste uno e un solo $c\in\,]0,1[$ t.c. $\varphi(c)=0$, con $\varphi(x)>0 \iff x>c$.



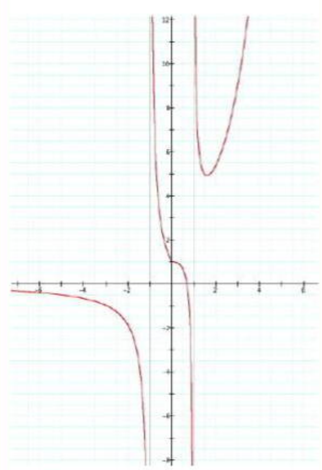

Ne segue che $f''(x)=0 \iff (x=0)\vee(x=c)$, e che $f''(x)>0 \iff (x<0)\vee(x>c)$ : pertanto $f$ è strett. convessa per $x<0$ e per $x>c$, ed ammette flessi in $x=0$ e in $x=c$.

(11) $\boxed{f(x) = \log(2e^x+1) - |x|}$

(Figura 1) La funzione $f(x) = \log(2e^x+1) - |x|$ è definita purché $2e^x+1 > 0$, il che è sempre vero: dunque il dominio è tutto $\mathbb{R}$. • Si ha $f(x) \geq 0$ quando $\log(2e^x+1) \geq |x|$, ovvero (esponenziando ambo i membri) quando $2e^x + 1 \geq e^{|x|}$. Se $x \geq 0$ ciò dà $2e^x+1 \geq e^x$, ovvero $e^x + 1 \geq 0$, sempre vera come $> 0$ e mai come $= 0$ (dunque per $x \geq 0$ la funzione è strettamente positiva, e priva di zeri); mentre se $x < 0$ ciò dà $2e^x + 1 \geq e^{-x}$, che moltiplicando per $e^x$ equivale a $2e^{2x} + e^x \geq 1$, cioè $2e^{2x} + e^x - 1 \geq 0$, che posto $t = e^x$ dà $2t^2 + t - 1 \geq 0$, con soluzioni $t = e^x \leq -1$ (impossibile) oppure $t = e^x \geq \frac{1}{2}$, che dà $x \geq \log\frac{1}{2} = -\log 2 \sim -0{,}7$ (dunque per $x < 0$ la funzione si annulla in $x = -\log 2$, ed è strettamente positiva dopo). • I limiti interessanti sono in $\mp\infty$. In $-\infty$ il limite è determinato, e vale $-\infty$; invece il limite in $+\infty$ è in forma indeterminata $+\infty - \infty$, ma possiamo scrivere $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(\log(2e^x+1) - x) = \lim_{x\to+\infty}(\log(2e^x+1) - \log e^x) = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{2e^x+1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\log(2+e^{-x}) = \log 2$. Dunque a $+\infty$ c'è l'asintoto orizzontale $y = \log 2$; notiamo che per $x > 0$ l'equazione $f(x) = \log 2$ non è mai verificata (esponenziando ambo i membri equivarrebbe a $(2e^x+1)e^{-x} = 2$, ovvero $e^{-x} = 0$, impossibile), dunque poiché $f(0) = \log 3 > \log 2$ la funzione tende all'asintoto orizzontale decrescendo da sopra. Per $-\infty$ notiamo che vale $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\log(2e^x+1)+x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{\log(2e^x+1)}{x}+1)}{x} = 1$, e che $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to-\infty}\log(2e^x+1) = 0$, dunque $y = x$ è asintoto obliquo a $-\infty$; notiamo che per $x < 0$ l'equazione $f(x) = x$ non è mai verificata (esponenziando ambo i membri equivarrebbe a $(2e^x+1)e^x = e^x$, ovvero $2e^{2x} = 0$, impossibile), dunque la funzione tende anche all'asintoto obliquo restandovi sopra. Derivando, per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x+1} - \operatorname{sign} x$. Per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x+1} + 1 > 0$, dunque $f$ è strettamente crescente, mentre per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x+1} - 1 = -\frac{1}{2e^x+1} < 0$, dunque $f$ è strettamente decrescente. Ne ricaviamo anche che in $x = 0$ c'è necessariamente un punto di massimo assoluto per la funzione, con $f(0) = \sqrt{3}$; e si tratta di un punto angoloso, in quanto $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{5}{3}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{3}$. Infine, derivando ancora si ottiene $f''(x) = 2\frac{e^x}{(2e^x+1)^2} > 0$, dunque $f$ è strettamente convessa sia per $x < 0$ che per $x > 0$.



