ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 10/12/2014

Ex. Risolvere le seguenti equazioni in $z = x+iy \in \mathbb{C}$:

(1) $2z - i(\bar{z}-1) = 1-i$

(2) $|1-i+z| = |z-i|$ IN due modi

(3) $\bar{z}^2 = 1-iz$

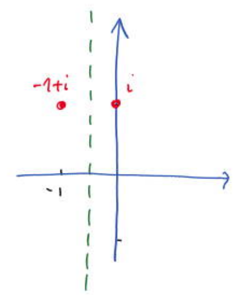
- $2z - i(\bar{z}-1) = 1-i$

Se $z = x+iy$, si ha $2x+2iy - i(x-iy-1) = 1-i$, da cui $(2x-y)+i(2y-x+1) = 1-i$, che equivale al sistema reale

$\begin{cases} 2x-y = 1 \\ 2y-x+1 = -1 \end{cases}$, ovvero $\begin{cases} y = 2x-1 \\ 2(2x-1)-x+1 = -1 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$:

pertanto l'unica soluzione è $z = -i$.

- $|1-i+z| = |z-i|$ in due modi



(1) se $z = x+iy$, si ha $|1-i+x-iy| = |x+iy-i|$,

ovvero $|(x+1)+i(y-1)| = |x+i(y-1)|$, ovvero

$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$, ovvero $(x+1)^2 + \cancel{(y-1)^2} = x^2 + \cancel{(y-1)^2}$,

ovvero $(x+1)^2 = x^2$ ⟨ $x+1 = x$ NO ; $x+1 = -x \rightsquigarrow x = -\frac{1}{2}$, senza condiz. su y.

Pertanto le soluzioni sono gli $z \in \mathbb{C}$ t.c. $\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ (retta verticale)

(2) L'equazione è $|z-(-1+i)| = |z-i|$: ricordando che $|z-w|$ rappresenta

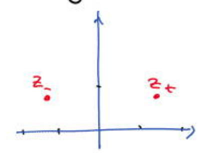
la distanza sul piano di Gauss tra z e w, si tratta di trovare gli z equidistanti da $w_1=-1+i$ e $w_2=i$: e quelli sono i punti dell'asse del segmento che congiunge w_1 e w_2, ovvero la retta verticale $\mathrm{Re}(z) = -1/2$.

- $\bar{z}^2 = 1 - iz$

Se $z = x+iy$ si ha $(x-iy)^2 = 1-i(x+iy)$, ovvero $x^2-y^2-2ixy = 1+y-ix$, che equivale a $\begin{cases} x^2-y^2 = 1+y \\ -2xy = -x \end{cases}$. La seconda equazione è

$$x(2y-1)=0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; x=0 \Rightarrow -y^2 = 1+y \Rightarrow y^2+y+1=0, \text{ priva di soluzioni } y\in\mathbb{R} \\ \searrow \; y = 1/2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{4} = 1 + 1/2 \Rightarrow x^2 = 7/4 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}. \end{array}$$

Dunque le soluzioni sono $z_\pm = \dfrac{\pm\sqrt{7}+i}{2}$.



Ripartiamo da dove si era arrivati nell'ultima lezione:

Prop. (FORMULA DI DE MOIVRE PER LE POTENZE INTERE E LE RADICI m-ESIME)

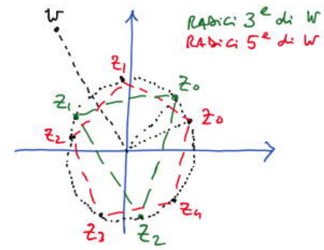
Scriviamo $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}^\times$, $m\in\mathbb{N}$.

(i) $\boxed{w^m = |w|^m(\cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi))}$

(ii) Esistono esattamente m radici m-esime di w (ovvero $z\in\mathbb{C}$ t.c. $z^m = w$) poste sui vertici di un m-agono regolare inscritto nella circonf. dei numeri complessi di modulo $\sqrt[m]{|w|}$, e sono date da

$$\boxed{z_k = \sqrt[m]{|w|}\left(\cos\frac{\psi+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\psi+2k\pi}{m}\right)}$$

per $k=0,1,\dots,m-1$ (sono m)



Dim. (i) segue subito dalle formule trigonometriche del prodotto.

