Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica su integrazione e calcolo di aree

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

mercoledì 3 dicembre 2014

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito mercoledì 10/12). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.
Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 54 pt (6×9 pt). **Ex. 2:** 24 pt (3×8 pt). **Ex. 3:** 22 pt. **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Dopo aver studiato l'andamento e tracciato il grafico delle funzioni integrande, calcolare l'integrale definito proposto, verificando che il risultato numerico è coerente con l'andamento stesso:

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{9+3x-2x^2}\,dx\,;$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{-2} \frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2}\,dx\,;$ (c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos 2x}{1-\cos x}\,dx\,;$

(d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x-1}{\sqrt{|x+1|}}\,dx\,;$ (e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx\,;$ (f)[(1)] $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\log|x|\,dx\,.$

2. Disegnare con precisione le seguenti zone limitate del piano cartesiano, e calcolarne l'area (o quantomeno, in caso di conti complicati, scrivere correttamente come essa andrebbe calcolata):

(a) $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \log|x-y|\le 1\,,\ \log(x^2+y)\le 2\,,\ (x-2)(y+1)\le 0\}\,;$
(b) $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x-y<2|\cos x|\,,\ |x|+y<8\,,\ |x+1|<5\}\,;$
(c) $C = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2-2\le x+y\le 2+\frac{5}{6}(|y|+y)\}\,.$ [(2)]

3. La funzione $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è definita da $1-3x-x^2$ (se $x\le 0$), da $\frac{n(1+x^n)}{(x-2)^2}$ (se $0<x<2$) e da $1+\frac{x}{2}$ (se $x\ge 2$). Disegnare il grafico di f_n al variare di $n\in\mathbb{Z}$, specificandone la regolarità (cioè: localmente integrabile? continua? derivabile? e dove?). Descriverne poi la funzione integrale $F_{c,n}(x)$ di punto iniziale c (cioè $F_{c,n}(x)=\int_c^x f_n(t)\,dt$) nei due casi $c=-1$ e $c=3$.

[(1)] Questo integrale ha senso? Se sì, ...quale?
[(2)] Calcolare l'area di C in due modi, prima con variabile y e poi con variabile x.

Soluzioni.

1. Chiameremo sempre $f(x)$ la funzione integranda, del cui andamento forniremo uno studio essenziale.

$\boxed{\int_0^2 \frac{x^3}{9+3x-2x^2}\,dx}$ (Figura 1) Il denominatore si annulla in $x=-\frac{3}{2}$ e $x=3$, dunque f è definita al di fuori di quei punti; si ha $f(x)=0$ solo in $x=0$, e $f(x)>0$ per $x<-\frac{3}{2}$ e $0<x<3$. C'è una chiara presenza di asintoto lineare a $\mp\infty$, che risulta essere $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$. La derivata $f'(x)=\frac{x^2(27+6x-2x^2)}{(9+3x-2x^2)^2}$ si annulla in $x=-\frac{3(\sqrt{7}-1)}{2}\sim-2{,}5$, in $x=0$ e in $x=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{2}\sim 5{,}5$, ed è positiva per $-\frac{3(\sqrt{7}-1)}{2}<x<-\frac{3}{2}$, per $-\frac{3}{2}<x<3$ e per $3<x<\frac{3(\sqrt{7}+1)}{2}$: dunque $x=-\frac{3(\sqrt{7}-1)}{2}$ è di minimo (con $f(-\frac{3(\sqrt{7}-1)}{2})\sim 1{,}4$), $x=0$ è un flesso orizzontale e $x=\frac{3(\sqrt{7}+1)}{2}$ è di massimo (con $f(\frac{3(\sqrt{7}+1)}{2})\sim -4{,}7$). • Per il calcolo della primitiva, notiamo che dopo la divisione euclidea del numeratore per il denominatore si trova $\frac{x^3}{9+3x-2x^2}=-\frac{x^3}{2x^2-3x-9}=-\frac{1}{4}(2x+3+27\frac{x+1}{2x^2-3x-9})$; a sua volta, essendo $2x^2-3x-9=(2x+3)(x-3)$ esisteranno due costanti $A,B\in\mathbb{R}$ tali che $\frac{x+1}{2x^2-3x-9}=\frac{A}{2x+3}+\frac{B}{x-3}=\frac{(A+2B)x+3(B-A)}{2x^2-3x-9}$ da cui $A+2B=3(B-A)=1$ e i calcoli danno $A=\frac{1}{9}$ e $B=\frac{4}{9}$. Si trova così $\int\frac{x^3}{9+3x-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}(x^2+3x+\frac{3}{2}\log|2x+3|+12\log|x-3|)+k$, e calcolando l'integrale definito tra 0 e 2 si trova $\int_0^2 \frac{x^3}{9+3x-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}[(4+6+\frac{3}{2}\log 7)-(\frac{3}{2}\log 3+12\log 3)]=\frac{1}{8}(27\log 3-3\log 7-20)\sim 0{,}5$.

