

ANALISI MATEMATICA I

Università di Padova

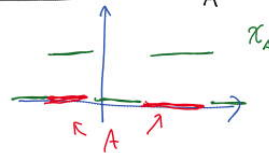
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di mercoledì 26/11/2014

Iniziamo parlando di integrale su UN INTERVALLO, non solo su tutto $\mathbb{R}$.

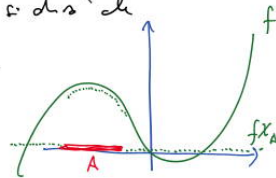
In generale, dato $A \subseteq \mathbb{R}$, definiamo la funzione caratteristica χ_A con:

$$\chi_A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$



(con questa notazione, la funzione di Dirichlet è $\chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}$).

Dato una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e un intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, si dice che f è INTEGRABILE SU A se $f\chi_A$ è integrabile su $\mathbb{R}$.



Si definisce

$$\int_A f := \int_{\mathbb{R}} f\chi_A$$

Prop. (i) Se A, B intervalli t.c. $\bar{A} = \bar{B}$, allora f è integrabile su A se e solo se lo è su B , e vale $\int_A f = \int_B f$.

LA PRESENZA
• NELLO DEI
ESTREMI DELL'
INTERVALLO
È INDIFFERENTE!

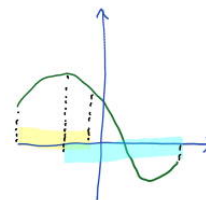
(ii) Se f è integrabile su un intervallo A , allora f è integrabile anche su un qualunque altro intervallo $B \subseteq A$.

(iii) (ADDITIVITÀ SUL BORDINO)

Siano A, B intervalli t.c. $A \cup B$ sia intervallo.

Allora f è integrabile su $A \cup B$ se e solo se lo è sia su A

che su B , e vale $\int_{A \cup B} f + \int_{A \cap B} f = \int_A f + \int_B f$.



La seguente proprietà è di grande importanza:

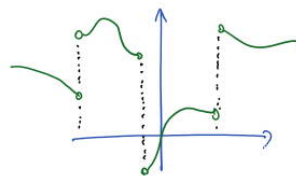
se $A \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo, si dirà che $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è LOCALMENTE INTEGRABILE in A

se f è integrabile su ogni intervallo compatto contenuto in A .

Questa è in effetti la proprietà chiave nella teoria dell'integrazione, perché è il naturale indebolimento della nozione di continuità (per l'esistenza dell'integrale, la continuità è troppo!) ed è posseduta da altre interessanti famiglie di funzioni:

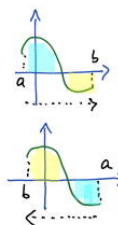
Prop. Tutte le funzioni "bilanciate" (ovvero, con al più delle discontinuità di 1° specie, ovvero in cui esistono finiti sia $\lim dx$ che $\lim sx$) sono scalari integrabili. In particolare lo sono tutte le funzioni continue, le funzioni semplici, le funzioni monotone.

(Che le funzioni continue e le semplici siano bilanciate è ovvio; per le funzioni monotone ricordare il risultato sui limiti sx e dx .)



Sia f una funzione integrabile su un intervallo compatto di estremi a e b (con $a < b$ oppure $a > b$). Definiamo l'**INTEGRALE ORIENTATO** di estremi a e b :

$$\int_a^b f(x) dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f & (\text{se } a \leq b) \\ -\int_{[b,a]} f & (\text{se } a > b) \end{cases}$$



Prop. L'integrale orientato ha le seguenti proprietà:

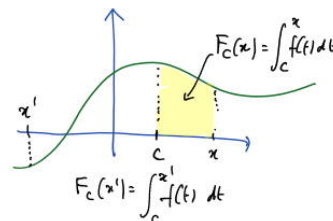
$$(1) \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_a^b (-f)(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$(2) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad \text{comunque siano messi tra loro } a, b, c.$$

(1) è ovvio, (2) si verifica direttamente nei vari casi: $a < b < c$, $b < c < a$, ...)

Sia A intervallo di $\mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile. Fissato $c \in A$, definiamo la **FUNZIONE INTEGRALE** $F_c: A \rightarrow \mathbb{R}$ di punto iniziale c con:

$$F_c(x) := \int_c^x f(t) dt$$



La funzione F_c è l'antecedente di f in termini regolarità:

Prop. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in A$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ loc. integrabile in A . Allora:

(i) F_c è continua.

(ii) (TEOREMA DI TONELLI) Se f è già continua, F_c è di classe C^1 , e vale $F_c' = f$.

Conseguenze:

(1) (MEAN INTEGRAL) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, esiste $\xi \in]a, b[$ t.c.