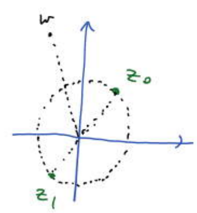
(ii) Sia $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, e imponiamo che $z^m = w$.

$$|z|^m(\cos(m\theta) + i\sin(m\theta)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) \iff \begin{cases} |z|^m = |w| \\ m\theta = \psi + 2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[m]{|w|} \\ \theta = \dfrac{\psi+2k\pi}{m} \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$ e basta prendere $k=0,1,\dots,m-1$. $\square$

L'estrazione delle radici m-esime di un numero complesso w è una ulteriore verifica pratica del T.F.A. (equivale a risolvere $z^m - w = 0$) che generalizza l'estrazione della radice quadrata: le formule dà

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{|w|} \\ \theta = \dfrac{\psi}{2} + k\pi \quad \text{per } k = 0,1 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} z_0 = \sqrt{|w|}\left(\cos\dfrac{\psi}{2} + i\sin\dfrac{\psi}{2}\right) \\ z_1 = -z_0 \end{cases}$$



Ex

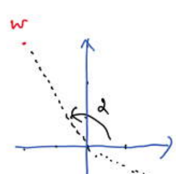
- Se $z = \sqrt{3} - i$ e $w = -2+3i$ calcolare z^n e w^5.
- Radici quadrate, cubiche, n-esime di 1, -8, $3i$, $-1-\sqrt{3}i$, $-1-2i$

- $z = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

  $z^n = 2^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{6}\right)\right)$ Ex: $z^6 = -64$

  $w = -2+3i = \sqrt{13}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ con $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

  $w^5 = 169\sqrt{13}(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)$ ma i conti per esplicitare $\cos 5\alpha$ e $\sin 5\alpha$ in funzione di $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ e $\sin\alpha = 3/\sqrt{13}$ sono difficili



$\left(\cos 5\alpha = \cos(2\alpha+3\alpha) = \cos 2\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos 2\alpha \cos(\alpha+2\alpha) - \sin 2\alpha \sin(\alpha+2\alpha) = \dots\right)$

In alternativa si può usare la classica formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + n a b^{n-1} + b^n$$

(ricordiamo che i coefficienti binomiali $\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ si possono visualizzare nel TRIANGOLO DI TARTAGLIA

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
....

in cui $\binom{n}{j}$ appare alla riga $(n+1)$-esima al posto $(j+1)$-esimo).

Dunque $w^5 = (-2+3i)^5 = (-2)^5 + 5(-2)^4(3i) + 10(-2)^3(3i)^2 + 10(-2)^2(3i)^3 +$
$+ 5(-2)(3i)^4 + (3i)^5 = -32 + 240i + 720 - 1080i - 810 + 243i$
$= -122 - 597i$

- Radici quadrate, cubiche, n-esime di $1, -8, 3i, -1-\sqrt{3}i, -1-2i$

- Radici n-esime di 1.

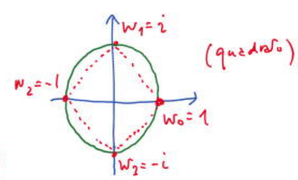
Da $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ si ricava che le radici n-esime di 1 sono

$w_k = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos \frac{0+2k\pi}{n} + i \sin \frac{0+2k\pi}{n}\right) = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$

(ovvero $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, nella notazione $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ introdotta oggi).

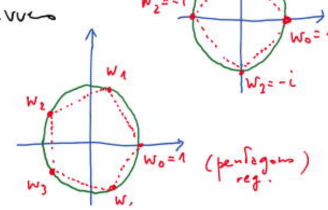
Ad esempio le radici quarte:

$w_k = \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2}$ per $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero



e le radici quinte:

$w_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

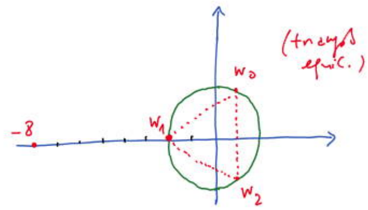


• Radici cubiche di -8

$-8 = 8\cdot(-1) = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow$

$w_k = 2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$ con $k=0,1,2$, ovvero

$w_0 = 1+\sqrt{3}\, i$, $w_1 = -2$, $w_2 = 1-\sqrt{3}\, i$.



