ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 15/12/2014

SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI
SUI NUMERI COMPLESSI
PROPOSTI LA SCORSA LEZIONE

(1) Scrivere i seguenti numeri complessi in forma algebrica e in forma polare/trigonometrica/esponenziale:

$z_1=(1-i)(1+i)$; $z_2=(2-i)(i+5)$; $z_3=(1+i)e^{-\frac{i\pi}{2}}$; $z_4=5\,\frac{1-i}{1+2i}$;

$z_5=1+i-\frac{i}{1-2i}$; $z_6=(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)$; $z_7=\left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2$.

$z_1=(1-i)(1+i)=1-i^2=2$ (forma algebrica) $=2\cdot 1=2(\cos 0+i\sin 0)=2e^{i0}$

$z_2=(2-i)(i+5)=2i+10+1-5i=11-3i$ (f. alg.) $=\sqrt{130}\left(\frac{11}{\sqrt{130}}+i\left(-\frac{3}{\sqrt{130}}\right)\right)$

$=\sqrt{130}\,e^{i\theta}$ con $\theta=-\arcsin\frac{3}{\sqrt{130}}$.

$z_3=(1+i)e^{-i\pi/2}=(1+i)\cdot(-i)=1-i$ (f. alg.)

$z_3=(1+i)e^{-i\pi/2}=\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/4}\cdot e^{-i\pi/2}=\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}$ (forma exp.)

$z_4=5\cdot\frac{1-i}{1+2i}=\cancel{5}(1-i)\cdot\frac{1-2i}{\cancel{5}}=1-2i-i-2=-1-3i$ (f. alg.) $=\sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}+i\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)$

$=\sqrt{10}\,e^{i\theta}$ con $\theta=-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-\pi$.

$z_5=1+i-\frac{i}{1-2i}=1+i-i\,\frac{1+2i}{5}=\frac{5+5i-i+2}{5}=\frac{7+4i}{5}=\frac{7}{5}+\frac{4}{5}i$ (f. alg.)

$=\frac{\sqrt{65}}{5}\left(\frac{7}{\sqrt{65}}+\frac{4}{\sqrt{65}}i\right)=\frac{\sqrt{65}}{5}\,e^{i\theta}$ con $\theta=\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}$.

$z_6=(1+i)(1-i)(1+\sqrt{3}i)=2(1+\sqrt{3}i)=2+2\sqrt{3}\,i$ (f. alg.)

$z_6=\sqrt{2}e^{i\pi/4}\cdot\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\cdot 2e^{i\pi/3}=4e^{i(\pi/4-\pi/4+\pi/3)}=4e^{i\pi/3}$ (forma exp.)

$z_7=\left(\frac{1+i}{1-i}-1\right)^2=\left(\frac{1+i-1+i}{1-i}\right)^2=\left(\frac{2i}{1-i}\right)^2=\left(\cancel{2}i\cdot\frac{1+i}{\cancel{2}}\right)^2=(-1+i)^2=-2i$ (f. alg.)

$=2(-i)=2e^{-i\pi/2}$ (forma exp.)

(2) Calcolare modulo e argomento principale di $z = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt3}{2} + \frac12 i\right)^5}{(1-i)^7}$.

$$z = \frac{\left(-\sqrt3/2 + 1/2\, i\right)^5}{(1-i)^7} = \frac{\left(e^{5\pi/6\, i}\right)^5}{\left(\sqrt2\, e^{-\pi/4\, i}\right)^7} = \frac{e^{\frac{25\pi}{6} i}}{8\sqrt2\, e^{-\frac{7\pi}{4} i}} = \frac{1}{8\sqrt2}\, e^{\left(\frac{25\pi}{6} - \left(-\frac{7\pi}{4}\right)\right) i}$$

$= \dfrac{1}{8\sqrt2}\, e^{\frac{71}{12}\pi i}$, che è la forma trigonometrica/esponenziale.

Dunque $|z| = \dfrac{1}{8\sqrt2}$, e un argomento per z è l'angolo $\dfrac{71\pi}{12}$ che però non sta in $]-\pi, \pi]$ e dunque non è quello principale: levando $3 \cdot 2\pi = 6\pi$ (3 GIRI) si ottiene l'argomento equivalente $-\dfrac{\pi}{12}$, che è quello principale cercato.

(3) Trovare le soluzioni $z = x+iy \in \mathbb{C}$ di $z^2 - |\bar z - 3| = 3$ e $|z+2| = \bar z^2 + 1$.