$\boxed{\int_{-1}^{-2}\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2}\,dx}$ (Figura 2) La funzione è definita per $x\neq 0$, punto in cui tende a $+\infty$; tende invece a $0^\mp$ quando x tende a $\mp\infty$. Si ha $f(x)=0$ quando $x=-1$, e $f(x)>0$ per $-1<x<0$ e per $x>0$. Derivando si ottiene $f'(x)=\frac{\frac{x}{x^2+2x+2}-2\operatorname{arctg}(x+1)}{x^3}$, e un confronto grafico tra le funzioni $\operatorname{arctg}(x+1)$ (l'arcotangente traslata a sinistra di 1) e $\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+2x+2}$ (di facile studio: continua su tutto $\mathbb{R}$, nulla in $x=0$ e positiva per $x>0$, tende a $0^\mp$ quando x tende a $\mp\infty$, e ha estremi assoluti in $x=\mp\sqrt{2}$) mostra che esiste un punto $a\in]-2,-1[$ tale che $f'(x)=0$ per $x=a$ e $f'(x)>0$ per $a<x<0$: si tratta dunque di un punto di minimo relativo. • Integrando per parti si ha $\int_{-1}^{-2}\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2}\,dx=(-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}(x+1)]_{-1}^{-2}-\int_{-1}^{-2}(-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx=(-\frac{\pi}{8})-(0)+\int_{-1}^{-2}\frac{1}{x(x^2+2x+2)}\,dx$. Esisteranno poi delle costanti $A,B,C\in\mathbb{R}$ tali che $\frac{1}{x(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+2A}{x(x^2+2x+2)}$, da cui $A+B=2A+C=0$ e $2A=1$, ovvero $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$ e $C=-1$: si ottiene dunque $\int\frac{1}{x(x^2+2x+2)}\,dx=\frac{1}{2}(\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+2x+1)-\operatorname{arctg}(x+1))$. Riprendendo dunque il conto dell'integrale definito si ha $-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}((\log 2-\frac{1}{2}\log 2-(-\frac{\pi}{4}))-(0))=\frac{1}{4}\log 2\sim 0{,}2$ (si noti che f è negativa nell'intervallo d'integrazione, ma l'integrazione stessa è fatta a ritroso: dunque è corretto che il risultato sia positivo).

$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}\,dx}$ (Figura 3) La funzione è definita per $x\neq 2k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$, è pari e ha periodo 2π; studiamola comunque in $]0,2\pi[$ (basterebbe la metà). Nel dominio si ha $f(x)\geq 0$ quando $\cos 2x\geq 0$, dunque si ha $f(x)=0$ in $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, e $f(x)>0$ in $0<x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}<x<2\pi$; il limite in $2k\pi$ è sempre $+\infty$. Derivando si ha $f'(x)=\frac{\sin x(2\cos^2-4\cos x+1)}{(1-\cos x)^2}$, dunque $f'(x)=0$ per $x=\pi$ e $\cos x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\sim 0{,}3$ (ovvero per $x=\alpha:=\arccos(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\sim 1{,}3$ e $x=2\pi-\alpha\sim 5$), ed essendo $f'(x)>0$ per $\alpha<x<\pi$ oppure $\pi<x<2\pi-\alpha$, si ha che α e $2\pi-\alpha$ sono punti di minimo relativo (in realtà assoluto, con $f(\alpha)=f(2\pi-\alpha)\sim-1{,}2$) e $x=\pi$ è di massimo relativo (con $f(\pi)=\frac{1}{2}$). • Si ha $\frac{\cos 2x}{1-\cos x}=\frac{2\cos^2 x-1}{1-\cos x}=\frac{2(\cos^2 x-1)+1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-\cos x}-2(1+\cos x)=\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}-2(1+\cos x)$, dunque $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos 2x}{1-\cos x}\,dx=(-\operatorname{cotg}\frac{x}{2}-2x-2\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=(-2\pi)-(-1-\pi-2)=3-\pi\sim-0{,}14$.