• Radici quadrate e n-esime di -8

Quadrate: $\pm 2\sqrt{2}\, i$. n-esime: $w_k = \sqrt[n]{8}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)$ per $k=0,1,\dots,n-1$

• Radici di $3i$

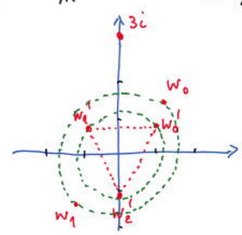
Vale $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, dunque le radici n-esime sono $w_k = \sqrt[n]{3}\left(\cos\frac{\pi/2+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi/2+2k\pi}{n}\right)$

per $k=0,1,\dots,n-1$. In particolare:

Radici quadrate $w_0 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i)$ e $w_1 = -w_0$

Radici cubiche $w_0' = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(\sqrt{3}+i)$,

$w_1' = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}(-\sqrt{3}+i)$ e $w_2' = \sqrt[3]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt[3]{3}\, i$



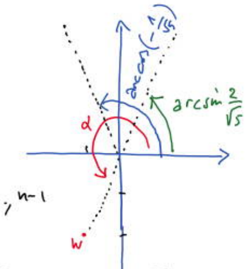
• Radici di $-1-\sqrt{3}\, i$

Vale $-1-\sqrt{3}\, i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, dunque le radici n-esime sono

$w_k = \sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{-2\pi/3+2k\pi}{n} + i\sin\frac{-2\pi/3+2k\pi}{n}\right)$ per $k=0,1,\dots,n-1$

Radici quadrate $w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3}\, i)$ e $w_1 = -w_0$

• Radici di $-1-2i$



Vale $w := -1-2i = \sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} i\right) = \sqrt{5}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{5}\, e^{i\alpha}$

con $\alpha := -\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \pi$.

Radici n-esime $W_k = 5^{1/2n}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ per $k=0,1,\dots,n-1$

Radici quadrate: $w_0 = \sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$ e $w_1 = -w_0$;

dalle formule di bisezione ricavo $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-1/\sqrt{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$

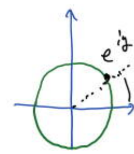
$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+1/\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, dunque $w_0 = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(-\sqrt{\sqrt{5}-1} + i\sqrt{\sqrt{5}+1}\right)$.

ESPONENZIALE COMPLESSO

Definiamo:

$$\boxed{\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^{\times} \qquad z = x+iy \in \mathbb{C} \Rightarrow \exp(z) := e^{x}(\cos y + i \sin y)}$$

Dunque
- se $z = x \in \mathbb{R}$ allora $\exp(x) = e^{x}$ (il vecchio esponenziale reale)
- se $z = iy \in i\mathbb{R}$ allora $\exp(iy) = \cos y + i \sin y$
  (e si scrive anche $e^{iy} := \cos y + i \sin y$)



LA PARTE IMMAGINARIA DI Z DIVENTA L'ARGOMENTO DI exp(z)!

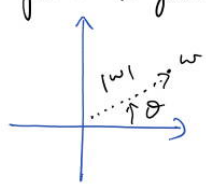
Scriveremo anche direttamente $e^{z} := \exp(z)$; in particolare

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}}$$

FORMULE DI EULERO

C'è dunque una forma alternativa per la forma trigonometrico-polare:

$$w = |w|(\cos\theta + i \sin\theta) = |w|\, e^{i\theta}$$



- In sostanza,

$$z = x+iy \quad \text{IN FORMA ALGEBRICA} \quad \leadsto \quad e^{z} = e^{x}e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$$

IN FORMA TRIGONOMETRICA

- Notiamo che $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ è ancora omomorfismo, perché

$$\boxed{\exp(z+w) = (\exp(z)) \cdot (\exp(w))}$$

- C'è una periodicità nella parte immaginaria:

$$\exp(z + 2k\pi i) = \exp(z) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