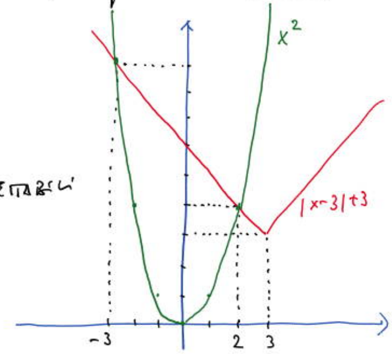
- Osservo che $z^2 = |\bar z - 3| + 3 > 0$, il che può avvenire solo quando $z = x \in \mathbb{R}$: pertanto la mia equazione diventa l'equazione <u>reale</u>

$x^2 - |x-3| = 3$, ovvero $x^2 = |x-3| + 3$

$x \geq 3$: $x^2 = (x-3)+3 \Rightarrow x = 0, 1$ NON ACCETTABILI

$x < 3$: $x^2 = (3-x)+3 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3, 2$ ACCETTABILI

Pertanto le soluzioni sono $z = -3$ e $z = 2$.



Se non ci si accorgeva che $z \in \mathbb{R}$, posto $z = x+iy$ si ha che

$z^2 - |\bar z - 3| = 3$; $(x+iy)^2 - |x - iy - 3| = 3$; $x^2 - y^2 + 2ixy - |(x-3) - iy| = 3$

$x^2 - y^2 + 2ixy - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3$; $\left(x^2 - y^2 - \sqrt{(x-3)^2+y^2}\right) + 2ixy = 3 \iff$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 3 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

. Da $2xy = 0$:
- $x = 0 \Rightarrow y^2 + 3 = -\sqrt{y^2+9}$ impossibile
- $y = 0 \Rightarrow x^2 - |x-3| = 3$, e poi come prima.

- $|(x+2)+iy| = (x^2-y^2+1) - 2ixy$; $\sqrt{(x+2)^2+y^2} = (x^2-y^2+1) - 2ixy$

$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+2)^2+y^2} = x^2-y^2+1 \\ 0 = -2xy \end{cases}$

$x=0 \Rightarrow \sqrt{4+y^2} = 1-y^2 \Rightarrow \begin{cases} |y|<1 \\ y^4-3y^2-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y|<1 \\ y = \pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{21}}{2}} \end{cases}$ non accettabili

$y=0 \Rightarrow |x+2| = x^2+1$; $\begin{cases} x\geq -2 \\ x+2 = x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-x-1=0 \end{cases}$ $x = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$ accettabili

$\begin{cases} x<-2 \\ -x-2 = x^2+1 \end{cases}$ ma $x^2+x+3=0$ non ha soluz. reali.

Dunque le soluzioni sono i numeri reali $z = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$.

(4) Cercando di applicare le formule sopra, calcolare senza troppo lavoro
$Re\,(i(3i-1))$, $Im\left(\frac{1+i}{i-1}\right)$, $Re\left((\sqrt3-i)^{100}\right)$, $Im\left(3ie^{-i}+1-2i\right)$

$Re\,(i(3i-1)) = Re\,(-3-i) = -3$

$Im\left(\frac{1+i}{i-1}\right) = Im\left(\frac{(1+i)\cdot(-1-i)}{2}\right) = Im\left(-\frac{2i}{2}\right) = Im\,(-i) = -1$

$Re\left((\sqrt3-i)^{100}\right) = Re\left(\left(2e^{-i\pi/6}\right)^{100}\right) = Re\left(2^{100}e^{-i\frac{50}{3}\pi}\right) =$

$= Re\left(2^{100}\left(\cos\left(-\frac{50\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{50\pi}{3}\right)\right)\right)$

$= 2^{100}\cos\left(-\frac{50\pi}{3}\right) \underset{\text{sommo 18 giri}}{=} 2^{100}\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 2^{100}\cdot\left(-\frac12\right) = -2^{99}.$

$Im\left(3ie^{-i}+1-2i\right) = Im\left(3i\left(\cos(-1)+i\sin(-1)\right)+1-2i\right)$

$= Im\left((1+3\sin1)+i(3\cos1-2)\right) = 3\cos1-2$.

(5) Calcolare z^2, z^6, z^{22} dei numeri $z = \frac{2}{\sqrt3-i}+\frac1i$ e $z = \frac{1+i}{2-2i}$.

- Si ha $z = \frac{2}{\sqrt3-i}+\frac1i = \frac{2i+\sqrt3-i}{i(\sqrt3-i)} = \frac{\sqrt3+i}{1+\sqrt3 i} = \frac{\cancel{2}\cdot e^{i\pi/6}}{\cancel{2}\cdot e^{i\pi/3}} = e^{-i\pi/6}$,

dunque $z^2 = e^{-i\pi/3} = \frac{1-\sqrt3 i}{2}$, $z^6 = e^{-i\pi} = -1$, $z^{22} = e^{-i\frac{11\pi}{3}}$.

- Si ha $z = \frac{1+i}{2-2i} = (1+i)\cdot\frac12\cdot\frac{(1+i)}{2} = \frac{1-1+2i}{4} = \frac12 i = \frac12 e^{i\pi/2}$,

dunque $z^2 = \frac14 e^{i\pi} = -\frac14$, $z^6 = \frac{1}{64}e^{i3\pi} = -\frac{1}{64}$, $z^{22} = 2^{-22}e^{11\pi i} = 2^{-22}e^{-\pi i} =$
$= -2^{-22}$.

