**ANALISI MATEMATICA I**

Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

**Lezione di martedì 25/11/2014**

Continuiamo con l'INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$.

Dopo aver trattato i casi di $\deg Q = 0$ (integrali di polinomi) e $\deg Q = 1$ (integrali di $\frac{P(x)}{ax+b}$, più in generale di $\frac{P(x)}{(ax+b)^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$) procediamo al caso di $\deg Q = 2$.

3° caso: $\deg Q(x) = 2$, ovvero $\int \frac{P(x)}{x^2+ax+b}\,dx$ ← POSSO SUPPORRE CHE IL DENOMINATORE SIA MONICO!

Il primo passo è quello di ricondursi al caso in cui $\deg P(x) \le 1$: infatti, se $\deg P(x) \ge 2$ posso innanzitutto dividere $P$ per $Q$ e poi, fatta la divisione, mi resta da integrare un polinomio più una fz. razionale con numeratore di grado $\le 1$.

$$P(x) = \underbrace{A(x)}_{\text{quoziente: deg = differenza dei gradi}} Q(x) + \overbrace{R(x)}^{\text{resto: deg} \le 1} \Rightarrow \int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \left(A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right) dx$$

Dunque basta capire come calcolare $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}\,dx$ con $\Delta = a^2-4b \neq 0$

(infatti se $\Delta = 0$ si ha $Q(x) = (x-x_0)^2$, che già sappiamo trattare).

- Se $\Delta = a^2-4b > 0$, il denominatore ha due radici reali distinte $x_0$ e $x_1$, e allora esistono $C, D \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b} = \frac{C}{x-x_0} + \frac{D}{x-x_1}$

(infatti ciò equivale a $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b} = \frac{(C+D)x + (-Cx_1 - Dx_0)}{x^2+ax+b}$,

e il sistema $\begin{cases} C+D = \alpha \\ -Cx_1 - Dx_0 = \beta \end{cases}$ ha soluzione $(C,D)$ unica).

$\boxed{\text{Ex}}$ $\displaystyle\int \frac{3x^3+x-5}{x^2-x-2}\,dx$ . Poiché $\deg P = 3 \geq \deg Q = 2$, abbiamo dividere.

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 \quad \cdot \quad + x - 5 & x^2-x-2 \\ \hline -3x^3+3x^2+6x & 3x+3 \\ // \quad 3x^2+7x-5 & \\ \quad -3x^2+3x+6 & \\ \hline \quad // \quad 10x+1 & \end{array}$$

$$3x^3+x-5 = (x^2-x-2)\underbrace{(3x+3)}_{A(x)} + \underbrace{(10x+1)}_{R(x)}$$

$$\Rightarrow \int = \int \left(3x+3+\frac{10x+1}{x^2-x-2}\right)dx$$

$$= \frac{3x^2}{2}+3x+\int\frac{10x+1}{x^2-x-2}\,dx$$

Qui $\Delta = 9>0$, radici: $x_0=-1$, $x_1=2$.

$$\frac{10x+1}{x^2-x-2} = \frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-2} = \frac{(C+D)x+(-2C+D)}{(x+1)(x-2)} \iff \begin{cases} C+D=10 \\ -2C+D = 1 \end{cases} (-) \quad \overline{3C = 9}$$

$(C,D)=(3,7)$. Pertanto

$$\int = \frac{3x^2}{2}+3x+\int\frac{3}{x+1}\,dx+\int\frac{7}{x-2}\,dx =$$

$$= \frac{3x^2}{2}+3x+3\log|x+1|+7\log|x-2|+k.$$

- Se $\Delta = a^2-4b<0$ il denominatore non ha radici reali; e si procede allora per "completamento di quadrati"

$$x^2+ax+b = x^2+ax+\frac{a^2}{4}+\left(b-\frac{a^2}{4}\right) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\Big(\overbrace{b-\frac{a^2}{4}}^{>0}\Big)$$

$$= \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left(\Bigg(\overbrace{\frac{x+a/2}{\sqrt{b-a^2/4}}}^{t}\Bigg)^2+1\right), \text{ poi porre } t = \frac{x+a/2}{\sqrt{b-a^2/4}} \text{ e}$$

e ricondursi ad arcotangente e logaritmo.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\displaystyle\int\frac{x^3}{x^2+4x+7}\,dx$ . Iniziamo col dividere.

$$\begin{array}{l|l} x^3 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & x^2+4x+7 \\ \hline -x^3-4x^2-7x & x-4 \\ \hline // \quad -4x^2-7x & \\ \quad +4x^2+16x+28 & \\ \hline \quad // \quad 9x+28 & \end{array}$$

$$\int = \int\left(x-4+\frac{9x+28}{x^2+4x+7}\right)dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-4x+\int\frac{9x+28}{x^2+4x+7}\,dx.$$

Siamo rimasti con $\displaystyle\int\frac{9x+28}{x^2+4x+7}\,dx = \int\frac{9x+28}{(x^2+4x+4)+3}\,dx$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{9x+28}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx \qquad \left(\begin{array}{l}\text{Pongo } \frac{x+2}{\sqrt{3}} = t \\ \text{dunque } x = t\sqrt{3}-2\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{9(t\sqrt{3}-2)+28}{t^2+1}\sqrt{3}\,dt = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{9\sqrt{3}\,t+10}{t^2+1}\,dt$$

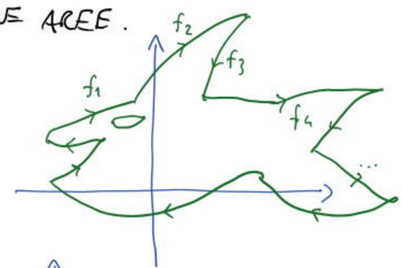
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\int \frac{\overset{\varphi'(t)}{2t}}{\underset{\varphi(t)}{t^2+1}}\,dt + 10\int \frac{1}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{9\sqrt{3}}{2}\log(t^2+1) + 10\cdot \arctan t\right) + K$$

e poi basta sostituire $t = \frac{x+2}{\sqrt{3}}$.

ESERCIZI. Calcolare i seguenti integrali indefiniti.

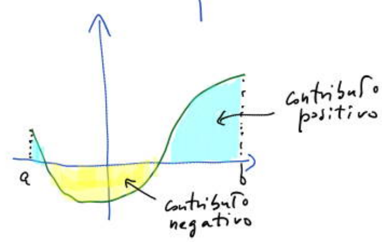
- $\int \frac{4x^3-x-1}{2x-3}\,dx$ • $\int \frac{3x-1}{(x+2)^n}\,dx$ $(n\in\mathbb{N})$ • $\int \frac{2x^2+5x-2}{x^2-2x-3}\,dx$ • $\int \frac{4x^2-3x+1}{4x^2+12x+9}\,dx$
- $\int \frac{x^3}{9-x^2}\,dx$ • $\int \frac{9x^2+1}{3x^2-5x-2}\,dx$ • $\int \frac{x^3+3x^2-1}{x^2+6x+13}\,dx$ • $\int \frac{x}{4x^2-2x+1}\,dx$
- $\int \frac{2x^2+5x+11}{x^2+4}\,dx$ • $\int x^2\log|2x+1|\,dx$ • $\int \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx$ • $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}\,dx$
- $\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x}\,dx$ • $\int \frac{\sin 2x}{5-\sin^2 x}\,dx$ • $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$ • $\int \frac{3x-2}{x^2+x+1}\,dx$
- $\int \left(\frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}+2x^3\cos x\right)dx$ • $\int (2x+1)e^{3-x}\,dx$ • $\int \frac{dx}{x^2+x}$ • $\int \frac{\log x}{x^3}\,dx$
- $\int \frac{2+\sqrt{x}}{x}\,dx$ • $\int \frac{2+\sqrt{x}}{x+1}\,dx$ • $\int \sqrt{a^2\mp x^2}\,dx$ Risolvere per parti oppure con cambio $x = a\sin t$ o $x = a\sinh t$ • $\int \frac{3}{2x^2-1}\,dx$ • $\int \arcsin(\alpha x)\,dx$ $(\alpha\in\mathbb{R})$

Iniziamo a trattare il problema del CALCOLO DELLE AREE.




Scopo finale: calcolare l'area di zone limitate del piano cartesiano sottese da grafici di funzioni continue.

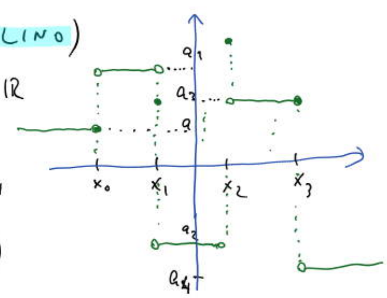
Il primo passo è di studiare l'area con segno compresa tra il grafico di una funzione $f(x)$ e tratti dell'asse delle ascisse.




Iniziamo dal caso più semplice.

Una funzione $s: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice SEMPLICE (o A SCALINO) se esiste una suddivisione $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ di $\mathbb{R}$ t.c. $s$ sia costante su $]-\infty, x_0[$, $]x_n, +\infty[$ e su ciascuno degli intervalli $]x_j, x_{j+1}[$ per $j = 0, \dots, n-1$

(quello che fa nei punti $x_0, \dots, x_n$ non importa!)




Se $X$ è un qualsiasi insieme, lo spazio $\mathbb{R}^X := \{\text{funzioni } X \to \mathbb{R}\}$ ha la struttura di algebra su $\mathbb{R}$: ovvero esso è al contempo

- un anello (posso fare somme e prodotti di funzioni)
- uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (posso fare combinazioni lineari di funzioni)
- ci sono naturali compatibilità: es. $f(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \cdot f g_1 + \beta \cdot f g_2$.