$\boxed{\int_0^3\frac{x-1}{\sqrt{|x+1|}}\,dx}$ (Figura 4) L'unico punto fuori dal dominio è $x=-1$, e in esso $f(x)$ tende a $-\infty$. Zeri e segno sono quelli del numeratore, dunque $f(x)\geq 0$ per $x\geq 1$. Si ha poi $f(x)\sim_{\mp\infty}\mp\sqrt{|x|}$, dunque $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=\mp\infty$ senza asintoti lineari. Posto $\sigma:=\operatorname{sign}(x+1)$ (ovvero $\sigma=\pm 1$ per $x\gtrless -1$) e osservato che $|x+1|=\sigma(x+1)$, derivando si trova $f'(x)=\frac{\sqrt{|x+1|}-(x-1)\frac{\sigma}{2\sqrt{|x+1|}}}{|x+1|}=\sigma\frac{x+3}{2|x+1|^{\frac{3}{2}}}$, pertanto $f'(x)\geq 0$ per $x\leq -3$ e per $x>-1$: dunque $x=-3$ è massimo locale (con $f(-3)\sim-2{,}8$). • Nell'intervallo d'integrazione $[0,3]$ si ha $x+1>0$; posto $t^2=x+1$ (ovvero $x=t^2-1$, con $dx=2t\,dt$) si ricava $\int_0^3\frac{x-1}{\sqrt{|x+1|}}\,dx=\int_1^2\frac{t^2-2}{t}2t\,dt=(\frac{2t^3}{3}-4t]_1^2=(\frac{16}{3}-8)-(\frac{2}{3}-4)=\frac{2}{3}$.

$\boxed{\int_1^2\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx}$ (Figura 5) La funzione è definita ovunque eccetto in $x=0$, ove tende a 0^- e a $+\infty$ a seconda che x tenda a $0^\mp$; si annulla in $x=-\frac{1}{2}$, ed è positiva per $x<\frac{1}{2}$ oppure $x>0$. Poiché $f(x)\sim_{\mp\infty}\frac{2}{x^2}$ si ha $\lim_{x\to\mp\infty}f(x)=0^+$. Derivando si ottiene $f'(x)=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}(4x^2+5x+1)$, dunque $f'(x)=0$ per $x=-1$ e $x=-\frac{1}{4}$, e

$f'(x)>0$ per $x<-1$ oppure $-\frac14<x<0$: perciò $x=-1$ è di massimo locale (con $f(-1)=\frac1e\sim 0{,}4$) e $x=-\frac14$ di minimo locale (in realtà globale, con $f(-\frac14)=-\frac{32}{e^4}\sim -0{,}6$). Si noti anche che $\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0^+$. • Con la sostituzione $x=\frac1t$ e integrando per parti si ottiene $\int_1^2 \frac{(2x+1)e^{\frac1x}}{x^3}\,dx=\int_1^{\frac12} t^3\,\frac{t+2}{t}e^t(-\frac{1}{t^2})\,dt=\int_{\frac12}^1 (t+2)e^t\,dt=((t+1)e^t]_{\frac12}^1=2e-\frac32\sqrt{e}$.