(6) Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

- $2z^2-2z+7=0$; • $(1-i)z^2-3iz-(1+2i)=0$; • $z^2+3iz+4=0$;
- $(z+i)^2=(\sqrt{3}+i)^3$; • $z^4+2z^2+4=0$; • $z^6+7z^3-8=0$;
- $z\bar{z}-z+i/4=0$; • $z^4+iz=0$; • $z^6-iz^4+z^2-i=0$;
- $p(z)=z^4-5z^3+10z^2-10z+4=0$ sapendo che una radice è $z=1+i$; decomporre poi $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$.
- $z^3+(1+2i)z^2+(-2+(2-\sqrt{3})i)z-2-i\sqrt{3}=0$ sapendo che $z=-1$ è soluzione

---

- $2z^2-2z+7=0$ $\quad z=\frac{1\pm\sqrt{-13}}{2}=\frac{1\pm i\sqrt{13}}{2}$
- $(1-i)z^2-3iz-(1+2i)=0$ $\quad z=\frac{3i\pm\sqrt{-9+4(1-i)(1+2i)}}{2(1-i)}=\frac{3i\pm\sqrt{3+4i}}{2(1-i)}$

Le radici quadrate $x+iy$ di $3+4i$ sono date da $\begin{cases}x^2-y^2=3\\ 2xy=4\end{cases}$ $\begin{cases}y=2/x\\ x^2-4/x^2=3\end{cases}$

$x^4-3x^2-4=0$ $\quad x^2=4$ $\quad x=\pm2$ $\quad y=\pm1$, dunque sono $\pm(2+i)$. Ne segue che

$$z=\frac{3i\pm(2+i)}{2(1-i)}=\begin{cases}\frac{3i+2+i}{2(1-i)}=\frac{\cancel{2}(1+2i)}{\cancel{2}(1-i)}=\frac{(1+2i)(1+i)}{2}=\frac{1+i+2i-2}{2}=\frac{-1+3i}{2}\\[2mm] \frac{3i-2-i}{2(1-i)}=\frac{-2+2i}{2(1-i)}=-1.\end{cases}$$

- $z^2+3iz+4=0$ $\quad z=\frac{-3i\pm\sqrt{-9-16}}{2}=\frac{-3i\pm5i}{2}=\begin{cases}i\\ -4i\end{cases}$
- $(z+i)^2=(\sqrt{3}+i)^3$. Sia $w=z+i$; si ha poi $(\sqrt{3}+i)^3=(2e^{i\pi/6})^3=8e^{i\pi/2}=8i$, dunque abbiamo $w^2=8i=8e^{i\pi/2}\Rightarrow w=\pm2\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}=\pm2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\pm2(1+i)$. Pertanto $z+i=\pm2(1+i)$ $\begin{cases}z+i=2+2i\Rightarrow z=2+i\\ z+i=-2-2i\Rightarrow z=-2-3i\end{cases}$

- $z^4+2z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm i\sqrt{3}=\begin{cases}2e^{i\frac{2\pi}{3}}\\ 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}\end{cases}$

$$\Rightarrow z=\begin{cases}\pm\sqrt{2}\cdot e^{i\pi/3}=\pm\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}i)\\ \pm\sqrt{2}\cdot e^{-i\pi/3}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-3i)\end{cases}$$

(notare che le quattro soluzioni sono a due a due coniugate: l'equazione è a coeff. reali.)

Se invece fosse stato $z^4+2iz+4=0 \Rightarrow z^2=-i\pm\sqrt{-5}=(-1\pm\sqrt{5})i$

$$\Rightarrow z^2=\begin{cases}(\sqrt{5}-1)e^{i\pi/2}\Rightarrow z=\pm\sqrt{\sqrt{5}-1}\,e^{i\pi/4}=\pm\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\ (-1-\sqrt{5})i=(\sqrt{5}+1)(-i)=(\sqrt{5}+1)e^{-i\pi/2}=\pm\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\end{cases}$$

che non sono più a due a due coniugate (l'equazione non è reale).