(Ex. 11)



(Ex 12)

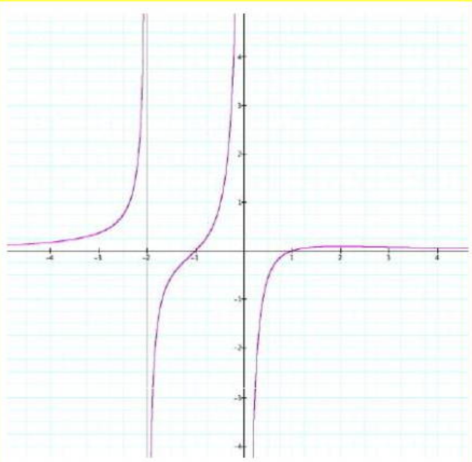
(12) $\boxed{f(x) = \dfrac{e^x - 2}{|x| - 1}}$

(Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{e^x-2}{|x|-1}$ è definita per $x \neq \mp 1$, e nel dominio è derivabile infinite volte tranne che in $x = 0$ dove, a causa del modulo, è solo continua ed è probabile un punto angoloso. Vale $f(x) = 0$ quando $e^x = 2$, ovvero $x = \log 2$. Il numeratore è positivo per $x > \log 2$, il denominatore per $x < -1$ oppure $x > 1$, dunque vale $f(x) > 0$ per $-1 < x < \log 2$ oppure per $x > 1$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$ e in $\mp 1$: quelli determinati sono $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to -1^\mp} f(x) = \lim_{x\to 1^\mp} f(x) = \mp\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è in forma determinata ma si vede subito (con de l'Hôpital, o raccogliendo $e^x$ sopra e $x$ sotto) che vale $+\infty$: dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, $x = \mp 1$ sono asintoti verticali bilateri, ed essendo $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ non c'è asintoto obliquo a $+\infty$ (in effetti la crescenza è a tutti gli effetti di tipo esponenziale). Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{e^x(|x|-1-\sigma)+2\sigma}{(|x|-1)^2}$ ove $\sigma = \operatorname{sign} x$ (dunque $\sigma = \mp 1$ a seconda che $x \lessgtr 0$). Per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = \frac{e^x(x-2)+2}{(x-1)^2}$, dunque vale $f'(x) \geq 0$ quando $e^x(x-2) + 2 \geq 0$, ovvero $x - 2 \geq -2e^{-x}$: un accurato confronto grafico tra la funzione lineare $x - 2$ e l'esponenziale $-2e^{-x}$ mostra che esiste $x_1 \in ]1, 2[$ tale che ciò è verificato per $x \geq x_1$, e ciò prova che $f(x)$ decresce su $]0, 1[$ e su $]1, x_1[$ e cresce in $]x_1, +\infty[$, dunque $x = x_1$ è punto di minimo locale (con $f(x_1) \sim 4{,}9$). Invece quando $x < 0$ si ha $f'(x) = -\frac{x\,e^x+2}{(x+1)^2}$, dunque vale $f'(x) \geq 0$ quando $x\,e^x + 2 \leq 0$, ovvero $x \leq -2e^{-x}$, ma per $x < 0$ ciò non si verifica mai: dunque $f(x)$ decresce in $]-\infty,-1[$ e in $]-1,0[$. Notiamo anche che $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, dunque come previsto $x = 0$ è effettivamente un punto angoloso. Derivando ulteriormente si ha $f''(x) = \frac{e^x(x^2-2(1+\sigma)x+3+2\sigma)-4}{(|x|-1)^3}$. Per $x > 0$ si ottiene $f''(x) = \frac{e^x(x^2-4x+5)-4}{(x-1)^3}$: il numeratore è $\geq 0$ quando $x^2 - 4x + 5 \geq 4e^{-x}$, e un altro accurato confronto grafico tra la funzione quadratica $x^2 - 4x + 5$ (il grafico è una parabola) e l'esponenziale $4e^{-x}$ mostra che per $x > 0$ ciò è sempre vero; d'altra parte il denominatore è $\geq 0$ per $x > 1$, dunque vale $f$ è concava per $0 < x < 1$ e convessa per $x > 1$. Invece per $x < 0$ si ha $f''(x) = -\frac{e^x(x^2+1)-4}{(x+1)^3}$; il numeratore è $\geq 0$ quando $x^2 + 1 \geq 4e^{-x}$, e sempre un confronto grafico mostra che per $x < 0$ ciò è sempre falso; d'altra parte il denominatore è $\geq 0$ per $x > -1$, dunque $f$ è concava per $x < -1$ e convessa per $-1 < x < 0$.