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(2) (TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO)

Se A è intervallo di $\mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ è una qualunque primitiva di f , allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

INTEGRALE
DEFINITO

(Notazione: talvolta $F(b) - F(a)$ si denota con $(F(x)) \Big|_a^b$.)

Dimostreremo il teorema di Torricelli nella prossima lezione.

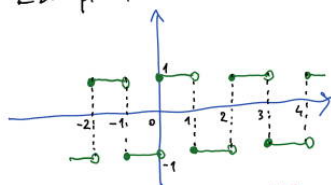
Per il momento mostriamo che da esso discendono subito (1) e (2):

(1) Se f è continua, F_c è derivabile: dunque per Lagrange $\exists \xi \in]a, b[$
 t.c. $F'_c(\xi) = \frac{F_c(b) - F_c(a)}{b - a}$, ovvero $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \left(\int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

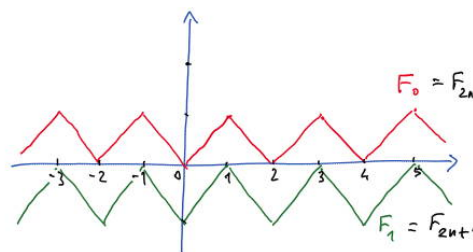
(2) Se F è una qualche primitiva di f , preso un $c \in A$
 esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c. $F = F_c + K$ (sono due primitive di f),
 dunque $F(b) - F(a) = (F_c(b) + K) - (F_c(a) + K) = \int_c^b f(x) dx - \int_c^a f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Ex. • Si è detto che se f è bc. integrabile allora di ca. F_c è continua.

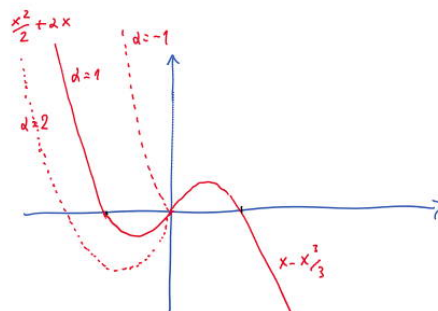
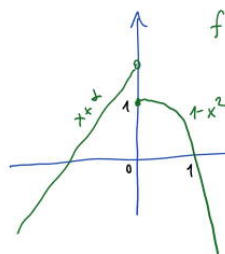
Esempi.



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^{[x]}$
 è solo bc. integrabile, non continua



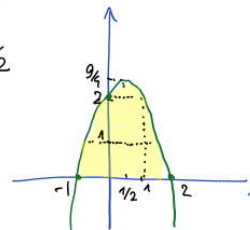
(In generale $F_c = F_{c+2n}, n \in \mathbb{Z}$)



(F_1 e F_0 invertita
 di $\int_0^1 f(x) dx = (x - x^3/3) \Big|_0^1 = 2/3$)

• (calcoliamo l'area sottesa dalla parabola $y = 2 + x - x^2$ su $[-1, 2]$).

$$\int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx = \left(2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2}$$



Alcuni esercizi.

Studiare l'andamento delle seguenti funzioni, e calcolarne l'integrale definito sugli intervalli specificati:

$$(1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} \quad \text{su } [1, e]$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{\sin 2x}{5 - \sin^2 x} \quad \text{su } [0, \pi/2]$$

$$(3) \quad f(x) = x e^{-x} \quad \text{su } [-1, 2]$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + x} \quad \text{su } [a, b] \quad (\text{per quali } a, b \text{ ha senso?})$$

Svolgiamo ora il primo esercizio.

$$(1) \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} \quad \text{su } [1, e]$$

Iniziamo dall'integrale.

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} \cdot (1+\log x)^{1/2} dx = \left(\frac{(1+\log x)^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_1^e = \left(\frac{2^{3/2}}{1/2} \right) - \left(\frac{1^{3/2}}{3/2} \right) \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \approx 1,3 \quad (\text{senza di potere operare una sostituzione ponendo} \\ 1+\log x &= t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt, \text{ da cui } \int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + K = \\ &= \frac{2}{3} (1+\log x)^{3/2} + K; \text{ oppure ponendo } \sqrt{1+\log x} = u \Rightarrow 1+\log x = u^2 \Rightarrow \frac{1}{x} dx = 2u du, \\ \text{da cui } \int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx &= \int u \cdot 2u du = 2 \int u^2 du = \frac{2}{3} u^3 + K = \frac{2}{3} (1+\log x)^{3/2} + K.) \end{aligned}$$

Passiamo ora allo studio di funzione, per vedere se il valore d'area ottenuto è realistico.

$$\text{Danno: } \begin{cases} 1+\ln x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$$

Dunque $[\frac{1}{e}, +\infty]$.