$\boxed{\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\log|x|\,dx}$ La funzione è dispari, ed è definita tranne che in $x=0$: in realtà, essendo $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x)=0^{\pm}$, si può prolungare f per continuità ponendo $f(0)=0$. Si ha poi $f(x)\sim_{\mp\infty}\mp\log|x|$, da cui $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$. Gli zeri sono in $x=\mp1$ (e, dopo il prolungamento per continuità, anche in $x=0$); si ha poi $f(x)>0$ per $-1<x<0$ e $x>1$. Derivando, dopo calcoli si ottiene $f'(x)=\frac{x^2+1+\log|x|}{(x^2+1)^{\frac32}}$; un confronto grafico tra $\log|x|$ e $-x^2-1$ mostra due punti stazionari $x=\mp a$ per un certo $a\in\,]0,1[$, rispettivamente di massimo e minimo locale con $f(\mp a)\sim\pm0{,}3$. Si noti che $\lim_{x\to 0^{\mp}} f'(x)=-\infty$, dunque (il prolungamento di) f non è derivabile in $x=0$. • L'integrale proposto (su $[0,1]$) ha senso come integrale usuale alla Riemann *solo dopo aver prolungato f per continuità in $x=0$*: cerchiamone allora una primitiva, che per il teorema di Torricelli già sappiamo sarà derivabile anche in $x=0$. Posto $u=\sqrt{x^2+1}$ (da cui $x=\sqrt{u^2-1}$, ove è $u\ge1$) e integrando per parti si ricava $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, dunque $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\log|x|\,dx=\frac12\int\log(u^2-1)\,du=\frac12(u\log(u^2-1)-\int u\frac{2u}{u^2-1}\,du=\frac12(u\log(u^2-1)-\int(2+\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1})\,du)=\frac12(u\log(u^2-1)-2u-\log|\frac{u-1}{u+1}|)+k=\sqrt{x^2+1}(\log|x|-1)-\frac12\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}+k$. La primitiva $F(x)=\sqrt{x^2+1}(\log|x|-1)-\frac12\log\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$, calcolata in 1, vale $F(1)=-\sqrt2-\frac12\log\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1}=\log(\sqrt2+1)-\sqrt2$. Il valore di F in 0 (inteso come limite) è invece piuttosto difficile da calcolare: si ha $F(x)=(1+\frac12x^2+o_0(x^3))(\log|x|-1)-\frac12\log(\frac12x^2+o_0(x^3))+\frac12\log(2+o_0(1))=(1+o_0(x))(\log|x|-1)-\frac12\log(\frac12x^2(1+o_0(x)))+\frac12\log(2+o_0(1))=\log|x|-1+o_0(1)-\frac12(2\log|x|-\log2+\log(1+o_0(x)))+\frac12\log(2+o_0(1))=-1+\log2+o_0(1)$, da cui $F(0)=\lim_{x\to0}F(x)=-1+\log2$. Dunque l'integrale cercato vale $F(1)-F(0)=(\log(\sqrt2+1)-\sqrt2)-(-1+\log2)\sim-0{,}2$.

2. $\boxed{A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\log|x-y|\le1\,,\ \log(x^2+y)\le2\,,\ (x-2)(y+1)\le0\}}$ (Figura 7) La condizioni equivalgono rispettivamente a $x-e\le y\le x+e$, a $-x^2\le y\le e^2-x^2$, e ai quadranti nord-ovest e sud-est dati dalle rette $x=2$ e $y=-1$. Trovati i punti d'intersezione tra le curve coinvolte (le parabole $y=-x^2$ e $y=e^2-x^2$, le rette $y=x\mp e$, $x=2$ e $y=-1$) si ha $\mathrm{Area}(A)=\int_{-e}^{e-1}(x+e)\,dx+\int_{e-1}^{2}(e^2-x^2)\,dx+\int_2^{e-1}(x-e)\,dx+\int_{e-1}^{1}(-1)\,dx+\int_1^{-1}(-x^2)\,dx+\int_{-1}^{-\sqrt{e^2+1}}(-1)\,dx+\int_{-\sqrt{e^2+1}}^{-e}(e^2-x^2)\,dx=(\frac{x^2}{2}+ex]_{-e}^{e-1}+(e^2x-\frac{x^3}{3}]_{e-1}^{2}+(\frac{x^2}{2}-ex]_2^{e-1}+(-x]_{e-1}^{1}+(-\frac{x^3}{3}]_1^{-1}+(-x]_{-1}^{-\sqrt{e^2+1}}+(e^2x-\frac{x^3}{3}]_{-\sqrt{e^2+1}}^{-e}$, che dopo un po' di conti diventa $\frac16(4(e^2+1)\sqrt{e^2+1}-8e^3+21e^2+12e-38)\sim14{,}4$.