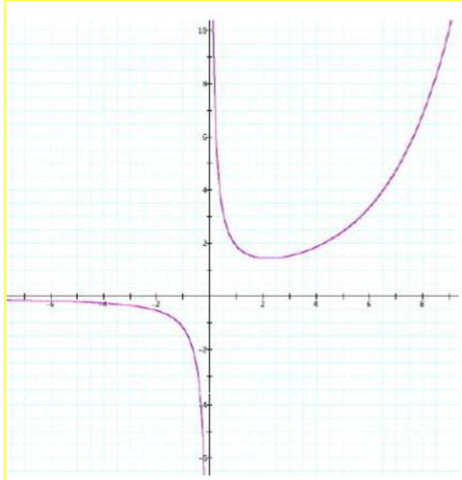
---

(13) $\boxed{f(x) = \dfrac{\log|x|}{x^2+2x}}$

(Figura 1) La funzione $f(x) = \frac{\log|x|}{x^2+2x}$ è definita per $x \neq -2, 0$, e nel dominio è derivabile infinite volte. Vale $f(x) = 0$ quando $\log|x| = 0$, ovvero $x = \mp 1$. Il numeratore è positivo per $|x| > 1$ (ovvero $x < -1$ oppure $x > 1$), il denominatore per $x < -2$ oppure $x > 0$, dunque vale $f(x) > 0$ per $x < -2$, $-1 < x < 0$ o $x > 1$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$, $-2^{\mp}$ e in $0^{\mp}$: i limiti $\lim_{x\to -2^{\mp}} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x)$ sono determinati e valgono $\pm\infty$, mentre $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)$ è in forma indeterminata ma si vede subito (con de l'Hôpital, o raccogliendo $x^2$ sotto) che vale $0^+$: dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$, mentre $x = -2$ e $x = 0$ sono asintoti verticali bilateri. Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2+2x)-(2x+2)\log|x|}{(x^2+2x)^2} = \frac{x+2-2(x+1)\log|x|}{(x^2+2x)^2}$: si ha dunque $f'(x) = 0$ se e solo se $\log|x| = \frac{x+2}{2(x+1)}$, e un confronto grafico tra $\log|x|$ (il logaritmo simmetrizzato) e $\frac{x+2}{2(x+1)}$ (un'omografica con asintoti $x = -1$ e $y = \frac{1}{2}$ e che si annulla per $x = -2$) mostra senza dubbio che ciò accade in un unico punto $x = \alpha$ con $1 < \alpha < 2$ (vale in realtà $\alpha \sim 1{,}95$). Similmente, se $x \gtrless -1$ si ha poi $f'(x) > 0$ quando $\log|x| \lessgtr \frac{x+2}{2(x+1)}$, e sempre per confronto grafico ciò accade per $x < \alpha$: in altre parole $f$ è strettamente crescente per $x < -2$, $-2 < x < 0$ e $0 < x < \alpha$ e strettamente decrescente per $x > \alpha$, pertanto ammette un massimo locale in $x = \alpha$ (che in realtà è piuttosto basso, vale $f(\alpha) \sim 0{,}08$).



(Ex. 13)



(Ex. 14)