Ebbene, le funzioni semplici sono anch'esse un'algebra:

**Prop.** L'insieme $S(\mathbb{R}) := \{$funzioni semplici $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ è una sotto-algebra di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (ovvero somme, prodotti e combinazioni lineari di funz. semplici sono funz. semplici).

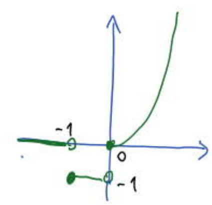
In generale, data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definisce il SUPPORTO di $f$ come

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

(punti di chiusura dell'insieme dei punti su cui $f$ non è nulla).

<u>Ex.</u>

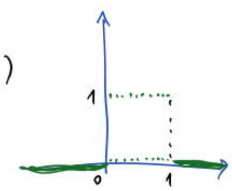
- $f(x) = \sin x$ ha supporto $\mathbb{R}$
- $g(x) = \begin{cases} x^2 & (\text{se } x \geq 0) \\ -1 & (\text{se } -1 \leq x < 0) \\ 0 & (\text{se } x < -1) \end{cases}$ ha supporto $[-1, +\infty[$



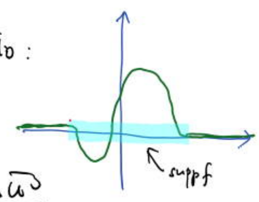

- La funzione di Dirichlet

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & (\text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}) \\ 0 & (\text{altrove}) \end{cases}$$

ha supporto $[0,1]$.



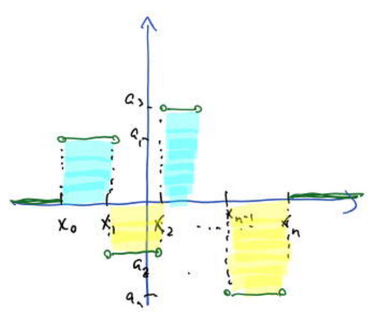

Si dirà che $f$ è A SUPPORTO COMPATTO se $\operatorname{supp}(f)$ è compatto: ovvero quando $\exists M \geq 0 : f(x) = 0 \quad \forall x$ t.c. $|x| > M$.




Denoteremo con $S_c(\mathbb{R})$ le <u>funzioni semplici a supp. compatto</u> (formano anch'esse una sottoalgebra di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Definiamo la funzione INTEGRALE

$$\int_{\mathbb{R}} : S_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$




sommando le aree (con segno) dei vari rettangoli:

$$\int_{\mathbb{R}} s = a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_2 - x_1) + \dots + a_n(x_n - x_{n-1})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_j (x_j - x_{j-1}).$$

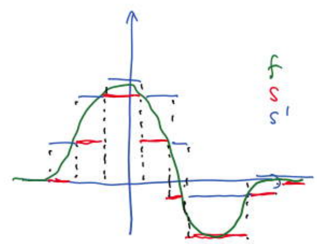
Si verifica facilmente che

**Prop.** Tale integrale in $S_c(\mathbb{R})$:

- NON dipende dalla suddivisione scelta;
- è LINEARE: $\int_{\mathbb{R}}(\alpha s+\beta s') = \alpha\int_{\mathbb{R}} s + \beta\int_{\mathbb{R}} s'$.
- è ISOTÒNO: $s \le s' \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} s \le \int_{\mathbb{R}} s'$
- soddisfa la DISUGUAGLIANZA FONDAMENTALE $\left|\int_{\mathbb{R}} s\right| \le \int_{\mathbb{R}} |s|$
  con uguaglianza quando $s$ ha segno costante (tranne su un nro finito di punti)

Sia ora $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione qualsiasi.

Se $s$ è una funz. semplice a supp. compatto t.c. $s\le f$, l'integrale $\int_{\mathbb{R}} s$ si dirà una SOMMA INFERIORE per $f$;




se $s'$ è una funz. semplice a supp. compatto t.c. $f\le s'$, l'integrale $\int_{\mathbb{R}} s'$ si dirà una SOMMA SUPERIORE per $f$

Se consideriamo i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ delle somme inferiori e superiori per $f$:

$$U_f^- = \left\{ \int_{\mathbb{R}} s \;:\; s\in S_c(\mathbb{R})\,;\ s\le f \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$U_f^+ = \left\{ \int_{\mathbb{R}} s' \;:\; s'\in S_c(\mathbb{R}),\ f\le s' \right\} \subseteq \mathbb{R},$$

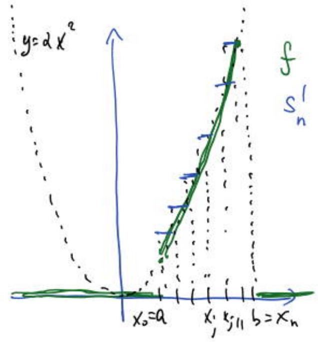
per isotonia si ha che $U_f^- \le U_f^+$ (infatti da $s\le f\le s'$ segue $s\le s'$).

Diremo che $f$ è INTEGRABILE (ALLA RIEMANN) se $U_f^-$ e $U_f^+$ hanno un unico elem. separatore (ovvero, $U_f^-$ e $U_f^+$ sono "classi contigue"):

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists\, s_\varepsilon, s'_\varepsilon \in S_c(\mathbb{R}) \;:\; s_\varepsilon \le f \le s'_\varepsilon \quad e \quad \int_{\mathbb{R}}(s'_\varepsilon - s_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Tale elem. separatore si denoterà con $\int_{\mathbb{R}} f$ (INTEGRALE di $f$)

Ex.




Definiamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ \alpha x^2 & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$

Dividiamo $[a,b]$ in $n$ intervallini uguali di lunghezza $\frac{b-a}{n}$. Abbiamo così la suddivisione

$x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$:

ovvero $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ $(j = 0, \dots, n)$

Sia $s_n^1$ la corrisp. funz. semplice sopra $f$ (costante su ogni intervallino $]x_{j-1}, x_j[$ con il valore nel punto finale, ovvero $f(x_j) = \alpha x_j^2$). Calcoliamo ora l'integrale di $s_n^1$, con lo scopo poi di passare al limite per $n \to +\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}} s_n^1 = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha x_j^2\right) = \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a + j\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$$= \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(a^2 + j^2 \frac{(b-a)^2}{n^2} + 2\frac{a(b-a)}{n} j\right)$$

$$= \alpha \frac{b-a}{n} \left(n a^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\right)$$

**Lemma**

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Dim. In generale, ricordiamo il procedimento per INDUZIONE:

se devo dimostrare che

"la proposizione $P(n)$ è vera per $n \geq n_0$"

si può fare così:

(1) Verificare che $P(n_0)$ è vera (base)

(2) supponendo che $P(k)$ sia vera per $k = n_0, \dots, n-1$ (ipotesi induttiva) provare che ne discende che anche $P(n)$ è vera.

(a) $n_0 = 1$, $P(n) =$ " $\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$ "

$P(1) =$ " $1 = \frac{1(2)}{2}$ " vera!

Supp. ora che $P(k)$ sia vera per $k = 1, \dots, n-1$.

$$\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n-1} j + n = \frac{(n-1)(n)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ vera!}$$

(b) $n_0 = 1$, $P(n)$ : " $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ".

$P(1) =$ " $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ " vera!

Supp. che $P(k)$ sia vera per $k = 1, \dots, n-1$

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ok! } \square$$

Dunque, proseguendo il nostro conto:

$$\int_{\mathbb{R}} s_n' = \alpha \frac{b-a}{\cancel{n}} \left( \cancel{n} a^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2a(b-a)}{n} \cdot \frac{\cancel{n}(n+1)}{2} \right)$$

$$= \alpha (b-a) \left( a^2 + \frac{(b-a)^2}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} + a(b-a) \cdot \frac{n+1}{n} \right)$$

Pertanto $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n' = \alpha (b-a) \left( a^2 + \frac{(b-a)^2}{3} + a(b-a) \right)$

$$= \alpha (b-a) \cdot \frac{\cancel{3a^2} + b^2 + a^2 - 2ab + 3ab - \cancel{3a^2}}{3}$$

$$= \alpha \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Come interpretare tale risultato?

Posto $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \notin [a,b] \\ \alpha x^3/3 & \text{per } x \in [a,b], \end{cases}$ $F$ è primitiva di $f$ e vale

$\int_{\mathbb{R}} f = F(b) - F(a)$. Questo non è un caso, come vedremo presto.

Tornando alle funzioni Riemann-integrabili:

Prop. Anche l'integrale di Riemann per una funzione integrabile soddisfa alle proprietà di linearità, isotonia, disug. fondamentale:

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_{\mathbb{R}} f + \beta \int_{\mathbb{R}} g \ ; \quad f \le g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \le \int_{\mathbb{R}} g \ ; \quad \left| \int_{\mathbb{R}} f \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f|$$

Un'importante osservazione per le funzioni integrabili:

Prop. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni che differiscono solo su un insieme FINITO di punti, allora $f$ è integrabile se e solo se lo è $g$, e vale $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} g$.

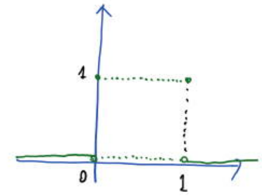
(Nella Teoria più raffinata di Lebesgue, questo risultato verrà ampiamente migliorato: due funzioni potranno differire su un insieme TRASCURABILE — ovvero di misura nulla, ad esempio numerabile — di punti senza che venga cambiata la loro integrabilità e il valore dell'integrale: ad esempio la funzione di Dirichlet, nulla tranne che su un insieme trascurabile di punti del dominio, avrà integrale nullo.)

Altro fatto importante:

Prop. Una funzione integrabile è certamente limitata e a supp. compatto. Ma il viceversa è falso.