Valore $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, senno' $f(x)>0$.

Limiti: f è $\mathcal{C}^\infty$, tranne che in $x=\frac{1}{e}$

in cui, a causa delle radici, c'è continuità ma c'è ancora tangenza verticale.

L'unica limite interessante è a $+\infty$.

$$\text{P.p. di } f \text{ a } +\infty: f(x) = \frac{\ln^{\frac{1}{2}}(x)}{x} \left(\sqrt{1+\frac{1}{\ln x}} \right) = \ln^{\frac{1}{2}}(x) \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln x} + o_{+\infty}(\ln^{-1}(x)) \right)$$

$$\frac{\ln^{\frac{1}{2}}(x)}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x \ln^{\frac{1}{2}}(x)} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x \ln^{\frac{1}{2}}(x)}\right). \text{ In part. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^{\frac{1}{2}}(x)}{x} = 0^+$$

(Anche se non si tratta di un limite interessante, sarebbe comunque "interessante" calcolare lo sviluppo asintotico di f in $x \sim \frac{1}{e}^+$: vista la complicazione del conto, spreghiamo che fare alla fine di questo studio di funzione.). Passiamo ora invece alla derivata:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}} \cdot \frac{1}{x} - 1 \cdot \sqrt{1+\ln x}}{x^2} = \frac{1-2(1+\ln x)}{2x^2\sqrt{1+\ln x}} = -\frac{1+2\ln x}{2x^2\sqrt{1+\ln x}}$$

Notando che $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} f'(x) = +\infty$, come previsto (pendenza verticale).

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{\frac{e}{2}} \sim 1,1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt{e}} \Rightarrow \text{PTO MAX ALL.}$$

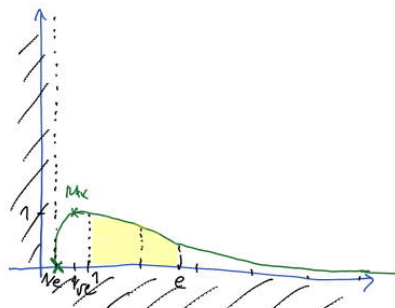
$$\text{Derivata ancora, dopo vari conti si arriva a } f''(x) = \frac{8\ln^2 x + 10\ln x + 1}{2x^3(1+\ln x)^{3/2}}.$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{8} \quad \text{Non accettabile (per } < -1 \text{)} \quad \sim -0,11 \text{ accettabile} \Leftrightarrow x=x_0 = e^{-0,11} \sim 0,9$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow x > x_0$$

f''	-	+
f	$\cap$	$\cup$
	Falso	

$$f(x_0) \approx 1,05$$



In sostanza, il valore trovato per $\int_1^e f(x) dx (\sim 1,3)$ è del tutto ragionevole.

Terminiamo mostrando come procedere per lo sviluppo asintotico di $x \sim \frac{1}{e} + t$.

Però $x = \frac{1}{e} + t$ con $t \sim 0^+$, si tratta di sviluppare per $t \sim 0^+$ la funzione

$$f(x) = f\left(\frac{1}{e} + t\right) = \frac{\sqrt{1 + \ln\left(\frac{1}{e} + t\right)}}{\frac{1}{e} + t} = \frac{\sqrt{1 + \ln\left(\frac{1}{e}(1+et)\right)}}{\frac{1+et}{e}} =$$

$$= e \cdot \frac{1}{1+et} \cdot \sqrt{1 + (-1) + \ln(1+et)} = e \cdot \frac{1}{1+et} \cdot \sqrt{\ln(1+et)}.$$

Lo sviluppo di $\frac{1}{1+et} = \frac{1}{1-(-et)}$ è come noto $1 - et + e^2 t^2 - e^3 t^3 + o_e(t^3)$.

Più delicata è la questione per $\sqrt{\ln(1+et)}$, per il quale mostriamo due approcci.

1. Poiché $\ln(1+et) \sim_0 et$, facciamo uscire dalle radici la p.p. $\sqrt{et}$:

$$\sqrt{\ln(1+et)} = \sqrt{et} \sqrt{\frac{\ln(1+et)}{et}} = \sqrt{et} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln(1+et)}{et} - 1\right)} \quad s \rightarrow 0$$

$$= \sqrt{et} \left(1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o_e(s^2)\right).$$

$$\text{D'altra parte } s = \frac{\ln(1+et)}{et} - 1 = \frac{et - \frac{1}{2}e^2 t^2 + \frac{1}{3}e^3 t^3 + o_e(t^3)}{et} - 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2}et + \frac{1}{3}e^2 t^2 + o_e(t^2) - 1 = -\frac{1}{2}et + \frac{1}{3}e^2 t^2 + o_e(t^2)$$