(14) $\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}}$

(Figura 1) Poiché $e^x + 1 > 0$, la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{e^x+1}}{x}$ è definita per $x \neq 0$, e nel dominio è derivabile infinite volte. La funzione non si annulla mai, e vale $f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$ e in $0^{\mp}$: quelli determinati sono $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \mp\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è in forma determinata ma si vede facilmente (con de l'Hôpital, o raccogliendo $e^x$ sopra e $x$ sotto) che vale $+\infty$: dunque $x = 0$ è asintoto verticali bilateri, $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, ed essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{e^x+1}}{x^2} = +\infty$ (stessa dimostrazione di prima) non c'è asintoto obliquo a $+\infty$. Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}x - \sqrt{e^x+1}}{x^2} = \frac{xe^x - 2(e^x+1)}{2x^2\sqrt{e^x+1}} = \frac{(x-2)e^x - 2}{2x^2\sqrt{e^x+1}}$, dunque vale $f'(x) \geq 0$ dove $(x-2)e^x \geq 2$, ovvero (dividendo per $e^x > 0$) dove $x - 2 \geq 2e^{-x}$, e un confronto grafico tra $y = x - 2$ (retta) e $y = 2e^{-x}$ (esponenziale simmetrizzato e raddoppiato di valore) mostra chiaramente che ciò accade quando $x \geq a$ per un certo $2 < a < 3$ (vale in realtà $a \sim 2{,}2$): dunque$f$ è strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, a[$ e strettamente crescente su $]a, +\infty[$, dunque $x = a$ è punto di minimo locale (con $f(a) \sim 1{,}4$).

Sviluppi: $\underline{x \sim 0}$ $\quad f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}\sqrt{\frac{e^x+1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x}\sqrt{1+\frac{e^x-1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{x}\left(1+\frac{e^x-1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{2}\right)^2 + \theta_0(x^2)\right)$

$$= \frac{\sqrt{2}}{x}\left(1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\theta(x^2)\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(x^2+\theta(x^2)\right) + \theta(x^2)\right) = \frac{\sqrt{2}}{x}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2+\theta(x^2)\right)$$

$$\left[ = \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}x + \theta_0(x) \right.$$

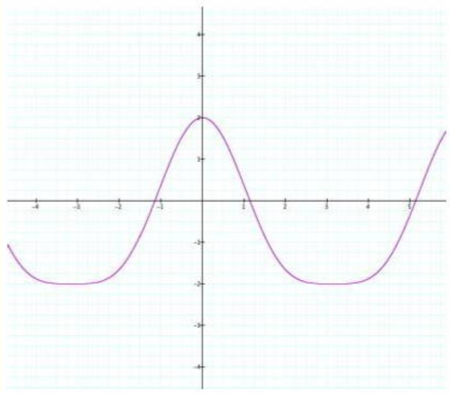
$\underline{x \sim +\infty}$ $\quad f(x) = \frac{e^{x/2}}{x}\sqrt{1+e^{-x}} = \frac{e^{x/2}}{x}\left(1+\frac{1}{2}e^{-x} + \theta_{+\infty}(e^{-x})\right)$

$$= \frac{e^{x/2}}{x} + \frac{1}{2}\frac{e^{-x/2}}{x} + \theta_{+\infty}\left(\frac{e^{-x/2}}{x}\right)$$

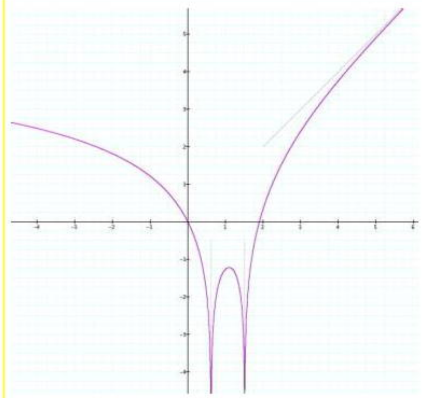
$\underline{x \sim -\infty}$ $\quad f(x) = \frac{\sqrt{1+e^x}}{x} = \frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2}e^x + \theta_{-\infty}(e^x)\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{e^x}{x} + \theta_{-\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right)$