• $z^6+7z^3-8=0$ $\left\langle \begin{array}{l} z^3=1 \;\Rightarrow\; z=1,\; z=\frac{-1\pm i\sqrt3}{2} \\ z^3=-8 \;\Rightarrow\; z=-2,\; z=1\pm i\sqrt3 \end{array}\right.$ (le radici cubiche di 1 e di -8)

• $z\bar z - z + i/4 = 0$. Si ponga $z=x+iy$: $x^2+y^2-x-iy+i/4=0$ $\quad (x^2+y^2-x)+i\left(\frac14-y\right)=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2-x=0 \\ 1/4-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=1/4 \\ x^2-x+\frac{1}{16}=0 \end{cases} \Rightarrow 16x^2-16x+1=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{48}}{16}=\frac{2\pm\sqrt3}{4} \Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt3+i}{4}$$

• $z^4+iz=0$ $\quad z(z^3+i)=0$ $\left\langle \begin{array}{l} z=0 \\ z^3=-i \;\Rightarrow\; z=\frac{\pm\sqrt3-i}{2} \;\text{ e }\; z=i \end{array}\right.$ (le tre radici cubiche di $-i$)

• $z^6-iz^4+z^2-i=0$ $\quad (z^4+1)(z^2-i)=0$ $\left\langle \begin{array}{l} z^4=-1 \;\Rightarrow\; z=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1+i),\; z=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1-i) \\ z^2=i \;\Rightarrow\; z=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1+i) \end{array}\right.$

Pertanto le soluzioni sono $z=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1+i)$ (doppie) e $z=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1-i)$ (semplici).

• $p(z)=z^4-5z^3+10z^2-10z+4=0$. Poiché $w=1+i$ è soluzione e $p(z)$ è reale, anche $\bar w=1-i$ è soluzione, e $p(z)$ sarà divisibile per $(z-w)(z-\bar w)=$
$=z^2-(2\,\mathrm{Re}\,w)z+|w|^2=z^2-2z+2$. Dividendo:

$$\begin{array}{l|l} z^4-5z^3+10z^2-10z+4 & z^2-2z+2 \\ \hline -z^4+2z^3-2z^2 & z^2-3z+2 \\ \hline /\!/ \quad -3z^3+8z^2-10z+4 & \\ \quad\;\; +3z^3-6z^2+6z & \\ \hline \quad /\!/ \quad 2z^2-4z+4 & \\ \quad\quad\; -2z^2+4z-4 & \\ \hline \quad\quad /\!/ \quad /\!/ \quad /\!/ & \end{array}$$

si ottiene $p(z)=(z^2-2z+2)(z^2-3z+2)$, dunque le altre due radici di $p(z)=0$ si ottengono ponendo $z^2-3z+2=0$, da cui $z=1$ e $z=2$.

Pertanto le quattro soluzioni di $p(z)=0$ sono $1, 2$, $w=1+i$ e $\bar w=1-i$.
La decomposizione in fattori irriducibili su $\mathbb{C}$ è $p(z)=(z-1)(z-2)(z-w)(z-\bar w)$, mentre quella su $\mathbb{R}$ è $p(z)=(z-1)(z-2)(z^2-2z+2)$.

• $p(z)=z^3+(1+2i)z^2+(-2+(2-\sqrt3)i)z-2-i\sqrt3=0$ ha soluzione $z=-1$,
dunque $p(z)$ sarà divisibile per $z-(-1)=z+1$. Con Ruffini:

$$\begin{array}{r|cccc} & 1 & 1+2i & -2+(2-\sqrt3)i & -2-i\sqrt3 \\ -1 & & -1 & -2i & 2+i\sqrt3 \\ \hline & 1 & 2i & -2-\sqrt3 i & /\!/ \end{array}$$

perciò $p(z)=(z+1)(z^2+2iz-2-i\sqrt3)$. Così le altre due soluzioni di $p(z)=0$ si ottengono dall'equazione

$z^2+2iz-2-i\sqrt3=0$, che dà $z=-i\pm\sqrt{-1+2+i\sqrt3}=-i\pm\sqrt{1+i\sqrt3}$.
Le radici quadrate di $1+i\sqrt3=2e^{i\pi/3}$ sono $\pm\sqrt2\,e^{i\pi/6}=\pm\frac{\sqrt2}{2}(\sqrt3+i)$, dunque

$$z=-i\pm\frac{\sqrt2}{2}(\sqrt3+i)= \left\langle \begin{array}{l} -i+\frac{\sqrt2}{2}(\sqrt3+i)=\frac{\sqrt6}{2}+\left(\frac{\sqrt2}{2}-1\right)i \\ -i-\frac{\sqrt2}{2}(\sqrt3+i)=-\frac{\sqrt6}{2}-\left(\frac{\sqrt2}{2}+1\right)i \end{array}\right.$$

(7) Determinare un polinomio reale $p(z)$ di grado più piccolo possibile che abbia $z=-2$ come radice semplice, $z=-1+i$ come radice doppia e tale che $p(-1)=3$.

