1.4 I numeri complessi

Grazie alla sua proprietà di completezza, il corpo commutativo $\mathbb{R}$ dei numeri reali è soddisfacente dal punto di vista geometrico; non lo è altrettanto da quello algebrico, ovvero per le sue proprietà di corpo. Infatti, se si considera un polinomio

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

non costante con coefficienti reali a_j (per $j = 0, \dots, n$) e si cercano le *radici* in $\mathbb{R}$ di $p(x)$ (ovvero le soluzioni in $\mathbb{R}$ dell'equazione $p(x) = 0$, i numeri reali x_0 tali che $p(x_0) = 0$), si continua ad avere il problema che già si aveva per il corpo $\mathbb{Q}$ (si pensi a $p(x) = x^2 - 2$): tali radici non sempre si trovano nel corpo dei coefficienti. Si veda, ad esempio, un trinomio di secondo grado con discriminante negativo, come $x^2 - 2x + 7$ oppure, più semplicemente, $x^2 + 1$. Una (teorica) soluzione di quest'ultima equazione dovrebbe essere un "numero" che moltiplicato per se stesso dia -1: come vedremo, sarà proprio la creazione di un "numero" siffatto (che, non potendo essere reale, sarà spontaneo chiamare "immaginario") a risolvere la questione. Cerchiamo insomma un corpo commutativo che estenda $\mathbb{R}$ (cioè, che contenga una "copia isomorfa" del campo commutativo $\mathbb{R}$, e le cui operazioni, se ristrette ad $\mathbb{R}$, ci restituiscano le note operazioni di $\mathbb{R}$) e che sia *algebricamente chiuso*, ovvero tale che un polinomio di grado n a coefficienti in tale corpo ammetta esattamente n soluzioni (se contate ognuna con la sua molteplicità) in esso. Tale corpo, che andiamo ora a costruire, si chiamerà campo dei *numeri complessi*, e si denoterà con $\mathbb{C}$.

Corpo dei numeri complessi

Nell'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali definiamo le seguenti operazioni:

- (Addizione) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;
- (Moltiplicazione) $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{R}^2$ strutturato con tali operazioni.

Proposizione 1.4.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *è un campo (cioè un corpo commutativo).*

Dimostrazione. Si tratta di verificare, con un po' di pazienza, tutte le proprietà (An_1)-(An_2)-(An_3)-(An_4)-(An_5)-(Cp). Per (An_1), l'associatività di $+$ è ovvia, l'elemento neutro $0 := (0, 0)$ e l'opposto di (a, b) è $-(a, b) = (-a, -b)$. (An_2), (An_3) e (An_5) si verificano alla mano (con calcoli un po' tediosi ma elementari). Per (An_4), l'elemento neutro di $\cdot$ è $1 := (1, 0)$. Per (Cp), cercando l'inverso (x, y) di $(a, b) \neq (0, 0)$ dev'essere $(x, y) \cdot (a, b) = (1, 0)$, dunque $ax - by = 1$ e $bx + ay = 0$, da cui si ottiene l'unica soluzione $(x, y) = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$. $\square$

Piano di Gauss

Il piano cartesiano, quando si intende come l'insieme dei numeri complessi, viene solitamente denominato *piano di Gauss*. Chiamiamo provvisoriamente $\mathbb{R}' = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ (ovvero, l'"asse delle ascisse" del piano di Gauss). Si vede facilmente che $\mathbb{R}'$ è un sottocorpo di $\mathbb{C}$ (si ha che $0 = (0, 0)$ e $1 = (1, 0)$ stanno in $\mathbb{R}'$, e somme, prodotti, opposti e inversi di elementi di $\mathbb{R}'$ stanno ancora in $\mathbb{R}'$) e che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}'$ data da $f(x)=(x,0)$ è un isomorfismo di corpi commutativi (è biiettiva, e rispetta le operazioni): pertanto f identifica $\mathbb{R}$ col sottocorpo $\mathbb{R}'$ dentro $\mathbb{C}$, e d'ora in poi confonderemo $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}'$, abbandonando quest'ultima notazione ormai inutile.