Dim. La prima affermazione segue subito dal fatto che $f$ è "schiacciata" sopra e sotto da funz. semplici a supp. compatto.
Invece la funzione di Dirichlet $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
è limitata e a supporto compatto ma NON è integrabile:

infatti se $S$ è funzione a scalini con $S \leq f$ deve essere $S \leq 0$, mentre se $S'$ con $f \leq S'$ deve essere $S' \geq 0$, e tra $x=0$ e $x=1$ si deve avere $S' \geq 1$. Dunque $U_f^- \subseteq ]-\infty, 0]$ e $U_f^+ \subseteq [1, +\infty[$ non sono classi contigue, perciò $\int_{\mathbb{R}} f$ non ha senso. □




Ora, le funzioni quasi-elementari non sono mai a supporto compatto, e ben raramente sono limitate: il prossimo passo è allora quello di definire l'integrale non su tutto $\mathbb{R}$ come fatto finora, ma solo su un intervallo.

---

Svolgiamo alcuni degli esercizi assegnati nella scorsa lezione.

- $$\int \overset{F}{x^2}\,\overset{g}{e^x}\,dx = x^2 e^x - \int \overset{F}{2x}\,\overset{g}{e^x}\,dx = x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int 1 \cdot e^x dx\right) \qquad \int Fg = FG - \int fG$$
  $f = 2x,\ G = e^x \qquad f = 1,\ G = e^x$
  $$= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + K = (x^2 - 2x + 2)e^x + K$$

- $$\int \log x\,dx = \int \overset{g}{1} \cdot \overset{F}{\log x}\,dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x\,dx = x \log x - \int 1\,dx =$$
  $f = \frac{1}{x},\ G = x$
  $$= x \log x - x + K = x(\log x - 1) + K.$$

- $$\int \overset{F}{e^{2x}}\,\overset{g}{\cos(3x)}\,dx = \frac{1}{3} e^{2x} \sin(3x) - \int 2e^{2x} \cdot \frac{1}{3} \sin(3x)\,dx$$
  $f = 2e^{2x},\ G = \int \cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\int 3\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x)$
  $$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3} \int \overset{F}{e^{2x}}\,\overset{g}{\sin(3x)}\,dx$$
  $f = 2e^{2x},\ G = -\frac{1}{3}\cos(3x)$
  $$= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos(3x) - \int 2e^{2x} \cdot \left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right) dx\right.$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}\cos(3x) + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\cos(3x) + K$$

$$\Rightarrow \int e^{2x}\cos(3x)\,dx = \frac{1}{13}e^{2x}(3\sin 3x + 2\cos 3x) + K$$

$f = \frac{1}{1+x^2}$ $G = x$

- $$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \int \overset{g}{1}\cdot \overset{F}{\operatorname{arctg} x}\,dx = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{2}\frac{\overset{\varphi'}{2x}}{\underset{\varphi}{x^2+1}}\,dx$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(x^2+1) + K.$$

$$\int \frac{\varphi'}{1+\varphi^2}\,dx = \operatorname{arctg}\varphi$$

- $$\int \frac{3x}{2+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{3x\,dx}{\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

$$\left(\text{Pongo } \frac{x^2}{\sqrt{2}} = t \leadsto 2x\,dx = \sqrt{2}\,dt, \quad x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\,dt\right)$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg} t + K = \frac{3\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right) + K.$$

$x = t^2$
$dx = 2t\,dt$

- $$\int \left(\sqrt{5-3x} - 2e^{\sqrt{x}}\right)dx = \int \sqrt{5-3x}\,dx - 2\int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

$f = 1$
$G = e^t$

$$= -\frac{1}{3}\int \overset{\varphi'}{(-3)}(\overset{\varphi}{5-3x})^{1/2} - 2\int e^t\cdot 2t\,dt = -\frac{1}{3}\frac{(5-3x)^{3/2}}{3/2} - 4\int \overset{F}{t}\,\overset{g}{e^t}\,dt$$

$$= -\frac{2}{9}(5-3x)^{3/2} - 4\left(te^t - \int 1\cdot e^t\,dt\right) = -\frac{2}{9}(5-3x)^{3/2} - 4(t-1)e^t + K$$

$$= -\frac{2}{9}(5-3x)^{3/2} - 4(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + K$$

$\sqrt{x}+1 = t$ $\quad x = (t-1)^2$ $\quad dx = 2(t-1)dt$

$f = 1/t$
$G = \frac{1}{2}(t-1)^2$

- $$\int \lg(\sqrt{x}+1)\,dx = \int (\lg t)\cdot 2(t-1)\,dt = 2\int \overset{g}{(t-1)}\,\overset{F}{\lg t}\,dt$$

$$= \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(t-1)^2\lg t - \int \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(t-1)^2\,dt\right) = (t-1)^2\lg t - \int \frac{(t-1)^2}{t}\,dt$$

$$= (t-1)^2\lg t - \int \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)dt = (t-1)^2\lg t - \frac{t^2}{2} + 2t - \lg t + K$$

$$= (t^2-2t)\log t - t^2/2 + 2t + K \quad , \text{ e poi pone } t=\sqrt{x}+1.$$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

- $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int 1\, dx - \int \cos 2x\, dx\right) = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + K.$$

- $\int \sin^3 x\, dx$ , più in gen. $\int \sin^{2n+1}(x)\, dx = \int \sin x \cdot \sin^{2n}(x)\, dx$

$$= \int \sin x\, (\sin^2 x)^n\, dx = \int \sin x\, (1-\cos^2 x)^n\, dx \qquad \begin{array}{l}\cos x = t\\ \sin x\, dx = -dt\end{array}$$

$$= -\int (1-t^2)^n\, dt \;,$$ integrale di polinomi che si calcola direttamente.

Ex. $n=1$ : $- \int (1-t^2)\, dt = -(t - t^3/3) + K = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + K$

$x-\pi/6 = t$, $dx = dt$

- $$\int \left(\frac{3}{4+7x} - 5\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right) dx = \frac{3}{7}\int \frac{7}{4+7x}\, dx - 5\int \sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right) dx$$

$$= \frac{3}{7}\log|4+7x| - 5\,\frac{(x-\pi/6) - \sin(x-\pi/6)\cos(x-\pi/6)}{2} + K$$

$f = (2n-1)\cdot \sin^{2(n-1)}(x)\cdot \cos x$

$G = -\cos x$

- $$I_n = \int \sin^{2n}(x)\, dx = \int \underbrace{\sin x}_{g} \cdot \underbrace{\sin^{2n-1}(x)}_{F}\, dx$$

$$= -\sin^{2n-1}(x)\cos x - \int (2n-1)\sin^{2(n-1)}(x)\cos x \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -\sin^{2n-1}(x)\cos x + (2n-1)\int \sin^{2(n-1)}(x)\,(1-\sin^2 x)\, dx$$

$$= -\sin^{2n-1}(x)\cos x + (2n-1)\,(I_{n-1} - I_n)$$

$$\boxed{I_n = \frac{(2n-1)\, I_{n-1} - \sin^{2n-1}(x)\cos x}{2n}}$$

Ex.: per $n=1$ : $\quad I_1 = \frac{1\cdot I_0 - \sin x \cos x}{2}$ che è vero, etc..

$f = 2x$, $G = -\cos x$

- $$\int \underbrace{x^2}_{F}\underbrace{\sin x}_{g}\, dx = -x^2\cos x - \int 2x\,(-\cos x)\, dx = -x^2\cos x + 2\int \underbrace{x}_{F}\underbrace{\cos x}_{g}\, dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int 1\cdot \sin x\, dx\right) = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + K$$

Lez_141125mar Pagina 12

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$ pongo $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, si ha $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.
  $x = 2\operatorname{arctg} t \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

  $$\rightsquigarrow \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \lg|t| + K = \lg\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + K$$

- $$\int \frac{\sin(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \quad \begin{pmatrix} x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{pmatrix} = \int \frac{\sin(2t)}{\cancel{t}}\cdot 2\cancel{t}\,dt = -\cos(2t) + K$$
  $$= -\cos(2\sqrt{x}) + K.$$

- $$\int \sqrt{x}\,\lg x\,dx = \begin{pmatrix} \text{pongo } x = t^2 \\ dx = 2t\,dt \end{pmatrix} \int t\,\lg(t^2)\cdot 2t\,dt = 4\int t^2 \lg t\,dt \overset{\text{fatto ieri}}{=} \frac{4t^3}{9}(3\lg t - 1) + K$$
  $$= (\text{rimettendo } t = \sqrt{x})\quad \frac{4x\sqrt{x}}{9}\left(\frac{3}{2}\lg x - 1\right) + K$$

- $$\int \left(3e^{2x} - 3\cos(3x-1)\right)dx = \frac{3}{2}\int \overset{\varphi'}{2}\,\overset{e^{\varphi}}{e^{2x}}\,dx - \int \overset{\varphi'}{3}\,\overset{\cos(\varphi)}{\cos(3x-1)}\,dx = \frac{3}{2}e^{2x} - \sin(3x-1) + K$$

- $$\int \left(2x - \sqrt[4]{x-1}\right)dx = \int 2x\,dx - \int (x-1)^{1/4}\,dx = x^2 - \frac{(x-1)^{5/4}}{5/4} + K.$$

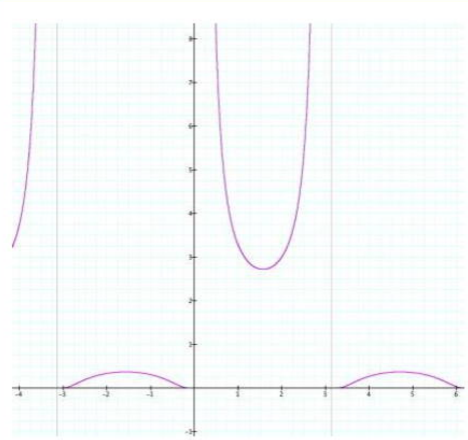
- $$\int \left(2\cos 3x - 3\cdot 2^{1-2x}\right)dx = 2\int \cos 3x\,dx - 3\int 2^{1-2x}\,dx = \left(\text{pongo } \begin{matrix} 1-2x = t \\ -2dx = dt \end{matrix}\right)$$
  $$\frac{2}{3}\sin 3x + \frac{3}{2}\int 2^t\,dt = \begin{pmatrix} \text{ricordando che } (2^t)' = 2^t\cdot\lg 2 \\ \text{dunque } \int 2^t\,dt = \frac{2^t}{\lg 2} \end{pmatrix} \quad \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{3}{2\lg 2}\,2^t + K$$
  $$= \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{3}{\cancel{2}\lg 2}\cdot 2^{\cancel{1}-2x} + K = \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{3}{\lg 2}\cdot 2^{-2x} + K$$