- In particolare $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ non è iniettiva, però è suriettiva:

se $w = |w|(\cos\theta + i \sin\theta) \neq 0$, allora per $z = x+iy$

si ha $\exp(z) = w \iff e^x(\cos y + i \sin y) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\iff \begin{cases} e^x = |w| \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log|w| \\ y = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{\log|w| + i(\theta + 2k\pi)}$$ LOGARITMI COMPLESSI DI $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

Dunque ogni numero complesso $w \neq 0$ ha un'infinità numerabile di logaritmi complessi, posti uno sopra l'altro con salti di 2π nella parte immaginaria.
Tra tutti questi, di solito si sceglie come "logaritmo principale" quello che ha parte immaginaria in $]-\pi, \pi]$:

$$\boxed{\log w := \log|w| + i\theta \quad \text{con } \theta \in]-\pi, \pi]}$$ LOGARITMO PRINCIPALE

In sostanza:

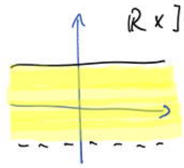
$$w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) = |w| e^{i\theta} \quad \rightsquigarrow \quad \log|w| + i(\theta + 2k\pi)$$

IN FORMA POLARE / TRIGONOMETRICA $\qquad$ IN FORMA ALGEBRICA

- Restringendo il dominio di exp a $\mathbb{R} \times]-\pi, \pi]$ si ha però una biiezione

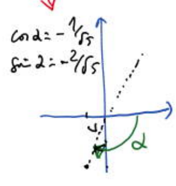
$\mathbb{R} \times]-\pi, \pi]$

$$\exp : \quad \text{[strip]} \quad \underset{\log}{\overset{\exp}{\underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\sim}}}} \quad \mathbb{C}^{\times}$$



$\boxed{\text{Ex.}}$ • Calcolare exp e logaritmi di $1, -8, 3i, -1-\sqrt{3}i, -1-2i$.

z	ALG	TRIG.	$\exp(z)$	$\log(z)$
1	$1+i\cdot 0$	$1\cdot e^{i0}$	e	0 (gli altri: $2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$)
-8	$-8+i\cdot 0$	$8\cdot e^{i\pi}$	e^{-8}	$3\log 2 + i\pi$
$3i$	$0+3\cdot i$	$3\cdot e^{i\pi/2}$	e^{3i}	$\log 3 + i\frac{\pi}{2}$
$-1-\sqrt{3}i$	"	$2e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$e^{-1}\cdot e^{-\sqrt{3}i}$ ($-\sqrt{3}$ RAD)	$\log 2 + i\frac{4\pi}{3}$
$-1-2i$	"	$\sqrt{5}\, e^{i\alpha}$	$e^{-1}\cdot e^{-2i}$ (-2 RAD)	$\frac{1}{2}\log 5 + i\alpha$



$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \pi = -\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE IN $\mathbb{C}$

Passiamo ora alla risoluzione delle equazioni algebriche $p(z)=0$, ove $p(z)$ è un polinomio in z a coeff. complessi.
Come preannunciato, la chiave di tutto è il seguente teorema, che non dimostreremo:

Teor. (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)
Se $p(z)$ è non costante (cioè se ha deg ≥ 1), l'equazione $p(z)=0$ ha almeno una soluzione in $\mathbb{C}$.

Ne segue subito il

Cor Se $p(z)$ ha deg $= n$, allora $p(z)=0$ ammette esattamente n soluzioni (se contate con la loro molteplicità).
Equivalentemente, $p(z)$ si decompone nel prodotto di polinomi lineari (ovvero di deg. 1) a coefficienti in $\mathbb{C}$.

Dim. Se $p(z)$ non è costante, per il TFA esso ha una radice $\beta \in \mathbb{C}$: ma allora per Ruffini si può decomporre $p(z)=(z-\beta)\, q(z)$ con deg $q(z)=n-1$. Poi, se $q(z)$ non è costante, anch'esso ha una radice $\gamma \in \mathbb{C}$, dunque $p(z)=(z-\beta)(z-\gamma)\cdot r(z)$ con deg $r(z)=n-2$, e così via. $\square$

In generale però, come fare a trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ di $p(z)=0$?

Iniziamo dai casi più semplici, di grado basso.