Se $p(z)$ ha -2 come radice semplice deve essere divisibile per $(z+2)$ ma non per $(z+2)^2$; inoltre se $w=-1+i$ è radice lo sarà anche $\bar{w}=-1-i$ (infatti $p(z)$ è richiesto essere un polinomio reale), dunque $p(z)$ deve essere divisibile per $(z-w)(z-\bar{w}) = z^2-(2\operatorname{Re} w)z+|w|^2 = z^2+2z+2$, anzi anche dal suo quadrato (perché w, e dunque anche $\bar{w}$, sono richiesti essere radici doppie).
Da tutto ciò segue che $p(z)=(z+2)(z^2+2z+2)^2\cdot q(z)$ per qualche polinomio $q(z)$; e per la richiesta che il grado di $p(z)$ sia il più piccolo possibile sarà $q(z)=K$ costante, ovvero $p(z)=K\cdot(z+2)(z^2+2z+2)^2$. Infine, la condizione $p(-1)=3$ dà $K(-1+2)((-1)^2+2(-1)+2)=K=3$, e così il polinomio cercato è
$p(z)=3(z+2)(z^2+2z+2)^2$.

(8) (a) Trovare le soluzioni di $8z^6+(1+8i)z^3+i=0$

(b) Data $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $g(z)=z^2+3\bar{z}$ calcolare le fibre $g^{-1}(10)$, l'immagine di $A=i\mathbb{R}$ e l'antimmagine di $B=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$

(a) È facile notare che $p(z)=8z^6+(1+8i)z^3+i$ si scompone come $p(z)=(8z^3+1)(z^3+i)$, e dunque l'equazione $p(z)=0$ equivale a $z^3=-\frac{1}{8}$ oppure $z^3=-i$ (in alternativa, posto $w:=z^3$ si ha $8w^2+(1+8i)w+i=0$, da cui $w=\frac{-(1+8i)\pm\sqrt{(-(1+8i))^2-32i}}{16}=\frac{-(1+8i)\pm(1-8i)}{16}$, ovvero $w_1=-i$ oppure $w_2=-\frac{1}{8}$): si tratta dunque di trovare due famiglie di radici cubiche. Applicando de Moivre, la prima equazione $z^3=-i$ dà $z_1=i$, $z_2=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ e $z_3=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$, mentre la seconda $z^3=-\frac{1}{8}$ dà $z_4=\frac{1+\sqrt{3}i}{4}$, $z_5=-\frac{1}{2}$ e $z_6=\frac{1-\sqrt{3}i}{4}$.

(b) Denotiamo $x=\operatorname{Re} z$ e $y=\operatorname{Im} z$. Data la funzione $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $g(z)=z^2+3\overline{z}$, calcolare la fibra $g^{-1}(10)$ equivale a risolvere l'equazione $z^2+3\overline{z}=10$ che equivale a $x^2-y^2+2ixy+3x-3iy=10$, ovvero al sistema dato da $x^2-y^2+3x=10$ e da $y(2x-3)=0$. Dalla seconda si ricava che $y=0$ oppure $x=\frac{3}{2}$: se $y=0$ dalla prima si ha $x^2+3x-10=0$, ovvero $x=-5$ oppure $x=2$; se $x=\frac{3}{2}$, dalla prima si ha $-y^2=\frac{13}{4}$, priva di soluzioni reali. Dunque $g^{-1}(10)=\{-5,2\}$. L'immagine dell'asse immaginario $A=i\mathbb{R}$ è $g(A)=\{z=(it)^2+3\overline{it}: t\in\mathbb{R}\}=\{z=-t^2-3it: t\in\mathbb{R}\}$: sostituendo il parametro $t=-\frac{1}{3}y$ nell'altra equazione $x=-t^2$ si ottiene nel piano di Gauss il luogo $x=-\frac{1}{9}y^2$, una parabola avente l'asse reale come asse di simmetria. Infine, se $B=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z>0\}$ si ha $g^{-1}(B)=\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} g(z)>0\}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}: y(2x-3)>0\}$: si tratta dei due quadranti traslati fatti dai numeri con $x>\frac{3}{2}$ e $y>0$, oppure con $x<\frac{3}{2}$ e $y<0$.

(9) (a) Trovare le soluzioni complesse di $z^2-8\bar{z}=32$ che hanno parte immaginaria <0, e determinarne le radici quinte.

(b) Data l'equazione $2z^4-\alpha z^2=z$ con $\alpha\in\mathbb{R}$, trovarne le soluzioni complesse nel caso $\alpha=1$; discutere poi quali sono le sue soluzioni reali al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$.

(a) Scritta $z=x+iy$ con $x=\operatorname{Re} z$ e $y=\operatorname{Im} z$, l'equazione $z^2-8\bar{z}=32$ diventa $(x^2-y^2-8x-32)+2iy(x+4)=0$, da cui $x^2-y^2-8x-32=0$ e $y(x+4)=0$; dalla seconda si ottiene $y=0$ (da cui dalla prima si ottiene $x^2-8x-32=0$, ovvero le soluzioni reali $z_1=4(\sqrt{3}+1)$ e $z_2=4(-\sqrt{3}+1)$) oppure $x=-4$ (da cui dalla prima si ottiene $16-y^2=0$, ovvero le soluzioni $z_3=-4+4i$ e $z_4=-4-4i$). L'unica soluzione che ci interessa è dunque $z_4=-4-4i=\sqrt{32}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$, le cui radici quinte sono date da $w_k=\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{4}+k\frac{2\pi}{5}))$ (con $k=0,1,2,3,4$): ad esempio la prima è $w_0=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=1+i$, e le altre quattro si trovano ruotando w_0 di intervalli di argomento di $\frac{2\pi}{5}$.