- $$\int \left(e^{2x} - e^x\right)\cos(e^x)\,dx = \int e^x(e^x - 1)\cos(e^x)\,dx = \begin{pmatrix} \text{pongo } e^x = t \\ e^x dx = dt \end{pmatrix} \int \overset{F}{(t-1)}\,\overset{g}{\cos t}\,dt \qquad \begin{matrix} f = 1 \\ G = \sin t \end{matrix}$$
  $$= (t-1)\sin t - \int 1\cdot\sin t\,dt = (t-1)\sin t + \cos t + K \quad \text{e poi rimetto } t = e^x.$$

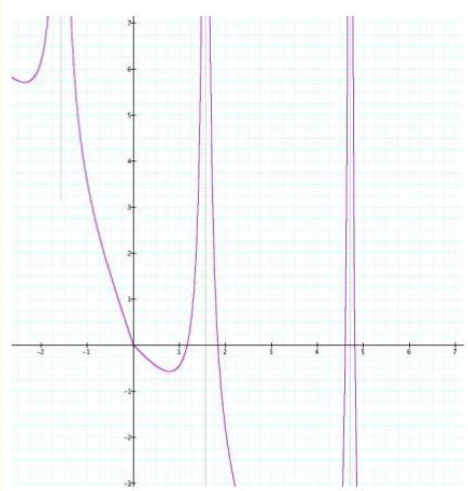
RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI RESTANTI DI STUDIO DI FUNZIONE

(20) $\boxed{f(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}}$

**(h)** $[f(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}]$ Il dominio è $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\pi=\{x: x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$. La funzione è periodica di periodo $2\pi$, dunque studiamola in $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$, in cui è di classe $\mathcal{C}^\infty$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to-\pi^+} f(x)=\lim_{x\to0^-} f(x)=0^+$ e $\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to\pi^-}f(x)=+\infty$; la funzione è inferiormente limitata da 0 (infatti un esponenziale è sempre $>0$), e per quanto appena visto si ha $0=\inf(f)$. La derivata è $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}e^{\frac{1}{\sin x}}$: si ha $f'(x)=0$ per $\cos x=0$, ovvero $x=\pm\frac{\pi}{2}$, e $f'(x)>0$ per $\cos x<0$, ovvero $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Dunque $f$ ha un punto di massimo in $-\frac{\pi}{2}$ (con $f(-\frac{\pi}{2})=1/e$) e un punto di minimo in $\frac{\pi}{2}$ (con $f(\frac{\pi}{2})=e$). Per il disegno, si noti che $\lim_{x\to-\pi^+}f'(x)=0^+$ e $\lim_{x\to0^-}f'(x)=0^-$ (basta porre $t=\frac{1}{\sin x}$). Infine, si calcola $f''(x)=-\frac{\sin^3x+\sin^2x-2\sin x-1}{\sin^4 x}e^{\frac{1}{\sin x}}$. Posto $u=\sin x$, consideriamo il polinomio $P(u)=u^3+u^2-2u-1$: derivando si ottiene $P'(u)=3u^2+2u-2$, dunque $P$ cresce per $u<-\frac{\sqrt{7}+1}{2}\sim-1,8$ e $u>\frac{\sqrt{7}-1}{2}\sim 0,8$, ed essendo $\lim_{u\to\mp\infty}P(u)=\mp\infty$, $P(-2)=-1$, $P(-1)=1$ e $P(0)=P(1)=-1$, per il Teorema degli Zeri le tre soluzioni $a<b<c$ di $P(u)=0$ (si noti che non ci sono radici multiple, perché $P(u)$ e $P'(u)$ non hanno radici comuni) soddisferanno $a<-1<b<0<1<c$. Pertanto $f''(x)=-\frac{(\sin x-a)(\sin x-b)(\sin x-c)}{\sin^4x}e^{\frac{1}{\sin x}}$ ove vale sempre $\sin x-a>0$ e $\sin x-c<0$. Ne ricaviamo che $f''(x)=0$ se e solo se $\sin x=b$ (da cui $x=\arcsin b<0$ e $x=-\pi-\arcsin b$), e $f''(x)=0$ se e solo se $\sin x>b$ (da cui $-\pi<x<-\pi-\arcsin b$, $\arcsin b<x<0$ e $0<x<\pi$): pertanto $-\pi-\arcsin b$ e $\arcsin b$ sono flessi, collocati tra $-\pi$ e 0; in essi $f$ vale $e^{\frac{1}{b}}<1$ e $f'$ vale $\pm\frac{\sqrt{1-b^2}}{b^2}e^{\frac{1}{b}}$.



(Ex. 20)



(Ex 21)

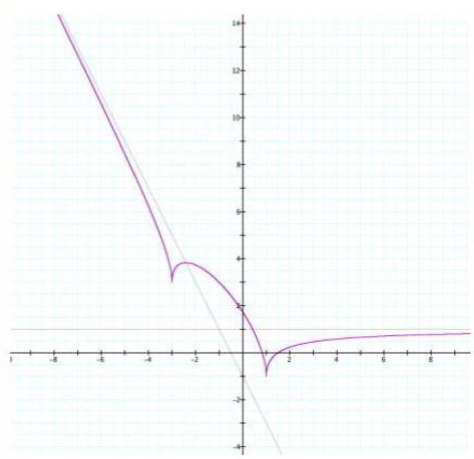
(21) $\boxed{f(x) = |\operatorname{tg} x| - 2x}$

(i) $[f(x) = |\operatorname{tg} x| - 2x]$ Studiamo la funzione in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Vale $\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$. Si ha $f(x) \geq 0$ se e solo se $|\operatorname{tg} x| \geq 2x$, ed un semplice confronto grafico mostra che esiste un unico punto $a$ in $]0, \frac{\pi}{2}[$ (ma più vicino a $\frac{\pi}{2}$ che a 0) tale che $f(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = a$, $f(x) < 0$ per $0 < x < a$ e $f(x) > 0$ per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ oppure $a < x < \frac{\pi}{2}$. La derivata è $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \frac{1-2\cos^2 x}{\cos^2 x}$ se $x > 0$, ed è $f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - 2 = -\frac{1+2\cos^2 x}{\cos^2 x}$ se $x < 0$: dunque, se $x < 0$ la funzione è strettamente decrescente, mentre per $x > 0$ essa ha punti stazionari per $1 - 2\cos^2 x = 0$, ovvero per $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, che dà $x = \frac{\pi}{4}$, ed è strettamente crescente se $1 - 2\cos^2 x > 0$, ovvero per $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero per $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Dunque $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo (che vale $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{2} \sim -0,5$). Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile; tuttavia, poiché essa è decrescente subito prima e subito dopo, tale punto non sarà d'estremo locale. Si ha inoltre $f'_-(0) = -1 - 2 = -3$ e $f'_+(0) = 1 - 2 = -1$. La derivata seconda è $f''(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x} > 0$ se $x > 0$, ed è $f''(x) = -2\frac{\sin x}{\cos^3 x} > 0$ se $x < 0$: dunque la funzione è strettamente convessa sia per $x < 0$ che per $x < 0$, e poiché $f'_-(0) = -3 < f'_+(0) = -1$ lo è anche in $x = 0$.
Sul resto del dominio naturale, la funzione tende a $+\infty$ in tutti i punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$); inoltre essa ha dei punti di minimo locale in $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con $f(x_k) = 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi$. Si noti che tutti questi minimi del grafico giacciono sulla retta $y = -2x + 1$ (infatti da $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e $y = 1 - \frac{\pi}{2} - 2k\pi$, eliminando $k$ si ottiene $y = 1 - \frac{\pi}{2} - 2\pi\frac{1}{\pi}(x - \frac{\pi}{4}) = -2x + 1$).