- Sia $\deg p(z) = 1$. Allora $p(z) = a_1 z + a_0 = 0 \rightsquigarrow z = -\frac{a_0}{a_1}$.

Ex. $\underbrace{(1-2i)}_{a_1} z + \underbrace{3+i}_{a_0} = 0 \rightsquigarrow z = -\frac{3+i}{1-2i} = -(3+i)\cdot\frac{1+2i}{5}$
$= -\frac{1}{5}(3+6i+i-2)$, ovvero $z = -\frac{1+7i}{5}$.

- Sia $\deg p(z) = 2$. Allora $p(z) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$ (ove ora "$\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}$" significa "le due radici quadrate del numero $a_1^2 - 4a_0a_2 \in \mathbb{C}$".)

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $3z^2+z+1=0$ $\quad z = \frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{6} = \frac{-1\pm\sqrt{-11}}{6} = \frac{-1\pm i\sqrt{11}}{6}$

• $2z^2 - iz + 1 + 5i = 0$ $\quad z = \frac{i \pm \sqrt{-1-4\cdot 2\cdot(1+5i)}}{4} = \frac{i\pm\sqrt{-9-40i}}{4}$

Rad. quadrate di $-9-40i$: sono $x+iy$ con $\begin{cases} x^2-y^2=-9 \\ 2xy=-40 \end{cases}$

$y = -\frac{20}{x} \Rightarrow x^2 - \frac{400}{x^2} = -9 \quad x^4 + 9x^2 - 400 = 0 \quad x^2 = \frac{-9\pm\sqrt{1681}}{2}$

$x^2 = \frac{-9+41}{2} = 16 \quad x = \pm 4,\ y = \mp 5$: sono $\pm(4-5i)$

Dunque $z = \frac{i\pm(4-5i)}{4}$ $\begin{array}{l} \nearrow \frac{i+(4-5i)}{4} = 1-i \\ \searrow \frac{i-(4-5i)}{4} = -1+\frac{3}{2}i \end{array}$

- Sia $\deg p(z) \geq 3$. Se $\deg = 3$ si può usare la formula di Cardano-Tartaglia (un po' macchinosa, ma funziona). Altrimenti bisogna cercare qualche radice $\beta \in \mathbb{C}$ (che c'è per il TFA) per poi abbassare di grado dividendo $p(z)$ per $(z-\beta)$ con Ruffini, esattamente come si faceva con i reali. A tal fine, saranno utili le seguenti osservazioni pratiche.

(1) Se $p(z)$ ha coeff. interi (in $\mathbb{Z}$), ogni sua eventuale radice razionale (in $\mathbb{Q}$) può essere solo del tipo r/s ove r è un divisore del termine noto e s è un divisore del coefficiente dominante.

$\boxed{\text{Ex}}$ $6z^5-8z^3+7z^2-5z+2=0$ può avere (eventualmente) come soluzioni razionali le sole $z=\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{6}$.

(2) Se $p(z)$ ha coeff. reali (in $\mathbb{R}$), allora le sue radici non reali (in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$) vengono sempre a coppie: ovvero se $\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ è soluzione di $p(z)=0$, allora lo è anche il suo coniugato $\bar\beta$.

(ciò è ovvio: se $p(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1 z+a_0=0$ con coeff. a_j reali, allora da $p(\beta)=0$ otteniamo $\overline{p(\beta)}=0$,

ma $\overline{p(\beta)}=\overline{(a_n\beta^n+\dots+a_0)}=\bar a_n(\bar\beta)^n+\dots+\bar a_1\bar\beta+\bar a_0 \overset{\text{a_j reali dunque $\bar a_j=a_j$}}{=}$

$= a_n(\bar\beta)^n+\dots+a_1\bar\beta+a_0=0$ cioè $p(\bar\beta)=0$.)

Dunque, se $\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ è soluzione lo è anche $\bar\beta$, perciò $p(z)$ sarà divisibile per $(z-\beta)\cdot(z-\bar\beta)=z^2-(2\,\mathrm{Re}\,\beta)z+|\beta|^2$ che è polinomio reale irriducibile di grado 2.