(b) L'equazione $2z^4-\alpha z^2=z$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ è algebrica a coefficienti reali, dunque avrà quattro soluzioni che saranno reali oppure coppie di complesse coniugate; una di esse è ovviamente $z=0$, dunque occupiamoci di risolvere $2z^3-z-1=0$, che avendo grado dispari avrà senz'altro un'altra soluzione reale. Se $\alpha=1$ essa diventa $2z^3-z-1=0$: una soluzione evidente è $z=1$, e dividendo per $(z-1)$ si ottiene $2z^2+2z+1=0$ che ha soluzioni coniugate $z=\frac{1}{2}(-1\mp i)$. • Nel caso generale di $\alpha\in\mathbb{R}$, le soluzioni reali di $p(z)=2z^3-\alpha z-1=0$ saranno gli zeri della funzione polinomiale reale $p(x)=2x^3-\alpha x-1$ di variabile reale x. Si noti che $\lim_{\mp\infty}p(x)=\mp\infty$, e che derivando si ottiene $p'(x)=6x^2-\alpha$: dunque se $\alpha\le 0$ la funzione $p(x)$ è strettamente crescente e ammette perciò un solo zero. Nel caso $\alpha>0$ si ha un massimo locale in $x=-\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$ e un minimo locale in $x=\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$, che valgono rispettivamente $p(\mp\sqrt{\frac{\alpha}{6}})=-1\pm\frac{2}{3}\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$. Si noti che il minimo locale è negativo, mentre il massimo locale lo è per $0<\alpha<\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$, si annulla per $\alpha=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ ed è positivo per $\alpha>\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$: pertanto se $\alpha<\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ si ha un'unica soluzione reale (come si è già visto per $\alpha=1$), se $\alpha=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ se ne hanno due (delle quali una doppia, ovvero il punto di massimo locale $-\sqrt{\frac{\alpha}{6}}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$), e se $\alpha>\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ se ne hanno tre.

(10) Sia $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ data da $f(z)=z^2-4$.

(a) Trovare l'insieme S delle radici cubiche di $-8i$; determinare poi tutte le soluzioni dell'equazione $z^3=i\,f(z)$, sapendo che una di esse sta in S.

(b) f è iniettiva? Suriettiva? Detto ℓ il semiasse immaginario positivo, calcolare $f(\ell)$ e $f^{-1}(\ell)$.

(a) Le tre radici cubiche di $-8i=8(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$ sono $w_k=2(\cos(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}))$ per $k=0,1,2$, e dunque $S=\{w_0=2i,\ w_1=-\sqrt{3}-i,\ w_2=\sqrt{3}-i\}$. L'equazione $z^3=i\,f(z)$ diventa $z^3-iz^2+4i=0$ che, algebrica di 3o grado, avrà tre soluzioni in $\mathbb{C}$: si nota subito che $2i\in S$ è una di esse. Dividendo con Ruffini i due membri per $(z-2i)$ si ha $z^2+iz-2=0$, che dà le altre due soluzioni, ovvero $z=\frac{-i\mp\sqrt{-1+8}}{2}=\frac{1}{2}(\mp\sqrt{7}-i)$.

(b) La funzione $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ data da $f(z)=z^2-4$ è suriettiva (preso un qualsiasi $w\in\mathbb{C}$, l'equazione $f(z)=w$ equivale a $z^2=w+4$, e ogni numero complesso ha radici quadrate) ma non iniettiva (vale $f(z_1)=f(z_2)$ se e solo se $z_2=\mp z_1$). Considerato poi il semiasse immaginario positivo $\ell=\{it:t>0\}$, per definizione si ha $f(\ell)=\{f(it):t>0\}=\{-t^2-4:t>0\}=\{z\in\mathbb{R}:z<-4\}$ (la semiretta $]-\infty,-4[$ dell'asse reale) e $f^{-1}(\ell)=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:f(z)\in\ell\}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:(x^2-y^2-4)+(2xy)i\in\ell\}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:x^2-y^2-4=0,\ xy>0\}$ (i punti dell'iperbole $x^2-y^2=4$ che stanno nel 1o e 3o quadrante e non sugli assi).

(11) Trovare le soluzioni $z = x + iy$ dell'equazione $|z|^2 + 2\bar{z}^2 + 3iz = 0$ che, nel piano di Gauss, distano meno di 4 dal numero $w = 1$. Calcolare poi le radici cubiche di $27i$, vedendo se qualcuna di esse appare tra le precedenti soluzioni.