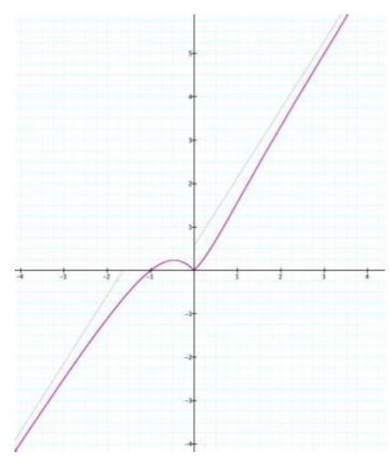
(22) $\boxed{f(x) = \sqrt{|x^2+2x-3|} - x}$

(j) $[f(x) = \sqrt{|x^2 + 2x - 3|} - x]$ Il dominio di $f$ è tutto $\mathbb{R}$ (grazie al modulo, l'argomento della radice è sempre $\geq 0$). La funzione non ha periodo ne' parità, ed è certamente continua ovunque; inoltre, nei punti in cui $x^2 + 2x - 3 \neq 0$ (ovvero per $x \neq -3$ e $x \neq 1$) essa è anche $\mathcal{C}^\infty$. A tal proposito conviene notare subito che $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ per $x \leq -3$ oppure $x \geq 1$, perciò in tal caso vale $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$; invece, quando $-3 < x < 1$ si ha $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2} - x$, e nei punti di passaggio vale $f(-3) = 3$ e $f(1) = -1$; vale inoltre $f(0) = \sqrt{3}$. Si ha poi $f(x) = 0$ quando $\sqrt{|x^2 + 2x - 3|} = x$; nell'ipotesi $x \geq 0$ ciò equivale a $|x^2 + 2x - 3| = x^2$, ovvero $x^2 + 2x - 3 = x^2$, da cui $x = \frac{3}{2} > 0$ (accettabile), oppure $x^2 + 2x - 3 = -x^2$, da cui $x = \frac{\sqrt{7}-1}{2} > 0$ (accettabile) e $x = \frac{-\sqrt{7}-1}{2} < 0$ (non accettabile). Pertanto il grafico di $f$ interseca l'asse $x$ nei due punti $x = \frac{\sqrt{7}-1}{2} \sim 0{,}8$ e $x = \frac{3}{2}$. Passando al segno, vale $f(x) > 0$ quando $\sqrt{|x^2 + 2x - 3|} > x$; se $x < 0$ ciò è sempre vero, mentre se $x \geq 0$ ciò equivale a $|x^2 + 2x - 3| \geq x^2$, ovvero $x^2 + 2x - 3 > x^2$, da cui $x > \frac{3}{2}$ (accettabile), oppure $x^2 + 2x - 3 < -x^2$, da cui $\frac{-\sqrt{7}-1}{2} < x < \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ (accettabile solo l'intervallo $0 < x < \frac{\sqrt{7}-1}{2}$). Pertanto il grafico di $f$ sta sopra l'asse $x$ quando $x < \frac{\sqrt{7}-1}{2}$ e $x > \frac{3}{2}$.
Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (entrambi gli addendi tendono a $+\infty$), mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ è in forma indeterminata $+\infty - \infty$; moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x$ si ottiene però $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2-3/x)}{x(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+1)} = 1$. Pertanto la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale solo a $+\infty$; le sue intersezioni col grafico di $f(x)$ sono date dall'equazione $f(x) = 1$, ovvero $\sqrt{|x^2 + 2x - 3|} = x + 1$, che nell'ipotesi $x + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$, equivale a $|x^2 + 2x - 3| = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ovvero $x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x + 1$ (impossibile) oppure $x^2 + 2x - 3 = -(x^2 + 2x + 1)$, cioè $x^2 + 2x - 1 = 0$, con soluzioni $x = -1 \pm \sqrt{2}$ delle quali l'unica accettabile (perché $\geq -1$) è $x = \sqrt{2} - 1 \sim 0{,}4$. A questo punto resta da indagare l'eventuale presenza di un asintoto obliquo a $-\infty$, pertanto calcoliamo $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-3}-x}{x}$ che è in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; tuttavia, raccogliendo $x^2$ sotto radice e notando che $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ (infatti $x$ sta tendendo a $-\infty$) si ottiene $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+2/x-3/x^2}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+2/x-3/x^2}-1}{1} = -2$. Va calcolato ora $\lim_{x\to-\infty}(f(x) + 2x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{|x^2 + 2x - 3|} + x)$, in forma indeterminata $+\infty - \infty$; moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x$ si ottiene $\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+2x-3)-x^2}{\sqrt{x^2+2x-3}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2-3/x)}{-x(\sqrt{1+2/x-3/x^2}+1)} = -1$.

Pertanto la retta $y = -2x - 1$ è asintoto obliquo a $-\infty$, e interseca il grafico di $f(x)$ nel solo punto $x = -\sqrt{2} - 1 \sim -2{,}4$ (procedere come per le intersezioni con l'asintoto $y = 1$).
Passiamo finalmente al calcolo della derivata. Se $x < -3$ oppure $x > 1$ vale $f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{x^2+2x-3}}$: con calcoli simili a quelli già fatti si ottiene che $f'(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt{2} - 1$, dunque $f$ è strettamente decrescente per $x < -3$ e strettamente crescente per $x > 1$. Invece, per $-3 < x < 1$ vale $f'(x) = \frac{-2x-2}{2\sqrt{3-2x-x^2}} - 1 = -\frac{x+1+\sqrt{3-2x-x^2}}{\sqrt{3-2x-x^2}}$, e si trova che $f'(x) \geq 0$ per $-3 < x \leq -\sqrt{2} - 1$: dunque $f$ è strettamente crescente per $-3 < x < -\sqrt{2} - 1$ e strettamente decrescente per $-\sqrt{2} - 1 < x < 1$, e il punto $x = -\sqrt{2} - 1$ è di massimo relativo con quota $f(-\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} + 1 \sim 3{,}8$. Da quanto detto, infine, i punti di passaggio $x = -3$ e $x = 1$ sono di minimo relativo; in essi la funzione è continua ma non derivabile, in quanto $\lim_{x \to -3^{\mp}} f'(x) = \lim_{x \to 1^{\mp}} f'(x) = \pm\infty$ (verificarlo): detto con altre parole, in tali punti il grafico assume pendenza infinita.



(Ex. 22)



(Ex. 23)

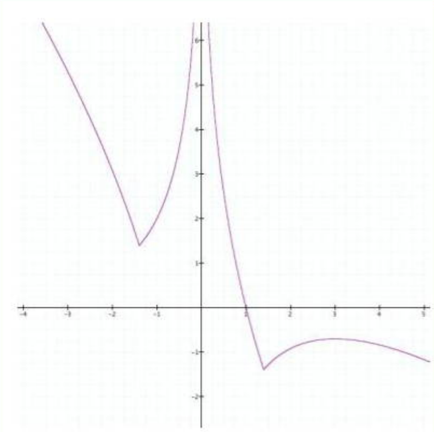
(23) $\boxed{f(x) = (x+1)\ \mathrm{arctg}\,|x|}$

**(k)** $[f(x) = (x+1)\mathrm{arctg}\,|x|]$ Il dominio della funzione è tutto $\mathbb{R}$, ed in esso $f(x)$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti diversi da 0; invece in $x = 0$, a causa di $|x|$, essa è continua ma probabilmente non derivabile. Limiti notevoli: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$. Vale $f(0) = 0$ e $f(x) = 0$ per $x = -1$ e $x = 0$; poiché $\mathrm{arctg}\,|x| > 0$ per ogni $\neq 0$, si ha $f(x) > 0$ per $x > -1$ ma $x \neq 0$. Per gli asintoti, vale $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x+1}{x} \mathrm{arctg}\,|x| = \frac{\pi}{2}$, e $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - \frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to\mp\infty}(\frac{\mathrm{arctg}\,|x| - \pi/2}{1/x} + \mathrm{arctg}\,|x|) = \frac{\pi}{2} \pm 1$ (si può usare de l'Hôpital): dunque $y = x + \frac{\pi}{2} \pm 1$ è asintoto a $\mp\infty$. Quando $x \neq 0$, la derivata è $f'(x) = \mathrm{arctg}\,|x| + \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{sign}\,x = (\mathrm{sign}\,x)(\mathrm{arctg}\,x + \frac{x+1}{x^2+1})$. (Si noti subito che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -1 = f'_-(0)$ e $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'_+(0)$, dunque 0 è un punto angoloso.) Prepariamoci ad un confronto grafico tra $\mathrm{arctg}\,x$ e $\psi(x) = -\frac{x+1}{x^2+1}$. La funzione $\psi(x)$ si studia facilmente (definita su tutto $\mathbb{R}$; nulla per $x = -1$ e positiva per $x < -1$; infinitesima a $\pm\infty$; la derivata è $\psi'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}$, dunque $\psi$ è strettamente crescente per $x < -\sqrt{2} - 1 \sim -2{,}4$ e $x > \sqrt{2} - 1 \sim 0{,}4$, con massimo assoluto in $-\sqrt{2} - 1$ (che vale $f(-\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \sim 0{,}2$) e minimo assoluto in $\sqrt{2} - 1$ (che vale $f(\sqrt{2} - 1) = \frac{1}{2}(-\sqrt{2} - 1) \sim -1{,}2$). È dunque chiaro che $\mathrm{arctg}\,x$ e $\psi(x)$ si incontrano se e solo se $x = a$ per un certo $-1 < a < 0$ (si ha $a \sim -0{,}46$). Perciò $f'(x) = 0$ per $x = a$, e $f'(x) > 0$ per $x < a$ oppure $x > 0$: in $x = a$ si avrà allora un punto di massimo locale (con $f(a) = -(a+1)\mathrm{arctg}\,a = (a+1)\frac{a+1}{a^2+1} = 1 + \frac{2a}{a^2+1} \sim 0{,}23$). Derivando ancora, sempre per $x \neq 0$ si ottiene $f''(x) = -2\,(\mathrm{sign}\,x)\frac{x-1}{(x^2+1)^2}$: vale $f''(x) = 0$ per $x = 1$ e $f''(x) > 0$ (perciò $f$ è strettamente convessa) per $0 < x < 1$, dunque 1 è un flesso (con $f(1) = \frac{\pi}{2}$ e $f'(1) = \frac{\pi}{4} + 1$).