(16) $\boxed{f(x) = 2\cos x - \sin^2 x}$

(c) $[f(x) = 2\cos x - \sin^2 x]$ La funzione ha dominio $\mathbb{R}$, periodo $2\pi$ ed è pari: conviene dunque studiarla in $[-\pi, \pi]$. Essa è ovunque $\mathcal{C}^\infty$, vale $f(-\pi) = f(\pi) = -2$ e $f(0) = 0$; poiché $|f(x)| \leq 2|\cos x| + |\sin^2 x| \leq 3$, la funzione è limitata. Da $f(x) = \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$ si ottiene $\cos x = -\sqrt{2} - 1$ (impossibile) oppure $\cos x = \sqrt{2} - 1$: posto $\alpha = \arccos(\sqrt{2} - 1)$, poiché $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ si ha che $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e vale $f(x) = 0$ per $x = \pm\alpha$. Quanto al segno, la disequazione $f(x) = \cos^2 x + 2\cos x - 1 > 0$ è soddisfatta per $\cos x < -\sqrt{2} - 1$ (impossibile) oppure $\cos x > \sqrt{2} - 1$, vero per $-\alpha < x < \alpha$. La derivata risulta $f'(x) = -2\sin x - 2\sin x\cos x = -2\sin x(1 + \cos x)$: vale $f'(x) = 0$ per $x = \pm\pi$ e $x = 0$, e $f'(x) > 0$ quando $\sin x < 0$, ovvero per $-\pi < x < 0$: se ne deduce che $f$ cresce strettamente per $-\pi < x < 0$ e decresce strettamente per $0 < x < \pi$, dunque $x = \pm\pi$ e $x = 0$ sono rispettivamente punti di minimo e massimo relativi (in realtà assoluti) a quota $-2$ e $2$. La derivata seconda è $f''(x) = -2(\cos x(1 + \cos x) + \sin x(-\sin x)) = -2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$: vale $f''(x) = 0$ per $x = \pm\pi$ e $x = \pm\frac{\pi}{3}$, e $f''(x) > 0$ quando $\cos x < \frac{1}{2}$, ovvero per $-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} < x < \pi$: dunque $f$ è strettamente convessa all'esterno di $\pm\frac{\pi}{3}$ e strettamente concava all'interno, così che $x = \pm\frac{\pi}{3}$ sono flessi con quota $f(\pm\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$ e pendenza $f'(\pm\frac{\pi}{3}) = \mp\frac{3\sqrt{3}}{2}$.



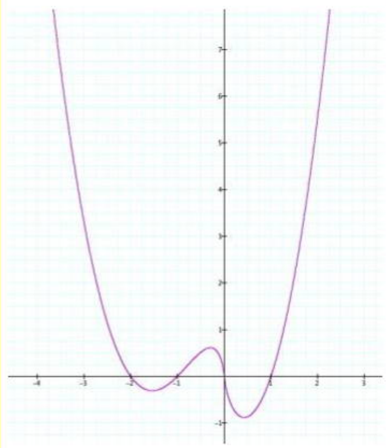
(Ex. 16)



("Ex. 17)

(17) $\boxed{f(x) = \log|e^x - 3x|}$

(e) $[f(x) = \log|e^x - 3x|]$ Il dominio è dato dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che $e^x \neq 3x$. Ma il grafico di $e^x$ e quello di $3x$ si intersecano o no? Imponendo alla retta tangente $y - e^c = e^c(x - c)$ di passare per l'origine si trova $c = 1$ e la retta $y = ex$: essendo $3 > e$ e l'esponenziale strettamente convesso, esisteranno esattamente due punti $\alpha$ e $\beta$ (con $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ essendo $(e^x)_{x=2} = e^2 > 6 = (3x)_{x=2}$) per cui $e^x \neq 3x$. Il dominio è dunque $\mathbb{R}\setminus\{\alpha, \beta\}$, ed in esso la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\beta} f(x) = -\infty$. Vale $f(0) = 0$, mentre $f(x) = 0$ se e solo se $|e^x - 3x| = 1$, cioè $e^x = 3x - 1$ (impossibile) o $e^x = 3x + 1$ (che accade per $x = 1$ e $x = \gamma$ con $\beta < \gamma < 2$, essendo $(e^x)_{x=2} = e^2 > 7 = (3x + 1)_{x=2}$); quanto a $f(x) > 0$, esso vale quando $|e^x - 3x| > 1$, ovvero $e^x < 3x - 1$ (impossibile) o $e^x > 3x + 1$ (che accade per $x < 0$ e $x > \gamma$). La funzione non ha asintoto obliquo a $-\infty$ (si noti che $f(x) \sim_{-\infty} \log|x|$) mentre ha $y = x$ come asintoto obliquo a $+\infty$ (infatti $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x - 3x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 3}{e^x - 3x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}(\log(e^x - 3x) - \log e^x) = \lim_{x\to+\infty} \log \frac{e^x - 3x}{e^x} = 0$), e da $f(x) = x$ si ha $|e^x - 3x| = e^x$, ovvero $e^x - 3x = -e^x$ (impossibile) o $e^x - 3x = e^x$ (da cui $x = 0$). La derivata è $f'(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 3x}$; si ha $f'(x) = 0$ per $x = \log 3 \sim 1,1$ e $f'(x) > 0$ (cioè $f$ strettamente crescente) per $\alpha < x < \log 3$ e $x > \beta$: dunque $x = \log 3$ è un punto di massimo locale, con $f(\log 3) = \log(3(\log 3 - 1)) \sim \log \frac{1}{3} = -\log 3 \sim -1,1$. Infine si ricava $f''(x) = -\frac{9}{(e^x - 3x)^2}((x - 2)e^x + 3)$. Il confronto grafico tra le funzioni $e^x$ e $-\frac{3}{x-2}$ risulta troppo delicato tra 0 e 2 (le due funzioni sono estremamente vicine; in particolare, in $x = 0$ la seconda sta sopra la prima ma ha pendenza inferiore...), dunque conviene procedere come segue: considerando la funzione derivabile $\varphi(x) = (x - 2)e^x + 3$ si ha $\varphi'(x) = (x - 1)e^x$, dunque $\varphi(x)$ ha minimo assoluto in $x = 1$, in cui vale $\varphi(1) = 3 - e \sim 0,3 > 0$: dunque $\varphi(x)$ è sempre positiva, e ne deduciamo che $f''(x) < 0$ (ovvero, $f$ è concava) in ogni $x$ del suo dominio.