Posto $z = x + iy$, l'equazione $|z|^2 + 2\bar{z}^2 + 3iz = 0$ diventa $(x^2 + y^2) + 2(x^2 - y^2 - 2ixy) + 3i(x + iy) = 0$, ovvero $(3x^2 - y^2 - 3y) + i(3x - 4xy) = 0$, che equivale al sistema di equazioni reali dato da $3x^2 - y^2 - 3y = 0$ e da $3x - 4xy = 0$. Dalla seconda si ottiene $x = 0$ oppure $y = \frac{3}{4}$; nel primo caso, dalla prima si ottiene $y = 0$ oppure $y = -3$; nel secondo si ottiene $3x^2 - \frac{9}{16} - \frac{9}{4} = 0$, da cui $x = \mp\frac{\sqrt{15}}{4}$. Le soluzioni sono dunque $z_1 = 0$, $z_2 = -3i$, $z_3 = \frac{1}{4}(\sqrt{15} + 3i)$ e $z_4 = \frac{1}{4}(-\sqrt{15} + 3i)$, e ciascuna di esse dista meno di 4 dal numero $w = 1$: questo si può vedere subito disegnandole nel piano di Gauss o calcolando le distanze $|z_j - w|$. • Le radici cubiche di $27i = 27(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ sono $w_k = 3(\cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}))$, ovvero $w_0 = 3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$, $w_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + i)$ e $w_k = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -3i$, e quest'ultima radice è l'unica che appare tra le soluzioni precedenti.

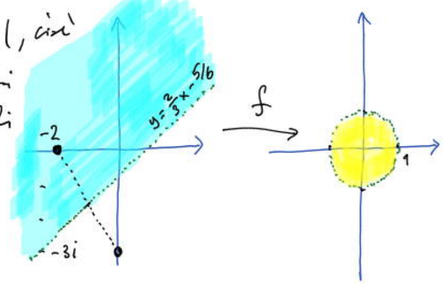
(12) Determinare l'insieme $S \subset \mathbb{C}$ delle radici quarte di -4; trovare poi le soluzioni complesse dell'equazione $z^3 - z^2 + (3-i)z - 2(1+i) = 0$ sapendo che una di esse è l'elemento di S che sta nel I° quadrante del piano di Gauss.

Le radici quarte di $-4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ sono $w_k = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}))$ con $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $S = \{w_0 = 1 + i,\ w_1 = -1 + i,\ w_2 = -1 - i,\ w_3 = 1 - i\}$. Il testo dice dunque che $1 + i$ appare tra le soluzioni di $p(z) = z^3 - z^2 + (3 - i)z - 2(1 + i) = 0$, ed effettivamente dividendo con Ruffini il polinomio $p(z)$ per $z - (1 + i)$ si ottiene $p(z) = (z - (1 + i))(z^2 + iz + 2)$: perciò le altre due soluzioni di $p(z) = 0$ si ottengono da $z^2 + iz + 2 = 0$, ovvero $z = \frac{-i \mp \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{-i \mp 3i}{2}$, cioè $z = i$ oppure $z = -2i$.

(13) Data $f(z) = \dfrac{z+2}{iz-3}$ determinarne dominio, immagine, fibre.
È iniettiva? Suriettiva? Calcolare $f^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\})$,
$f^{-1}(\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w < 0\})$, $f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -2\})$ e $f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\})$

Il dominio di $f(z) = \dfrac{z+2}{iz-3}$ è dato da $iz - 3 \neq 0$, cioè $iz \neq 3$, cioè $z \neq -3i$: pertanto il dominio di f risulta $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$.
Per il calcolo dell'immagine di f conviene passare subito al calcolo delle fibre. Sia dunque $w \in \mathbb{C}$ nel codominio, e cerchiamo gli $z \neq -3i$ nel dominio tali che $f(z) = w$. Si ricava allora $z + 2 = w(iz - 3)$, da cui $(iw - 1)z = 3w + 2$. Vorrei ora dividere per $iw - 1$, ma prima devo appurare cosa accade quando $iw - 1 = 0$, ovvero $w = -i$: in tal caso si ha $0 = 2 - 3i$, che è assurdo. Ne deduciamo che $f^{-1}(-i) = \emptyset$ (ovvero $w = -i$ non appartiene all'immagine di f). Per tutti gli altri $w \neq -i$ si ottiene $z = \dfrac{3w+2}{iw-1}$, cioè tutte le altre fibre di f sono fatte da uno e un solo elemento: ne deduciamo che l'immagine di f è $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$, e che $\mathbb{C} \setminus \{-3i\} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ è biiettiva, con inversa $f^{-1}(w) = \dfrac{3w+2}{iw-1}$.