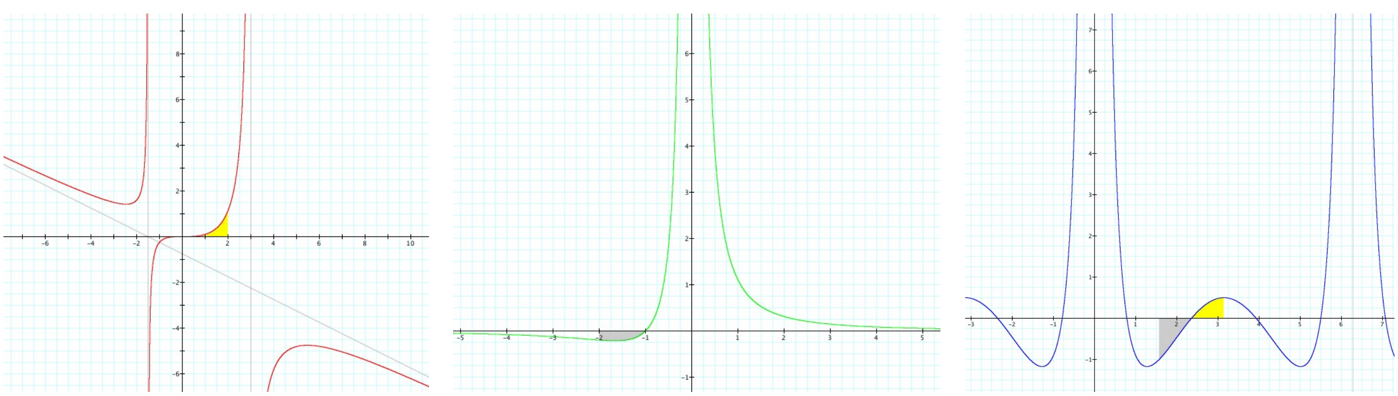
$\boxed{B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x-y<2|\cos x|\,,\ |x|+y<8\,,\ |x+1|<5\}}$ (Figura 8) La funzione $\phi(x)=x-2|\cos x|$ è "quasi-periodica", nel senso che $\phi(x+\pi)=\phi(x)+\pi$ per ogni $x\in\mathbb{R}$; basta dunque studiarla in $[-\frac\pi2,\frac\pi2]$, e poi traslarla in verticale negli altri tratti di dominio lunghi π. Derivando per $x\in\,]-\frac\pi2,\frac\pi2[$ si ha $\phi'(x)=1+2\sin x$, dunque ϕ decresce in $[-\frac\pi2,-\frac\pi6]$ da $\phi(-\frac\pi2)=-\frac\pi2\sim-1{,}5$ al minimo locale $\phi(-\frac\pi6)=-\frac\pi6-\sqrt3\sim-2{,}2$, per poi crescere in $[-\frac\pi6,\frac\pi2]$ fino a $\phi(\frac\pi2)=-\frac\pi2$; tutti i punti $x=\frac\pi2+k\pi$ (con $k\in\mathbb{Z}$) sono angolosi, e sono di massimo locale. L'insieme B è dunque quello racchiuso in verticale tra i grafici di $8-|x|$ (sopra) e di $x-2|\cos x|$ (sotto), e in orizzontale tra le rette $x=-6$ (sinistra) e $x=4$ (destra), e la sua area risulta $\mathrm{Area}(B)=\int_{-6}^4(8-|x|-(x-2|\cos x|))\,dx=\int_{-6}^4(8-|x|-x)\,dx+2\int_{-6}^4|\cos x|\,dx$. Per terminare il calcolo si può decomporre ciascuno dei due integrali in tratti del dominio sui quali rispettivamente x e $\cos x$ abbiano segno certo, il che autorizza a sbarazzarsi del modulo su ciascuno di questi intervalli; oppure si può notare che una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione continua $|x|$ è la funzione derivabile $(\operatorname{sign}x)\frac{x^2}{2}$, mentre una primitiva su $\mathbb{R}$ della funzione continua $|\cos x|$ è la funzione derivabile che, al variare di $k\in\mathbb{Z}$, sull'intervallo $]-\frac\pi2+k\pi,\frac\pi2+k\pi[$ vale $\sin x+2k$ (provare a disegnarle). In ogni caso, alla fine si ottiene il valore $\mathrm{Area}(B)=76+2(\sin4+\sin6)\sim74$.