Ne segue che

Prop. Un polinomio reale si può sempre decomporre in fattori reali irriducibili di grado 1 oppure 2. In particolare un polinomio reale di grado dispari ha sempre almeno una soluzione reale.

Ex. (1) Risolvere $z^3+z+10=0$ sapendo che una delle sue soluzioni è $1-2i$.

(2) Risolvere $2z^4+(5-2i)z^3-(1-2i)z^2+(7+i)z=0$, sapendo che una delle sue soluzioni è $z=i$.

- $\overbrace{z^3+z+10}^{p(z)}=0$ Ci è detto che $\beta=1-2i$ è soluzione: ma allora, essendo $p(z)$ a coefficienti reali, lo sarà anche $\bar\beta=1+2i$; e per Ruffini possiamo fattorizzare $p(z)$ con $(z-\beta)$ e $(z-\bar\beta)$:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & 1 & 10 \\
1-2i & & 1-2i & -3-4i & -10 \\
\hline
 & 1 & 1-2i & -2-4i & // \\
1+2i & & 1+2i & 2+4i & \\
\hline
 & 1 & 2 & // &
\end{array}$$

$\rightsquigarrow p(z)=(z-(1-2i))\cdot(z-(1+2i))\cdot(z+2)$, dunque la III^a radice è data da $z+2=0$, ovvero $z=-2$.

Anziché dividere separatamente per $(z-\beta)$ e $(z-\bar\beta)$, avremmo potuto fattorizzare $p(z)$ direttamente col loro prodotto, che è il polinomio reale $(z-\beta)(z-\bar\beta)=z-(2\mathrm{Re}\,\beta)z+|\beta|^2=z^2-2z+5$:

$$\begin{array}{l|l}
z^3 \quad \cdot \quad +z+10 & z^2-2z+5 \\
\hline
-z^3+2z^2-5z & z+2 \\
\hline
//\quad 2z^2-4z+10 &
\end{array}$$

$\rightsquigarrow p(z)=(z^2-2z+5)(z+2)$, decomposizione reale di $p(z)$ in fattori irriducibili.

- Notiamo che $p(z)=2z^4+(5-2i)z^3-(1-2i)z^2+(7+i)z$ non ha coefficienti reali, dunque dal fatto che $\beta=i$ è una sua soluzione NON possiamo affermare che lo è anche $\bar\beta=-i$. Possiamo tuttavia dividere $p(z)$ per $(z-i)$, ad esempio usando il metodo di Ruffini:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & 5-2i & -(1-2i) & 7+i & 0 \\
i & & 2i & 5i & -i-7 & 0 \\
\hline
 & 2 & 5 & -1+7i & 0 & 0
\end{array}
$$

da cui si vede che $p(z) = (z-i)(2z^3 + 5z^2 + (-1+7i)z)$.

Un'altra soluzione evidente è $z=0$, infatti $p(z) = z(z-i)(2z^2+5z-1+7i)$.

Le ultime due soluzioni di $p(z)=0$ si trovano risolvendo l'equazione $2z^2+5z-1+7i=0$, che dà $z = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\cdot 2(-1+7i)}}{4} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33-56i}}{4}$.

Le radici quadrate di $33-56i$ sono le $x+iy$ date da $\begin{cases} x^2-y^2=33 \\ 2xy=-56 \end{cases}$: da $y = -28/x$ si ha $x^2 - 784/x^2 = 33$, da cui $x^4-33x^2-784=0$, da cui $x^2 = \dfrac{33 \cancel{\pm} \sqrt{1089+4\cdot 784}}{2} = \dfrac{33+65}{2} = 49$, da cui $x = \pm 7$ e $y = -28/x = \mp 4$.

Pertanto $z = \dfrac{-5 \pm (7-4i)}{4} = \begin{cases} \dfrac{-5+7-4i}{4} = \dfrac{1}{2} - i \\ \dfrac{-5-7+4i}{4} = -3+i \end{cases}$.

Riassumendo, le quattro soluzioni di $p(z)=0$ sono $z_1 = i$, $z_2 = 0$, $z_3 = \frac{1}{2} - i$ e $z_4 = -3+i$.