Forma algebrica di un numero complesso Posto

$$i := (0,1)\,,$$

notiamo che un qualsiasi $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ si scrive come $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=a+ib$ (ove si è usata la suddetta identificazione per $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$). Questa espressione si chiama la *forma algebrica* del numero complesso z. Il numero i si chiama *unità immaginaria*, ed ha la proprietà che $i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)\simeq -1$, ovvero $i^2=-1$.[(38)] Nella forma algebrica $z=a+ib$, il numero reale a coefficiente di 1 si chiama *parte reale* di z (denotata anche $\operatorname{Re} z$), ed il numero reale b coefficiente di i *parte immaginaria* di z (denotata anche $\operatorname{Im} z$): si avrà dunque

Forma algebrica

Unità immaginaria

Parte reale e immaginaria

$$z=a+ib, \qquad a=\operatorname{Re} z\in\mathbb{R},\ b=\operatorname{Im} z\in\mathbb{R} \qquad \text{(forma algebrica del numero complesso } z\text{)}.$$

I numeri che si trovano sull'asse x, che hanno parte immaginaria nulla, sono detti (coerentemente con quanto detto prima) *reali*, mentre quelli sull'asse y, che hanno parte reale nulla, sono detti *immaginari puri*, e denoteremo con $i\mathbb{R}$ il loro insieme; come visto, $\mathbb{R}$ è un sottocorpo di $\mathbb{C}$, mentre $i\mathbb{R}$ è solamente un sottogruppo additivo.[(39)] Si noti che, dati due numeri complessi z e w, vale $z=w$ se e solo se $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im} z=\operatorname{Im} w$.

Numeri reali e immaginari

La forma algebrica rende facile calcolare somma e prodotto (per il quale d'ora in poi, analogamente ai numeri reali, non useremo più il simbolo "$\cdot$") di due numeri complessi: basterà pensarli come binomi a coefficienti reali con la relazione $i^2=-1$. Infatti, se $z=a+ib$ e $w=c+id$ si ha $z+w=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$ (da cui $\operatorname{Re}(z+w)=\operatorname{Re} z+\operatorname{Re} w$ e $\operatorname{Im}(z+w)=\operatorname{Im} z+\operatorname{Im} w$), mentre $zw=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$ (da cui $\operatorname{Re}(zw)=\operatorname{Re} z\operatorname{Re} w-\operatorname{Im} z\operatorname{Im} w$ e $\operatorname{Im}(zw)=\operatorname{Re} z\operatorname{Im} w+\operatorname{Im} z\operatorname{Re} w$).

Nel piano di Gauss, l'opposto $-z$ di z si visualizza come il vettore[(40)] simmetrico a z rispetto a 0; più generalmente, si vede subito che il prodotto tz con $t\in\mathbb{R}$ e $z\in\mathbb{C}$ ha l'effetto di dilatare (o restringere) la lunghezza del vettore z per il fattore $|t|$, preservandone o invertendone il verso a seconda che sia $t\gtrless 0$. La somma $z+w$ si può rappresentare tramite la *regola del parallelogramma*, come il vettore diagonale uscente da 0 del parallelogramma

(38)...insomma, è proprio quello che speravamo di trovare quando poco fa cercavamo, inutilmente, di trovare soluzioni reali per l'equazione $x^2+1=0$.

(39)Infatti, il prodotto di due numeri immaginari puri non è immaginario puro, ma reale: $ib\,ib'=-bb'$.

(40)Per "vettore" z intendiamo il segmento da 0 a z orientato verso z; si usa rappresentare un vettore come una "freccia", dotato di una "direzione" (la retta lungo la quale giace), di un "modulo" (o "intensità" in Fisica) dato dalla sua lunghezza, e di un "verso", cioè l'orientazione scelta. Il concetto di "vettore", grandezza che per essere descritta richiede la specificazione delle suddette tre caratteristiche, dovrebbe essere già abbastanza familiare allo studente perlomeno per gli studi di Fisica fatti alle scuole superiori (si pensi ai vettori cinematici (posizione, velocità, accelerazione) e dinamici (esempio, la forza)).

costruito sui vettori z e w; dunque, la differenza $z-w=z+(-w)$ sarà il vettore diagonale uscente da 0 del parallelogramma costruito sui vettori z e $-w$ (si noti che l'altra diagonale del parallelogramma costruito sui vettori z e w si ottiene "traslando il vettore $z-w$"). Anche il prodotto zw sarà visualizzabile sul piano di Gauss ma ne riparleremo meglio più tardi, quando introdurremo la forma polare di un numero complesso.

Va notato anche che, in $\mathbb{C}$, non si considera alcuna relazione d'ordine:[41] dati due numeri complessi z e w, l'espressione $z \le w$ è dunque priva di senso, a parte il caso in cui entrambi siano reali (e allora va intesa come il consueto ordine totale di $\mathbb{R}$).