$\boxed{C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y^2-2\le x+y\le2+\frac56(|y|+y)\}}$ (Figura 9) Si tratta della zona racchiusa tra la parabola $x=y^2-y-2$ (a sinistra) e i tratti di retta $x=\frac23y+2$ e $x=-y+2$ compresi rispettivamente tra $(2,0)$ e $(4,3)$ e tra $(2,0)$ e $(4,-2)$. Usando la variabile y si ha perciò $\mathrm{Area}(C)=\int_{-2}^0(-y+2)\,dy+\int_0^3(\frac23y+2)\,dy+\int_3^{-2}(y^2-y-2)\,dy=(-\frac{y^2}{2}+2y]_{-2}^0+(\frac{y^2}{3}+2y]_0^3+(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-2y]_3^{-2}=\frac{95}{6}\sim15{,}7$. Se invece si vuole usare la variabile x, da $x=y^2-y-2$ si ricava $y=\frac{1\pm\sqrt{4x+9}}{2}$ (le due mezze parabole sopra e sotto la quota $y=\frac12$ del vertice $(-\frac94,\frac12)$), da cui nuovamente $\mathrm{Area}(C)=\int_{-\frac94}^4\frac{1+\sqrt{4x+9}}{2}\,dx+\int_4^2(\frac32x-3)\,dx+\int_2^4(-x+2)\,dx+\int_4^{-\frac94}\frac{1-\sqrt{4x+9}}{2}\,dx=\frac12(x+\frac{(4x+9)^{\frac32}}{6}]_{-\frac94}^4+(\frac34x^2-3x]_4^2+(-\frac12x^2+2x]_2^4+\frac12(x-\frac{(4x+9)^{\frac32}}{6}]_4^{-\frac94}=\frac{95}{6}$.

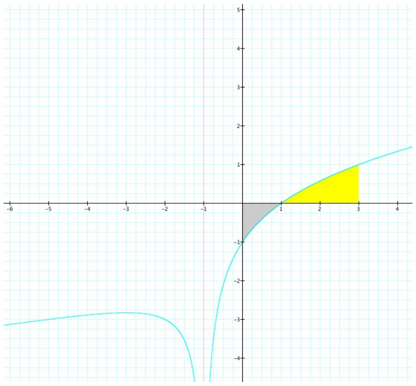
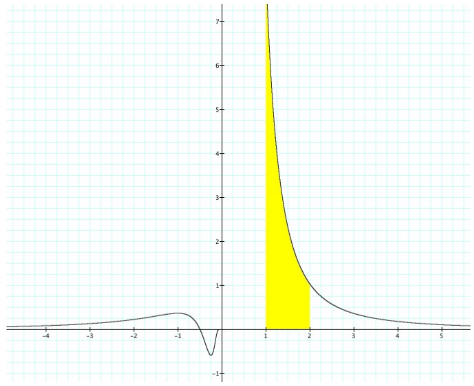
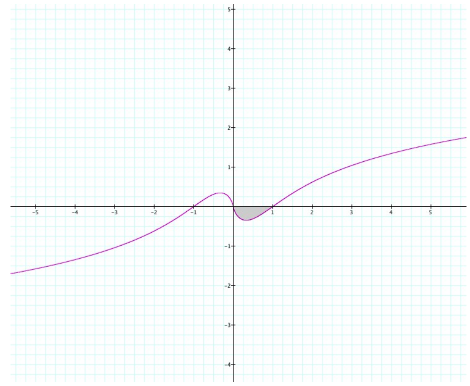
3. (Figura 10) Notiamo che $\lim_{x\to0^-}f_n(x)=f_n(0)=1$ mentre $\lim_{x\to0^+}f_n(x)$ vale $-\infty$ (se $n<0$) oppure $\frac n4$