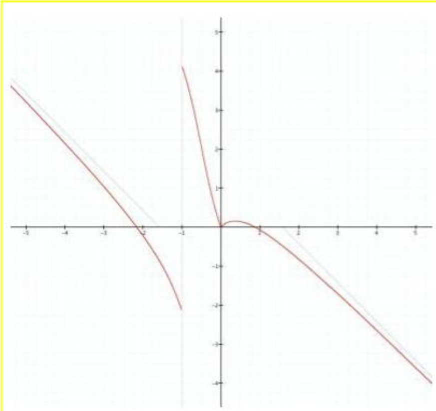
(25) $\boxed{f(x) = |3 \log |x| - 1| - x}$

(Figura 1) Il dominio di $f(x) = |3\log|x| - 1| - x$ è dato da $x \neq 0$, e in esso la funzione è continua, anzi di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutti i punti tali che $3\log|x| - 1 \neq 0$, ovvero per $x \neq \pm\sqrt[3]{e} \sim \pm 1{,}4$ (invece per $x = \pm\sqrt[3]{e}$ sono attesi dei punti angolosi, ma per la conferma di ciò vedremo più tardi). Essendo $\log x = o_{+\infty}(x)$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, mentre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 0} f(x)$ sono determinati e valgono entrambi $+\infty$. È altresì immediato vedere che, nonostante $f$ abbia parte principale $-x$ a $\mp\infty$, essa non ha asintoti lineari a $\mp\infty$ (infatti $f(x) - (-x)$, che ha parte principale $3\log|x|$, ha crescita logaritmica). Si ha $f(x) = 0$ quando $|3\log|x| - 1| = x$, che nell'ipotesi $x \geq 0$ equivale a $3\log x - 1 = \mp x$, ovvero $\log x = \frac{1+x}{3}$ (mai) oppure $\log x = \frac{1-x}{3}$, che dà $x = 1$. Si ha poi $f(x) > 0$ quando $|3\log|x| - 1| > x$: se $x < 0$ ciò è sempre vero, mentre se $x \geq 0$ equivale a $|3\log x - 1| > x$, ovvero $3\log x - 1 > x$ oppure $3\log x - 1 < -x$, ovvero $\log x > \frac{1+x}{3}$ (mai) oppure $\log x < \frac{1-x}{3}$, che dà $0 < x < 1$. Derivando per $x \neq \pm\sqrt[3]{e}$ si ottiene $f'(x) = \sigma\frac{3}{x} - 1$ con $\sigma = \operatorname{sign}(3\log|x| - 1)$ (dunque $\sigma = \pm 1$ a seconda che $|x| \gtrless \sqrt[3]{e}$). Se allora $|x| > \sqrt[3]{e}$ si ha $f'(x) = \frac{3}{x} - 1$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = 3$ (accettabile) e $f'(x) > 0$ per $\sqrt[3]{e} < x < 3$, mentre se $|x| < \sqrt[3]{e}$ si ha $f'(x) = -\frac{3}{x} - 1$, da cui $f'(x) = 0$ per $x = -3$ (non accettabile) e $f'(x) > 0$ per $-\sqrt[3]{e} < x < 0$: pertanto $x = 3$ è un punto di massimo locale regolare (con $f(3) = 3\log 3 - 4 \sim -0{,}7$), mentre $x = \mp\sqrt[3]{e}$ sono di minimo locale singolare con $f(\mp\sqrt[3]{e}) = \pm\sqrt[3]{e} \sim \pm 1{,}4$ (si noti che $f'_-(\pm\sqrt[3]{e}) = -\frac{3}{\sqrt[3]{e}} - 1 \sim -3{,}1$ e $f'_+(\pm\sqrt[3]{e}) = \frac{3}{\sqrt[3]{e}} - 1 \sim 1{,}1$, dunque si tratta effettivamente di due punti angolosi). Infine, derivando ancora si ha $f''(x) = -\sigma\frac{3}{x^2}$, dunque $f$ non ha flessi regolari, ed è convessa quando $\sigma = -1$ (cioè per $|x| < \sqrt[3]{e}$) e concava quando $\sigma = 1$ (cioè per $|x| > \sqrt[3]{e}$).

• In $-1$, usando la scala delle potenze e ricordando che $\log(1+t) \sim_0 t$, posto $t = -(x+1)$ si ha $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 1 - 3\log(-x) - x = 2 - 3\log(1 + (-(x+1))) - (x+1) = 2 - 3\log(1+t) + t = 2 - 3(t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)) + t = 2 - 2t + \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2) = 2 + 2(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 + o_{-1}((x+1)^2)$. • Usando la scala delle potenze con i logaritmi si ha già lo sviluppo cercato, in quanto $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 1 - 3\log x - x = -3\log x + 1 - x + o_0(x)$. • Ancora una volta, usando la scala delle potenze con i logaritmi si ha già lo sviluppo cercato, ovvero $f(x) = |3\log|x| - 1| - x = 3\log x - 1 - x = -x + 3\log x - 1 + o_{+\infty}(1)$.



(Ex. 25)



(Ex. 26)

Lez_141125mar Pagina 17

(26) $\boxed{f(x) = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|}{x+1}\right) - x}$

(Figura 1) Il dominio di $f(x) = 2\operatorname{arctg}(\frac{|x|}{x+1}) - x$ è dato da $x \neq -1$, e in esso la funzione è continua, anzi di classe $\mathcal{C}^\infty$ al di fuori di $x = 0$ in cui è atteso un punto angoloso. Si ha $f(x) \sim_{\mp\infty} -x$, dunque $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \pm\infty$; si ha poi $\lim_{x\to-1^\mp} f(x) = \mp\pi + 1$. Per zeri e segno poniamo $t = \frac{|x|}{x+1}$, da cui $x = -\frac{t}{t\mp1}$ a seconda che $x \gtrless 0$. In $x = 0$ si ha $f(0) = 0$; se $x > 0$ (che corrisponde a $0 < t < 1$) si ha $f(x) \geq 0$ per $\operatorname{arctg} t \geq -\frac{t}{2(t-1)}$, il che accade quando $0 < t \leq t_0$ per un certo $t_0 \sim 0{,}5$ , ovvero quando $0 < x \leq x_0 := \frac{t_0}{1-t_0} \sim 1$; se $x < 0$ (che corrisponde a $t < -1$ oppure $t > 0$) si ha $f(x) \geq 0$ per $\operatorname{arctg} t \geq -\frac{t}{2(t+1)}$, il che accade quando $t_1 \leq t < -1$ per un certo $t_1 \sim -1{,}9$ oppure quando $t > 0$, ovvero quando $x \leq x_1 := -\frac{t_1}{1+t_1} \sim -2{,}1$ oppure quando $-1 < x < 0$. Quanto agli asintoti, notando che $\lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - (-x)) = 2(\mp\frac{\pi}{4}) = \mp\frac{\pi}{2}$ si ha che la retta $y = -x \mp \frac{\pi}{2}$ è asintoto a $\mp\infty$. Derivando per $x \neq 0$, a conti fatti si ottiene $f'(x) = \frac{2\operatorname{sign} x}{2x^2+2x+1} - 1$: pertanto se $x < 0$ (dunque se $x < -1$ oppure se $-1 < x < 0$) la funzione è strettamente decrescente, mentre se $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{2}{2x^2+2x+1} - 1 = -\frac{2x^2+2x-1}{2x^2+2x+1}$, dunque $f'(x) = 0$ per $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sim 0{,}4$ e $f'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, e perciò $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sim 0{,}4$ è di massimo locale (con $f(\frac{\sqrt{3}-1}{2}) \sim 0{,}2$). Si noti anche che $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = -3$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to0^+} f'(x) = 1$, dunque $x = 0$ è effettivamente angoloso, e di minimo locale; inoltre vale $\lim_{x\to-1} f'(x) = -3$, che rappresenta dunque la pendenza del grafico tendendo a $-1$. Infine, derivando ulteriormente (sempre per $x \neq 0$) si ottiene $f''(x) = -\frac{4(\operatorname{sign} x)(2x+1)}{(2x^2+2x+1)^2}$, da cui $f''(x) = 0$ per $x = -\frac{1}{2}$ e $f''(x) > 0$ per $-\frac{1}{2} < x < 0$: pertanto $f$ è convessa per $-\frac{1}{2} < x < 0$ e concava altrove, e ha un flesso in $x = -\frac{1}{2}$, con $f(-\frac{1}{2}) \sim 2$ e $f'(-\frac{1}{2}) = -5$.

• In $0^+$, posto $t = \frac{|x|}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ si ha $\operatorname{arctg} t = t - \frac{1}{3}t^3 + o_{0^+}(t^4)$, ed essendo $t = \frac{x}{x+1} = x\frac{1}{1-(-x)} = x(1 + (-x) + (-x)^2 + o_{0^+}(x^2)) = x - x^2 + x^3 + o_{0^+}(x^3)$ si ricava $\operatorname{arctg} t = (x - x^2 + x^3 + o_{0^+}(x^3)) - \frac{1}{3}(x^3 + o_{0^+}(x^3)) + o_{0^+}(x^4) = x - x^2 + o_{0^+}(x^2)$, da cui $f(x) = 2x - 2x^2 + o_{0^+}(x^2) - x = x - 2x^2 + o_{0^+}(x^2)$ (che, si noti, corrisponde allo sviluppo di Taylor di $f$ usando le derivate destre in $x = 0^+$) • Sappiamo che l'asintoto obliquo di $f(x)$ a $+\infty$ è $-x + \frac{\pi}{2}$, ovvero $f(x) = -x + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)$: questo è già lo sviluppo cercato.