(in particolare $s \sim_0^* t$, dunque $o_e(s^2) = o_e(t^2)$).

$$\text{Abbiamo dunque } \sqrt{\ln(1+et)} = \sqrt{et} \left(1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2 + o_e(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{et} \left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}et + \frac{1}{3}e^2 t^2 + o_e(t^2)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}e^2 t^2 + o_e(t^2)\right) + o_e(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{et} \left(1 - \frac{1}{4}et + \frac{13}{96}e^2 t^2 + o_e(t^2)\right)$$

$$= \sqrt{et}^{1/2} - \frac{e\sqrt{e}}{4} t^{3/2} + \frac{13e^2\sqrt{e}}{96} t^{5/2} + o_e(t^2).$$

2. (Metodo dei coefficienti indeterminati). Poiché $\sqrt{\ln(1+et)} \sim_0 et$, un eventuale sviluppo asintotico di $\sqrt{\ln(1+et)}$ in scala di potenze

sarà del tipo $\sqrt{\ln(1+et)} = \sqrt{e} \cdot t^{1/2} + b \cdot t^\beta + c t^\gamma + o_e(t^\gamma)$

per opportuni $b, c \in \mathbb{R}$, $\beta > 1/2$ e $\gamma > \beta$. Elevando al quadrato:

$$\ln(1+et) = \left(\sqrt{e} \cdot t^{1/2} + b t^\beta + c t^\gamma + o_e(t^\gamma)\right)^2$$

$$= et + b^2 t^{2\beta} + c^2 t^{2\gamma} + 2b\sqrt{e} t^{\beta+1/2} + 2c\sqrt{e} t^{\gamma+1/2} + 2bc t^{\beta+\gamma} + o_e(t^{\gamma+1/2})$$

non sappiamo ancora se $2\beta \geq \gamma + 1/2$, dunque per ora lo teniamo

Ma d'altra parte vale anche

$$\ln(1+et) = et - \frac{1}{2}e^2t^2 + \frac{1}{3}e^3t^3 + \theta_0(t^3):$$

confrontando i due sviluppi abbiamo così

$$et + 2b\sqrt{e}t^{\beta+1/2} + b^2t^{2\beta} + 2c\sqrt{e}t^{\gamma+1/2} + \theta_0(t^{\delta+1/2}) = et - \frac{1}{2}e^2t^2 + \frac{1}{3}e^3t^3 + \theta_0(t^3).$$

A sx il termine di grado più basso è di grado $2b\sqrt{e}t^{\beta+1/2}$: questo implica

$$\begin{cases} \beta+1/2=2 \\ 2b\sqrt{e}=-1/2e^2 \end{cases}, \text{ ovvero } \begin{cases} \beta=3/2 \\ b=-\frac{e\sqrt{e}}{4} \end{cases}. \text{ A questo punto il confronto diventa:}$$

$$\frac{e^3}{16}t^3 + 2c\sqrt{e}t^{\gamma+1/2} + \theta_0(t^{\delta+1/2}) = \frac{1}{3}e^3t^3 + \theta_0(t^3), \text{ il che implica}$$

$\gamma+1/2 \geq 3$ ovvero $\gamma \geq 5/2$ (altrimenti a dx sarebbe tutto $\theta_0(t^{\delta+1/2})$ e a sx no, assurdo). Ora, visto che il coefficiente di t^3 a dx è $\frac{e^3}{3}$ mentre

quello visibile a sx è $\frac{e^3}{16}$ e i due non sono uguali, l'unica possibilità è che anche $t^{\gamma+1/2}$ sia un t^3 , ovvero che $\gamma=5/2$:

la condizione sui coefficienti diventa allora $\frac{e^3}{16} + 2c\sqrt{e} = \frac{e^3}{3}$, da cui $c = \frac{13}{96}e^2\sqrt{e}$.

Tornando a $f(x)$, si ha allora

$$f(x) = e \cdot \frac{1}{1+et} \cdot \sqrt{\ln(1+et)}$$

$$= e(1-et+e^2t^2-e^3t^3+\theta_0(t^3)) \cdot \left(\sqrt{e}t^{1/2} - \frac{e\sqrt{e}}{4}t^{3/2} + \frac{13e^2\sqrt{e}}{96}t^{5/2} + \theta_0(t^{5/2}) \right)$$

$$= e \left(\sqrt{e}t^{1/2} - \frac{5e\sqrt{e}}{4}t^{3/2} + \frac{133e^2\sqrt{e}}{96}t^{5/2} + \theta_0(t^{5/2}) \right), \text{ ove } t = x - \frac{1}{e}.$$