(se $n \geq 0$); d'altra parte $\lim_{x\to 2^-} f_n(x) = +\infty$ (tranne il caso $n=0$, in cui f_n è nulla su $]0,2[$ e dunque $\lim_{x\to 2^-} f_0(x) = 0$) mentre $\lim_{x\to 2^+} f_n(x) = f_n(2) = 2$. Pertanto se $n<0$ la funzione f_n è discontinua in $x=0$ e $x=2$, e localmente integrabile sugli intervalli $]-\infty,0]$, $]0,2[$ e $[2,+\infty[$ (nei punti interni di tali intervalli è anche di classe $\mathcal{C}^\infty$); se $0<n<4$ oppure se $n>4$ è ancora discontinua in $x=0$ e $x=2$, ma diventa localmente integrabile sugli intervalli $]-\infty,2[$ e $[2,+\infty[$ (infatti ora la discontinuità in $x=0$ è solo di salto); lo stesso accade se $n=4$, tranne il fatto che diventa continua in $x=0$ (e solo continua: si tratta di un punto angoloso); infine, se $n=0$ anche la discontinuità in $x=2$ diventa di salto, dunque f_0 è localmente integrabile su tutto $\mathbb{R}$. • Passiamo ora alle funzioni integrali $F_{c,n}(x) = \int_c^x f_n(t)\,dt$ con $c=-1$ e $c=3$. Iniziamo ad occuparci del caso $n=0$: in tal caso, come appena detto, $f_0(x)$ è localmente integrabile su tutto $\mathbb{R}$, e dunque le sue funzioni integrali saranno continue su tutto $\mathbb{R}$. Sul tratto $]-\infty,0]$ esse saranno primitive di $1-3x-x^2$, dunque del tipo $x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + h$ per una certa $h\in\mathbb{R}$, e in particolare avranno valore h in $x=0$; tale valore h continuerà su tutto il tratto $]0,2[$, sul quale $f_0(x)$ è nulla; infine, sul tratto $]2,+\infty]$ esse saranno primitive di $1+\frac{x}{2}$ e dovranno valere h in $x=2$, dunque saranno $1+\frac{x}{2}+(h-2)$. Per trovare la giusta costante h che compete a $F_{3,0}(x)$ (risp. a $F_{-1,0}(x)$) basta imporre che il valore in $x=3$ (risp. in $x=-1$) sia zero, ottenendo $h=-\frac{1}{2}$ (risp. $h=\frac{13}{6}$).