---

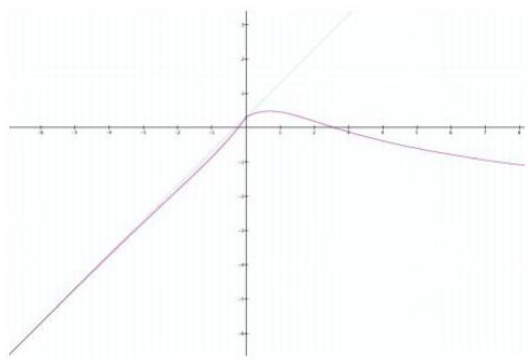
(27) $\boxed{f(x) = 1 - \log(|x| + 2e^{-x})}$

(Vedi figura) La funzione $f(x) = 1 - \log(|x| + 2e^{-x})$ è definita quando $|x| + 2e^{-x} > 0$, che è sempre soddisfatta: dunque il dominio è tutto $\mathbb{R}$. Non ha simmetrie ne' periodi, è continua, ed è infinitamente derivabile ovunque tranne che eventualmente in $x = 0$, a causa del modulo. Si annulla quando $|x| + 2e^{-x} = e$, ovvero per $2e^{-x} = e - |x|$, che un confronto grafico dice accadere in due punti $x_1 \sim -0{,}2$ e $x_2 \sim 2{,}5$; è positiva per $|x| + 2e^{-x} < e$, ovvero per $2e^{-x} < e - |x|$, vero per $x_1 < x < x_2$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = -\infty$; per la ricerca di eventuali asintoti obliqui, con de l'Hôpital si trova $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}(-\frac{\operatorname{sign} x - 2e^{-x}}{|x|+2e^{-x}}) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to-\infty}(1 - \log(|x| + 2e^{-x}) + \log e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty}(1 - \log\frac{|x|+2e^{-x}}{e^{-x}}) = 1 - \log 2 \sim 0{,}3$, da cui l'asintoto obliquo $y = x + (1 - \log 2)$ a $-\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e dunque a $+\infty$ non c'è asintoto obliquo. Altrimenti, ragionando col calcolo asintotico: a $-\infty$ si ha $f(x) = 1 - \log(2e^{-x}(1 + \frac{1}{2}|x|e^x)) = 1 - (\log 2 + \log(e^{-x}) + \log(1 + \frac{1}{2}|x|e^x)) = x + 1 - \log 2 + o_{-\infty}(1)$, mentre tendendo a $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} -\log x$. Derivando per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = -\frac{\operatorname{sign} x - 2e^{-x}}{|x|+2e^{-x}}$: si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2e^{-x} \geq \operatorname{sign} x$, e ciò è vero per $x < 0$ e per $0 < x < x_3$

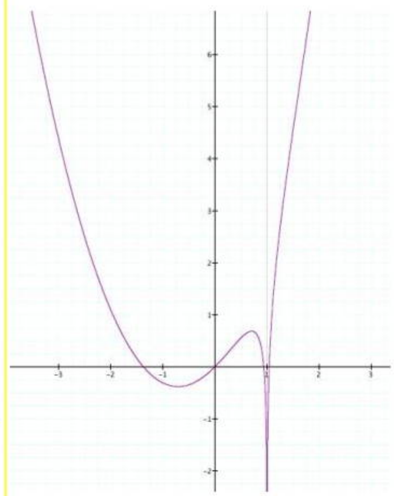
Lez_141125mar Pagina 18

$-\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e dunque a $+\infty$ non c'è asintoto obliquo. Altrimenti, ragionando col calcolo asintotico: a $-\infty$ si ha $f(x) = 1-\log(2e^{-x}(1+\frac{1}{2}|x|e^{x})) = 1-(\log 2+\log(e^{-x})+\log(1+\frac{1}{2}|x|e^{x})) = x+1-\log 2+o_{-\infty}(1)$, mentre tendendo a $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} -\log x$. Derivando per $x \neq 0$ si ottiene $f'(x) = -\frac{\operatorname{sign} x - 2e^{-x}}{|x|+2e^{-x}}$: si ha $f'(x) \geq 0$ se e solo se $2e^{-x} \geq \operatorname{sign} x$, e ciò è vero per $x < 0$ e per $0 < x < x_3$ per un certo $x_3 \sim 0{,}7$, dunque $x = x_3$ è un punto di massimo relativo (in realtà assoluto) con $f(x_3) \sim 0{,}5$. Notiamo anche che $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{3}{2}$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{2}$, dunque in $x = 0$ si ha effettivamente un punto angoloso (con $f(0) = 1-\log 2 \sim 0{,}3$). Infine, derivando ancora (sempre per $x \neq 0$) e calcolando si ottiene $f''(x) = \frac{1-2e^{-x}(|x|+\operatorname{sign} x)}{(|x|+2e^{-x})^2}$, pertanto $f''(x) \geq 0$ (ovvero $f$ è convessa) quando $2e^{-x}(|x|+\operatorname{sign} x) \leq 1$, ovvero $2(|x|+\operatorname{sign} x) \leq e^{x}$, e ciò accade per $x_4 \leq x < 0$ e per $x \geq x_5$ per certi punti di flesso $x_4 \sim -2{,}1$ e $x_5 \sim 2{,}1$.

• Sappiamo che l'asintoto obliquo di $f(x)$ a $-\infty$ è $x + (1-\log 2)$, ovvero $f(x) = x + (1-\log 2) + o_{-\infty}(1)$: questo è già lo sviluppo cercato. • In $0^+$ possiamo usare lo sviluppo di Taylor a destra, che dà $f(x) = (1-\log 2) + \frac{1}{2}x + o_0(x)$. • Infine, la parte principale di $f$ in $+\infty$ è $-\log x$, e poi $f(x) - (-\log x) = 1 - \log(1 + \frac{2e^{-x}}{x}) = 1 + o_{+\infty}(1)$, dunque $f(x) = -\log x + 1 + o_{+\infty}(1)$.



(Ex. 27)



(Ex. 28)

(28) $\boxed{f(x) = x(x+2) + \log|x-1|}$

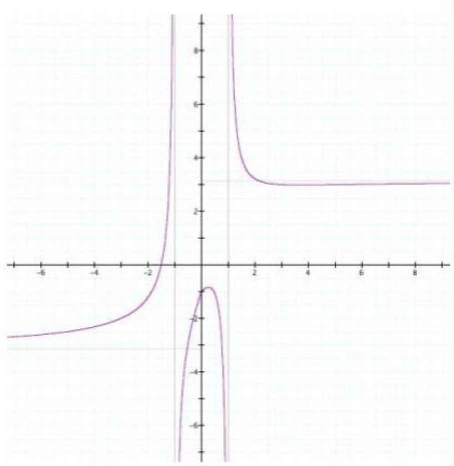
(Vedi figura) La funzione $f(x) = x(x+2)+\log|x-1|$ è definita per $x \neq 1$; non ha simmetrie ne' periodi, è continua, ed è infinitamente derivabile in ogni punto del dominio. Si annulla quando $\log|x-1| = -x(x+2)$, che un confronto grafico dice accadere in $x = 0$ e in altri tre punti $x_1 \sim -1{,}2$, $x_2 \sim 0{,}9$ e $x_3 \sim 1{,}1$; ed è positiva quando $\log|x-1| > -x(x+2)$, il che accade quando $x < x_1$, $0 < x < x_2$ e $x > x_3$. I limiti notevoli, tutti determinati, valgono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1\mp} f(x) = -\infty$; e non vi sono asintoti obliqui (si noti che $f(x) \sim_\infty x^2$). Derivando si ottiene $f'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x-1} = \frac{2x^2-1}{x-1}$: si ha allora $f'(x) \geq 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x > 1$, dunque $x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo/massimo relativo. Infine, derivando ancora si ha $f''(x) = 2 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-4x+1}{(x-1)^2}$, pertanto $f$ è convessa quando $x < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• In 0 si ha $f(x) = x(x+2)+\log(1-x) = 2x+x^2+(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+o_0(x^2) = x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)$. • La parte principale di $f(x)$ in 1 (rispetto ad una scala logaritmo/potenze di $|x-1|$) è chiaramente $\log|x-1|$; si ha poi $f(x) - \log|x+1| = x(x+2) = 3 + o_1(1)$, dunque lo sviluppo cercato è $f(x) = \log|x+1| + 3 + o_1(1)$. • Infine, la parte principale di $f$ in $+\infty$ è $x^2$, e poi $f(x) - x^2 = 2x + \log(x-1) = 2x + o_{+\infty}(x)$, dunque $f(x) = x^2 + 2x + o_{+\infty}(x)$.

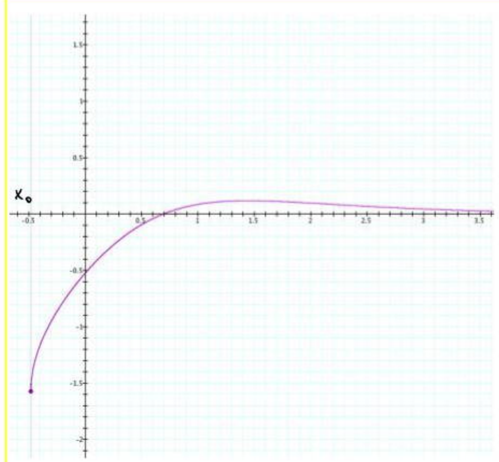
(29) $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{|x|-1} + 2\,\mathrm{arctg}\,x}$

La funzione $f(x) = \frac{1}{|x|-1} + 2\,\mathrm{arctg}\,x$ è definita per $x \neq \mp 1$; non ha simmetrie ne' periodi, è continua, ed è infinitamente derivabile in ogni punto del dominio tranne che eventualmente in $x = 0$ a causa del modulo. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $2\,\mathrm{arctg}\,x = -\frac{1}{|x|-1}$, e un confronto grafico tra le due funzioni mostra che ciò accade solo in un certo $x_1 \sim -1{,}5$; similmente si ha $f(x) > 0$ se e solo se $2\,\mathrm{arctg}\,x > -\frac{1}{|x|-1}$, e il confronto grafico dice che ciò è vero per $x_1 < x < -1$ o per $x > 1$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\pi$ (dunque $y = \mp\pi$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$), $\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to 1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$. Derivando per $x \neq 0$, posto $\sigma := \mathrm{sign}\,x$ si ottiene $f'(x) = -\frac{\sigma}{(|x|-1)^2} + \frac{2}{x^2+1}$; dunque per $x < -1$ e per $-1 < x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{3x^2+4x+3}{(x^2+1)(x+1)^2} > 0$ (cresce sempre), mentre per $0 < x < 1$ e per $x > 1$ si ha $f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ (dunque $f$ cresce da 0 fino al punto di massimo relativo in $x = 2-\sqrt{3}$, poi decresce a $-\infty$ tendendo a $1^-$, quindi riparte da $+\infty$ tendendo a $1^+$, decresce fino al punto di minimo relativo in $x = 2+\sqrt{3}$ e quindi cresce tendendo all'asintoto orizzontale a quota $\pi \sim 3{,}1$); ricordando che $2-\sqrt{3} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{12}$ e $2+\sqrt{3} = \mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{12}$ si calcola $f(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \sim -0{,}8$ e $f(2+\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sim 3{,}0$. Da notare anche che $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 3$ e $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ sono diverse, dunque come previsto la funzione ha un punto angoloso in $x = 0$.