ALTRI ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

(1) Scrivere i seguenti numeri complessi in forma algebrica e in forma polare/trigonometrica/esponenziale:

$z_1=(1-i)(1+i)$; $z_2=(2-i)(i+5)$; $z_3=(1+i)e^{-\frac{i\pi}{2}}$; $z_4=5\,\frac{1-i}{1+2i}$;

$z_5=1+i-\frac{i}{1-2i}$; $z_6=(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)$; $z_7=\left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2$.

(2) Calcolare modulo e argomento principale di $z=\dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^7}$.

(3) Trovare le soluzioni $z=x+iy\in\mathbb{C}$ di $z^2-|\bar{z}-3|=3$ e $|z+2|=\bar{z}^2+1$.

(4) Cercando di applicare le proprietà opportune, calcolare senza troppo lavoro

$\mathrm{Re}\left(i(3i-1)\right)$, $\mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{i-1}\right)$, $\mathrm{Re}\left((\sqrt{3}-i)^{100}\right)$, $\mathrm{Im}\left(3ie^{-i}+1-2i\right)$.

(5) Calcolare z^2, z^6, z^{22} dei numeri $z=\frac{2}{\sqrt{3}-i}+\frac{1}{i}$ e $z=\frac{1+i}{2-2i}$.

(6) Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

- $2z^2-2z+7=0$; • $(1-i)z^2-3iz-(1+2i)=0$; • $z^2+3iz+4=0$;
- $(z+i)^2=(\sqrt{3}+i)^3$; • $z^4+2z^2+4=0$; • $z^6+7z^3-8=0$;
- $z\bar{z}-z+\frac{i}{4}=0$; • $z^4+iz=0$; • $z^6-iz^4+z^2-i=0$;
- $p(z)=z^4-5z^3+10z^2-10z+4=0$ sapendo che una radice è $z=1+i$; decomporre poi $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.
- $z^3+(1+2i)z^2+\left(-2+(2-\sqrt{3})i\right)z-2-i\sqrt{3}=0$ sapendo che $z=-1$ è soluzione ;

(7) Determinare un polinomio reale $p(z)$ di grado più piccolo possibile che abbia $z=-2$ come radice semplice, $z=-1+i$ come radice doppia e tale che $p(-1)=3$.

(8) (a) Trovare le soluzioni di $8z^6+(1+8i)z^3+i=0$

(b) Data $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $g(z)=z^2+3\bar{z}$ calcolare le fibre $g^{-1}(10)$, l'immagine di $A=i\mathbb{R}$ e l'antiimmagine di $B=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$

(9) (a) Trovare le soluzioni complesse di $z^2-8\bar{z}=32$ che hanno parte immaginaria <0, e determinarne le radici quinte.

(b) Data l'equazione $2z^4-\alpha z^2=z$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, trovare le soluzioni complesse nel caso $\alpha=1$; discutere poi quali sono le sue soluzioni reali al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

(10) Sia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ data da $f(z)=z^2-4$.

(a) Trovare l'insieme S delle radici cubiche di $-8i$; determinare poi tutte le soluzioni dell'equazione $z^3=i\,f(z)$, sapendo che una di esse sta in S.

(b) f è iniettiva? Suriettiva? Detto ℓ il semiasse immaginario positivo, calcolare $f(\ell)$ e $f^{-1}(\ell)$.

(11) Trovare le soluzioni $z=x+iy$ dell'equazione $|z|^2+2\bar{z}^2+3iz=0$ che, nel piano di Gauss, distano meno di 4 dal numero $w=1$. Calcolare poi le radici cubiche di $27i$, vedendo se qualcuna di esse appare tra le precedenti soluzioni.

(12) Determinare l'insieme $S\subset\mathbb{C}$ delle radici quarte di -4; trovare poi le soluzioni complesse dell'equazione $z^3-z^2+(3-i)z-2(1+i)=0$ sapendo che una di esse è l'elemento di S che sta nel I° quadrante del piano di Gauss.

(13) Data $f(z)=\dfrac{z+2}{iz-3}$ determinarne dominio, immagine, fibre. È iniettiva? Suriettiva? Calcolare $f^{-1}(\{w\in\mathbb{C}: |w|<1\})$, $f^{-1}(\{w\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} w<0\})$, $f(\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z=-2\})$ e $f(\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Re} z<0\})$.