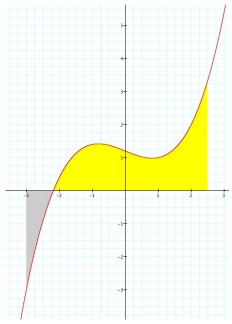
Dai Greci al Teorema Fondamentale del Calcolo

La storia del calcolo di aree e volumi (legato alle serie) è millenaria. Fino al calcolo differenziale (Newton-Leibniz) si sono usate tecniche spesso *ad hoc*: era più un saper fare che un sapere cosa e perché.

- I greci (dalle intuizioni di Anassagora e Zenone ai vari lavori di Eudosso, Euclide, Archimede) creano il metodo di esaustione: cioè, riempire l'area con figure elementari sempre più piccole.
- Dalla fine del 1500, con Cavalieri si passa al metodo agile ma poco rigoroso degli indivisibili (idea primordiale del nostro dx).
- In ogni caso, già con Torricelli si costruisce la funzione integrale d'area e si intuisce il suo legame con la funzione originaria.



Con Newton (e il suo maestro Barrow) e con Leibniz il TFC è ormai cosa assodata:

Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua e $F'=f$ si ha $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

...e Newton "snobba" l'integrale come *problema inverso della derivata*.

Ma come parlare d'integrale (area) in modo serio e senza derivata ?

L'integrale di Cauchy: buon inizio, ma...

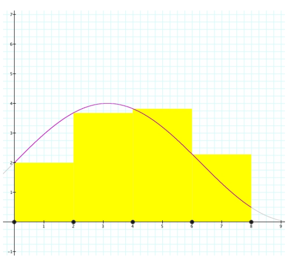
Verso il 1825 ci prova Cauchy, il padre del limite.

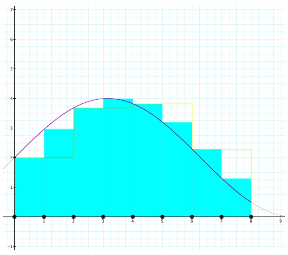
Riprendendo un'idea di Cavalieri, egli prima *misura pezzi di dominio*, poi li *moltiplica per il valore della funzione*.

Date $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ e $p=\{a<x_1<\cdots<x_{n-1}<b\}$ (una partizione di $[a,b]$), egli definisce la somma di f relativa a p

$$S_p(f)=f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

e dice: *"infittendo la partizione p, la somma $S_p(f)$ raggiunge un certo limite che dipende solo dalla forma di f e dagli estremi a e b. Questo limite è detto integrale definito."*



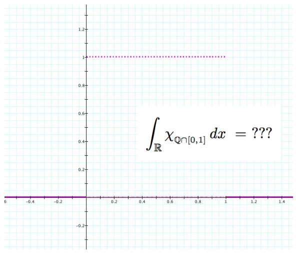


L'idea è buona e importante, ma...
è applicabile solo alle funzioni continue (o con alpiù un numero finito di discontinuità).

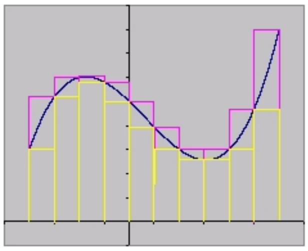
Dunque suscita insoddisfazione: si vuole una definizione più elastica, che allarghi la famiglia delle funzioni integrabili.

Da Dirichlet a Riemann, fino a Lebesgue

Uno degli scontenti è Dirichlet, che nel 1829, riflettendo sull'integrabilità delle funzioni con infinite discontinuità, dice che queste ultime non devono essere dense in alcun intervallo, citando l'esempio (che da allora porta il suo nome) della funzione caratteristica $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.



L'integrale di Riemann (in questo corso) è del 1854: si chiede approssimabilità sopra e sotto da funzioni a scalino con aree vicine tra loro a piacere. Ora molte più funzioni sono integrabili (es. le monotòne, o con sole discontinuità di salto), ma $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ non lo è ancora, e la teoria non funziona bene nel passaggio al limite.



Questi problemi vengono risolti da Lebesgue nel 1902: la sua teoria, che dà una nozione generale di misura e di trascurabilità (es. i sottoinsiemi numerabili in $\mathbb{R}$) si rivela molto duttile, soprattutto nel rapporto col limite.
Ora $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (*quasi ovunque* 0) ha integrale 0 !