• In $0^+$ la funzione è finita, con $f(0) = -1$; ricordando poi che $f'_+(0) = 1$ si conclude che $f(x) = -1 + x + o_{0^+}(x)$. • In 1 la parte principale (rispetto ad una scala di potenze di $x-1$) è chiaramente $\frac{1}{x-1}$; si ha poi $f(x) - \frac{1}{x+1} = 2\,\mathrm{arctg}\,x = 2\frac{\pi}{4} + o_1(1) = \frac{\pi}{2} + o_1(1)$, dunque lo sviluppo è $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{\pi}{2} + o_1(1)$. • Infine, la parte principale di $f$ in $+\infty$ è il valore asintotico $\pi$, poi $f(x) - \pi = \frac{1}{x-1} + 2\,\mathrm{arctg}\,x - \pi$: ed essendo $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-\pi}{1/x} = -1$ (si può calcolare ad esempio con de l'Hôpital) ne ricaviamo che $f(x) - \pi \sim_{+\infty} -\frac{1}{x}$, da cui lo sviluppo $f(x) = \pi - \frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$.



(Ex. 29)




(Ex. 30)

(30) $\boxed{f(x) = \arcsin\left(\frac{e^x - 2}{e^{2x}+1}\right)}$

Il dominio è dato da $-1 \leq \frac{e^x-2}{e^{2x}+1} \leq 1$, ovvero $\begin{cases} e^{2x}+e^x-1 \geq 0 \\ \cancel{e^{2x}-e^x+3 \geq 0} \end{cases}$ ← SEMPRE VERA ;

posto $t = e^x$ equivale a $t^2+t-1 \geq 0$, vera per $\left(\cancel{t = e^x \leq \frac{-1-\sqrt5}{2}}\right)$ impossibile $\vee \left(t = e^x \geq \frac{\sqrt5 - 1}{2}\right)$, ovvero per $x \geq x_0 := \log\left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right) \sim -0{,}5$.

Dunque $f$ è definita in $[x_0, +\infty[$, e in tale dominio è $\mathcal{C}^\infty$ tranne che nell'estremo $x = x_0$, punto in cui l'argomento dell'arco-seno diventa $-1$ (però vale $f(x_0) = -\pi/2 \sim -1{,}5$) e allora c'è attesa le sola continuità con tangenza verticale al grafico.

Zeri: $f(x) = 0 \iff \frac{e^x-2}{e^{2x}+1} = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \log 2 \sim 0{,}7$

Segno: $f(x) > 0 \iff \frac{e^x-2}{e^{2x}+1} > 0 \iff e^x > 2 \iff x > \log 2$.

Limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$ (infatti l'argomento dell'arco-seno tende a $0^+$).

Derivata: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{e^x-2}{e^{2x}+1}\right)^2}} \cdot \frac{e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x}\cdot(e^x-2)}{(e^{2x}+1)^2} =$

$$= -\frac{e^x}{\sqrt{(e^{2x}+1)^2 - (e^x-2)^2}} \cdot (e^{2x} - 4e^x - 1).$$

Si ha dunque $f'(x) \geq 0 \iff (-\sqrt5+2 \leq) e^x \leq \sqrt5+2 \iff x \leq \log(\sqrt5+2) \sim 1{,}4$, e ne segue $x = x_1 := \log(\sqrt5+2)$ è punto di massimo assoluto (con $f(x_1) = \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt5+4}\right) \sim 0{,}1$).

Sviluppi asintotici di $f$. Le derivate di arcsin sono $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\arcsin u)'' = u(1-u^2)^{-3/2}$, $(\arcsin u)''' = (1+2u^2)(1-u^2)^{-5/2}$, $(\arcsin u)^{(IV)} = 3u(2u^2+3)(1-u^2)^{-7/2}$ e così via, dunque per Taylor

$\arcsin u = u + \frac16 u^3 + o_0(u^4)$ [RISULTATO ATTESO: È DISPARI ED È L'INVERSA DEL SENO].

Usando le derivate e de l'Hôpital si può calcolare anche lo sviluppo di $\arcsin u$ in $u = -1^+$, che viene

$$\arcsin u = -\pi/2 + \sqrt2\,(x+1)^{1/2} + \frac{1}{6\sqrt2}(x+1)^{3/2} + o_{-1^+}((x+1)^{3/2});$$

per disparità, in $u=1^-$ si avrà altre

$$\arcsin u = \pi/2 - \sqrt{2}\,(1-x)^{1/2} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\,(1-x)^{3/2} + o_{1^-}\left((1-x)^{3/2}\right).$$

Poiché per $x\to+\infty$ si ha che $u=\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}\to 0$, con lo sviluppo di $\arcsin u$ in uno si ottiene che

$$f(x)=\left(\frac{e^x-2}{e^{2x}+1}\right)+\frac{1}{6}\,(\cdots)^3+o_{+\infty}\left((\cdots)^4\right).$$

Ora, si ha $\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}\underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$, e $\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}-e^{-x}=\dfrac{-2-e^{-x}}{e^{2x}+1}\sim -2e^{-2x}$

dunque $\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}=e^{-x}-2e^{-2x}+o_{+\infty}(e^{-2x})$, e pertanto

$$f(x)=e^{-x}-2e^{-2x}+o_{+\infty}(e^{-2x})$$ (gli altri addendi sono tutti $o_{+\infty}(e^{-2x})$).

Usando invece lo sviluppo di $\arcsin u$ in $u\sim -1$ si potrebbe calcolare lo sviluppo di $f(x)$ in $x\sim x_0^+$: posto $u=\dfrac{e^x-2}{e^{2x}+1}$ si ha

$$f(x)=\arcsin u = -\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\,(u+1)^{1/2}+\frac{1}{6\sqrt{2}}\,(u+1)^{3/2}+o_{x_0}\left((u+1)^{3/2}\right),$$

poi va sviluppato in $x\sim x_0^+$ l'infinitesimo $u+1$: posto $t=x-x_0\sim 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}
u+1 &= \frac{e^{2(x_0+t)}+e^{x_0+t}-1}{e^{2(x_0+t)}+1} = \frac{e^{2x_0}e^{2t}+e^{x_0}e^{t}-1}{e^{2x_0}e^{2t}+1}\\
&= \frac{e^{2x_0}\left(1+2t+2t^2+o_0(t^2)\right)+e^{x_0}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)-1}{e^{2x_0}\left(1+2t+2t^2+o(t^2)\right)+1}\\
&= \frac{\big(\overbrace{e^{2x_0}+e^{x_0}-1}^{0}\big)+\left(2e^{2x_0}+e^{x_0}\right)t+\left(2e^{2x_0}+\frac{1}{2}e^{x_0}\right)t^2+o_0(t^2)}{\left(e^{2x_0}+1\right)+2e^{2x_0}t+2e^{2x_0}t^2+o_0(t^2)} \begin{matrix}\leftarrow N(t)\\ \leftarrow D(t)\end{matrix}\\
&= at+bt^2+o_0(t^2) \text{ con } a,b \text{ da determinare (a cascata),}
\end{aligned}$$

da cui, moltiplicando i due membri per $D(t)$,

$$N(t)=D(t)\cdot\left(at+bt^2+o_0(t^2)\right)=a\left(e^{2x_0}+1\right)t+\left(b\left(e^{2x_0}+1\right)+2e^{2x_0}a\right)t^2+o_0(t^2)$$

da cui, confrontando gli sviluppi nei due membri estremi,

$$\begin{cases} 2e^{2x_0}+e^{x_0}=a\left(e^{2x_0}+1\right)\\ 2e^{2x_0}+\frac{1}{2}e^{x_0}=b\left(e^{2x_0}+1\right)+2ae^{2x_0}\end{cases}$$ da cui

$$\begin{cases} a=\dfrac{e^{x_0}\left(2e^{x_0}+1\right)}{e^{2x_0}+1}=1\\ b=-\dfrac{e^{x_0}\left(4e^{3x_0}+3e^{2x_0}-4e^{x_0}-1\right)}{2\left(e^{2x_0}+1\right)^2}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}\end{cases}$$

sostituendo $x_0=\log\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Posto $u+1 = t + \frac{1}{2\sqrt{5}} t^2 + o_{0^+}(t^2)$ : ne segue anche che

$$(u+1)^{1/2} = t^{1/2}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{5}}t + o_0(t)\right)^{1/2} =$$

$$= t^{1/2}\left(1 + \frac{1}{4\sqrt{5}}t + o_0(t)\right) = t^{1/2} + \frac{1}{4\sqrt{5}} t^{3/2} + o_0(t^{3/2}) \quad e$$

$$(u+1)^{3/2} = t^{3/2}\left(1+\frac{1}{4\sqrt{5}}t + o_0(t)\right)^3 = t^{3/2} + o_0(t^{3/2}), \quad \text{da cui}$$

da cui finalmente

$$f(x) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\left(t^{1/2} + \frac{1}{4\sqrt{5}} t^{3/2} + o_0(t^{3/2})\right) + \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(t^{3/2} + o_0(t^{3/2})\right) + o_0(t^{3/2})$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\, t^{1/2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\right) t^{3/2} + o_0(t^{3/2}), \quad \text{con } t = x - x_0 .$$