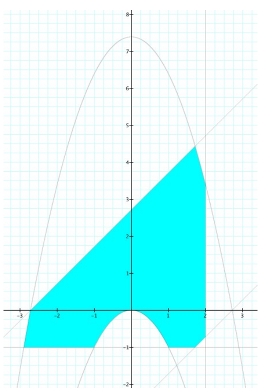
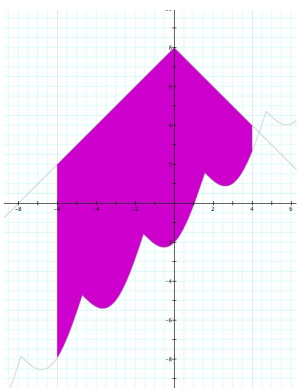
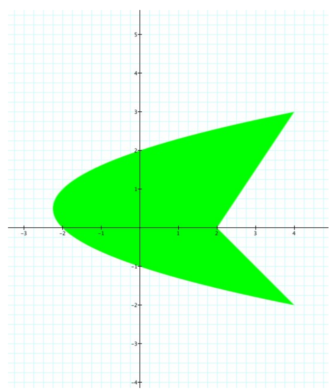
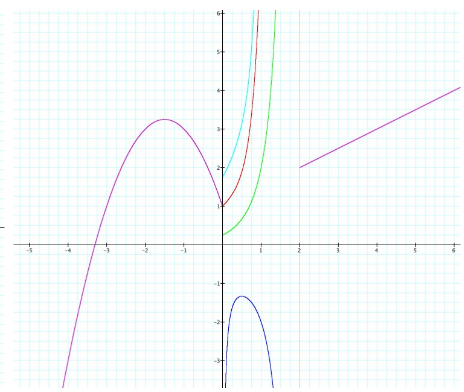
Occupiamoci ora dei casi $n\neq 0$. Quella più facile da descrivere è $F_{3,n}(x)$, perché il suo dominio è $[2,+\infty[$ (visto il tipo di discontinuità in $x=2$ non si potrà mai integrare su intervalli compatti $[x,3]$ con $x<2$) e dunque in realtà non dipende da n: per il teorema di Torricelli dovrà solo essere una primitiva di $1+\frac{x}{2}$, dunque $F_{3,n}(x) = x + \frac{x^2}{4} + k$ per una certa costante $k\in\mathbb{R}$, e la costante si determina imponendo che $F_{3,n}(3) = \frac{21}{4}+k = 0$, trovando $k=-\frac{21}{4}$, ottenendo perciò $F_{3,n}(x) = \frac{1}{4}(x^2+4x-21)$. Invece il dominio di $F_{-1,n}(x)$ dipenderà da n: più precisamente, se $n<0$ il dominio sarà $]-\infty,0]$ (visto il tipo di discontinuità in $x=0$ non si potrà mai integrare su intervalli compatti $[-1,x]$ con $x>0$), mentre se $n>0$ il dominio sarà $]-\infty,2[$ (la discontinuità in $x=0$ diventa alpiù di salto —o addirittura sparisce se $n=4$— dunque si può integrare su intervalli compatti $[-1,x]$ purché $x<2$). Sul tratto $]-\infty,0]$ la funzione $F_{-1,n}(x)$ dovrà essere una primitiva di $1-3x-x^2$ (dunque del tipo $x-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+h$) e annullarsi in $x=-1$ (da cui $h=\frac{13}{6}$), perciò $F_{-1,n}(x) = x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{13}{6}$, e in particolare $F_{-1,n}(0) = \frac{13}{6}$. Se $n<0$ abbiamo terminato; se invece $n>0$ si può definire $F_{-1,n}(x)$ anche più in là, fino a $x<2$, e lo facciamo ora. Per iniziare, notiamo che $F_{-1,n}$ è continua su tutto $]-\infty,2[$ (infatti f_n è ivi localmente integrabile), dunque in particolare anche in $x=0$; poi, nell'intervallo $]0,2[$ la funzione $F_{-1,n}(x)$ dovrà essere una primitiva di $\frac{n(1+x^n)}{(x-2)^2}$. Posto $t=x-2$, si ricava $\int \frac{n(1+x^n)}{(x-2)^2}\,dx = n\int \frac{(1+(t+2)^n)}{t^2}\,dt$: basterà sviluppare il numeratore usando il binomio di Newton $(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$, poi dividere per t^2 il polinomio così trovato, e infine integrare addendo per addendo. Nel caso $n=1$ si ottiene $\int \frac{t+3}{t^2}\,dt = \int (\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2})\,dt = \log|t| - \frac{3}{t} + \ell = \log|x-2| - \frac{3}{x-2} + \ell$, con ℓ costante da determinare; nel caso $n\geq 2$ si trova più generalmente $n\int \frac{(1+(t+2)^n)}{t^2}\,dt = n\int \frac{(1+\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^{n-j} 2^j)}{t^2}\,dt = n(-(2^n+1)\frac{1}{t} + n2^{n-1}\log|t| + \sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j} 2^j \frac{t^{n-1-j}}{n-1-j}) + \ell = n(-(2^n+1)\frac{1}{x-2} + n2^{n-1}\log|x-2| + \sum_{j=0}^{n-2}\binom{n}{j} 2^j \frac{(x-2)^{n-1-j}}{n-1-j}) + \ell$. Infine, per determinare ℓ si imporrà che $F_{-1,n}(0) = \frac{13}{6}$.



Grafici dell'Ex. 1, con evidenziato l'integrale proposto (contributi positivi in giallo, negativi in grigio). **1.** $\frac{x^3}{9+3x-2x^2}$; **2.** $\frac{\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2}$; **3.** $\frac{\cos 2x}{1-\cos x}$.

Grafici dell'Ex. 1, con evidenziato l'integrale proposto (contributi positivi in giallo, negativi in grigio). **4.** $\frac{x-1}{\sqrt{|x+1|}}$; **5.** $\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$; **6.** $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \log |x|$.

7. L'insieme A dell'Ex. 2. **8.** L'insieme B dell'Ex. 2. **9.** L'insieme C dell'Ex. 2. **10.** La funzione $f_n(x)$ dell'Ex. 3: nelle zone $]-\infty, 0]$ e $[2, +\infty[$ il grafico, che non dipende da $n \in \mathbb{Z}$, è in porpora; nella zona $]0, 2[$ sono rappresentati i casi $n = -1$ (blu), $n = 1$ (verde), $n = 4$ (rosso) e $n = 7$ (azzurro).