(Ex. 19)

(19) $\boxed{f(x) = (x^2+2x)\lg|x|}$

**(g)** $[f(x) = (x^2 + 2x)\log|x|]$ La funzione non è periodica, non ha parità, ed ha come dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; vale poi, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e (usando il noto $\lim_{t\to 0^\pm} t\log|t| = 0^\mp$) $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 0^\mp$. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se (nel dominio) $x^2 + 2x = 0$ oppure $\log|x| = 0$, ovvero se e solo se (nel dominio) $x = -2, -1, 1$. Vediamo ora il segno. Si ha $x^2 + 2x > 0$ se e solo se $x < -2$ oppure $x > 0$, mentre $\log|x| > 0$ se e solo se $|x| > 1$, cioè se e solo se $x < -1$ oppure $x > 1$: da ciò deduciamo che sarà $f(x) > 0$ se e solo se $x < -2$, $-1 < x < 0$ oppure $x > 1$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ nel suo dominio, ed è priva di asintoti lineari. La derivata risulta $f'(x) = (2x + 2)\log|x| + \frac{x^2+2x}{x} = 2(x + 1)\log|x| + x + 2$. Si ha allora $f'(x) = 0$ se e solo se $2(x + 1)\log|x| + x + 2 = 0$; se $x = -1$ ciò è falso, e se $x \neq -1$, dividendo per $x + 1$, ciò vale se e solo se $\log|x| = -\frac{x+2}{2(x+1)}$. La funzione al primo membro è la nota $\log|x|$ (il cui grafico si ottiene "riflettendo quello di $\log x$ rispetto all'asse $y$"), mentre la funzione al secondo membro è la funzione affine con asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{2}$, asintoto verticale $x = -1$ e che vale $-1$ per $x = 0$; un semplice confronto grafico tra le due funzioni mostra chiaramente l'esistenza di tre punti $a, b, c$ con $-2 < a < -1 < b < 0 < c < 1$ in cui i loro grafici si intersecano. Per il segno di $f'(x)$, notiamo che $f'(-1) = 1 > 0$; se invece $x \neq -1$, nel dividere per $x + 1$ bisogna fare attenzione al segno di quest'ultimo, e dunque se $x \gtrless -1$ si ha $f'(x) = 2(x + 1)\log|x| + x + 2 > 0$ se e solo se $\log|x| \gtrless -\frac{x+2}{2(x+1)}$. Usando ancora il suddetto confronto grafico, ricaviamo dunque che $f'(x) > 0$ se e solo se $a < x < b$ oppure $x > c$: ne deduciamo che $x = a$ e $x = c$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = b$ è un punto di massimo relativo. È altresì interessante notare che $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = -\infty$: la funzione "si verticalizza" mentre tende a zero per $x \to 0$. Se si vuole (ma non era richiesto) si può derivare ulteriormente, ottenendo $f''(x) = 2\log|x| + 2\frac{x+1}{x} + 1 = 2\log|x| + \frac{3x+2}{x}$, che si può studiare coi metodi già usati per $f'$.