• L'antiimmagine $f^{-1}(\{w\in\mathbb{C} : |w|<1\}) = \{z\in\mathbb{C} : z\neq -3i,\ |f(z)|<1\}$ è data dalla condizione $\left|\frac{z+2}{iz-3}\right|<1$, cioè $\frac{|z+2|}{|iz-3|}<1$, cioè $|z+2| < |iz-3| = |i(z+3i)| = |i|\cdot|z+3i| = |z+3i|$, cioè $|z-(-2)| < |z-(-3i)|$: si tratta dei numeri complessi che distano meno da -2 che da $-3i$, cioè quelli che stanno sopra l'asse del segmento nel piano di Gauss di estremi -2 e $-3i$, ovvero $y > \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$ ove $x=\mathrm{Re}\,z$ e $y=\mathrm{Im}\,z$ (vedi figura).

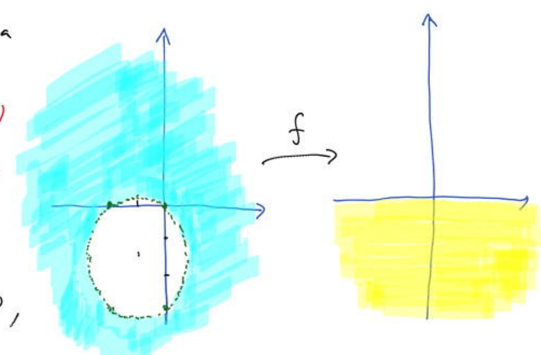


• L'antiimmagine $f^{-1}(\{w\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\,w<0\}) = \{z\in\mathbb{C} : z\neq -3i,\ \mathrm{Im}\,f(z)<0\}$ è data dalla condizione $\mathrm{Im}\left(\frac{z+2}{iz-3}\right)<0$.

Ora, scritta $z=x+iy$ con $x=\mathrm{Re}\,z$ e $y=\mathrm{Im}\,z$, si ha

$$f(z) = \frac{z+2}{iz-3} = ((x+2)+iy)\cdot\frac{(-y-3)-ix}{(-y-3)^2+x^2} = \overbrace{\frac{-(3x+2y+6)}{x^2+(y+3)^2}}^{\mathrm{Re}\,f(z)} + i\,\overbrace{\frac{-x(x+2)-y(y+3)}{x^2+(y+3)^2}}^{\mathrm{Im}\,f(z)},$$

pertanto la condizione $\mathrm{Im}\,f(z)<0$ diventa $-x(x+2)-y(y+3)<0$, ovvero $x^2+y^2+2x+3y>0$, i numeri nel piano di Gauss esterni alla circonferenza di centro $-1-\frac{3}{2}i$ e passante per l'origine O (vedi figura).



• Per il calcolo delle immagini, solitamente più difficoltoso, visto che f è biiettiva possiamo interpretarle come antiimmagini tramite f^{-1} e procedere come prima. Posto $w=a+ib$ con $a=\mathrm{Re}\,w$ e $b=\mathrm{Im}\,w$ nel codominio, si ha

$$z = f^{-1}(w) = \frac{3w+2}{iw-1} = \frac{(3a+2)+3ib}{(-b-1)+ia} = ((3a+2)+3ib)\left(\frac{(-b-1)-ia}{(-b-1)^2+a^2}\right) =$$

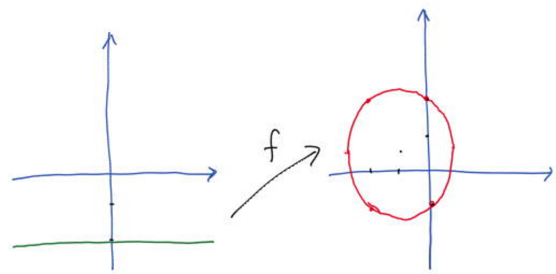
$$= \overbrace{-\frac{3a+2b+2}{a^2+(b+1)^2}}^{\mathrm{Re}\,z} + i\left(\overbrace{-\frac{3(a^2+b^2)+2a+3b}{a^2+(b+1)^2}}^{\mathrm{Im}\,z}\right)$$

Pertanto $f(\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z = -2\})$

$= \left\{ w = a+ib : -\frac{3(a^2+b^2)+2a+3b}{a^2+(b+1)^2} = -2 \right\}$

$= \left\{ w = a+ib : a^2+b^2+2a-b-2=0 \right\}$,

circonferenza di centro $-1+\frac{1}{2}i$ e passante per $-i$ (vedi figura)



Mentre $f(\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\})$

$= \left\{ w = a+ib : -\frac{3a+2b+2}{a^2+(b+1)^2} < 0 \right\}$

$= \left\{ w = a+ib : 3a+2b+2 > 0 \right\}$,

il semipiano al di sopra della retta $b = -\frac{3}{2}a - 1$ (vedi figura).