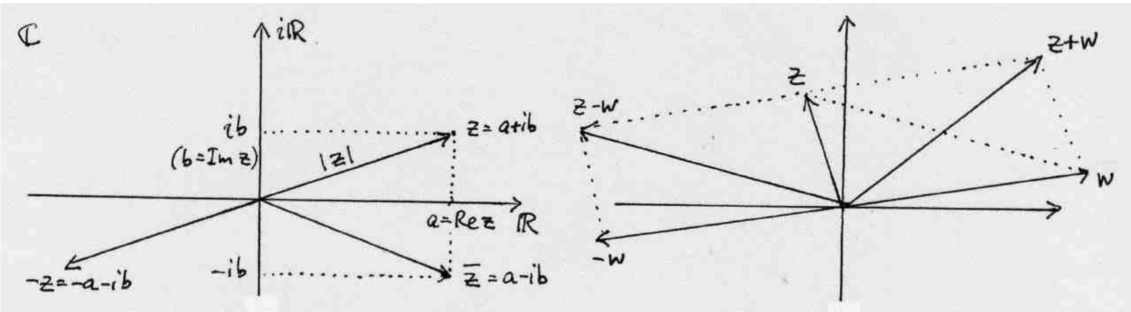

Figura 1.8: Rappresentazione algebrica di un numero complesso; somma, modulo, coniugato.

Esercizio. *Dati $z=-1+2i$ e $w=3+i$, calcolare $-z$, $z+w$, $z-w$, z^2 e zw, specificando le loro parti reali e immaginarie.*

Risoluzione. Vale $-z=-(-1+2i)=1-2i$ (con $\mathrm{Re}(-z)=1$ e $\mathrm{Im}(-z)=-2$), $z+w=-1+2i+3+i=2+3i$ (con $\mathrm{Re}(z+w)=2=\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Re}\,w=-1+3$ e $\mathrm{Im}(z+w)=3=\mathrm{Im}\,z+\mathrm{Im}\,w=2+1$), $z-w=-1+2i-(3+i)=-4+i$ (con $\mathrm{Re}(z-w)=-4$ e $\mathrm{Im}(z-w)=1$), $z^2=(-1+2i)^2=(-1)^2+(2i)^2+2(-1)(2i)=1-4-4i=-3-4i$ (con $\mathrm{Re}(z^2)=-3$ e $\mathrm{Im}(z^2)=-4$) e $zw=(-1+2i)(3+i)=-3-i+6i+2i^2=-5+5i$ (con $\mathrm{Re}(zw)=-5$ e $\mathrm{Im}(zw)=5$).

Coniugato e modulo Dato un numero complesso $z=a+ib$, il *coniugato* di z è il numero complesso **Coniugato**

$$\overline{z}=a-ib:$$

sul piano di Gauss si tratta semplicemente della riflessione di z rispetto all'asse reale, con $\mathrm{Re}\,\overline{z}=\mathrm{Re}\,z$ e $\mathrm{Im}\,\overline{z}=-\mathrm{Im}\,z$. È chiaro che $\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}:\overline{z}=z\}$ e $i\mathbb{R}=\{z\in\mathbb{C}:\overline{z}=-z\}$. Il *modulo* di z è invece il numero reale **Modulo**

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

ovvero la lunghezza del vettore z; vale dunque $|z|\ge 0$, ed anzi $|z|=0$ se e solo se $z=0$. Osserviamo anche che $|z-w|$ rappresenta la *distanza* tra i numeri complessi z e w sul **Distanza**

[41] In effetti, si dimostra che su $\mathbb{C}$ non si può definire alcuna relazione d'ordine che lo renda un corpo commutativo ordinato (vedi pag. 41).

piano di Gauss.[(42)] Le seguenti uguaglianze, che valgono per ogni $z, w \in \mathbb{C}$, sono tutte di verifica immediata, tranne l'ultima (nota anche come *disuguaglianza triangolare*, per l'evidente significato geometrico che ha sul piano di Gauss):[(43)]

$$z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z, \qquad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z \qquad (\text{oppure } \mathrm{Re}\,z = \tfrac{z+\overline{z}}{2} \text{ e } \mathrm{Im}\,z = \tfrac{z-\overline{z}}{2i}), \qquad \overline{\overline{z}} = z,$$

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad z\overline{z} = |z|^2, \qquad |zw| = |z|\,|w|, \qquad |z+w| \le |z| + |w|.$$

Se $z \neq 0$, dall'uguaglianza $z\overline{z} = |z|^2$ si ricava l'importante espressione per il reciproco: **Reciproco**

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \qquad \text{cioè se } z = a + ib \text{ allora } \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) - i\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Esercizio. *Dati $z = -1+2i$ e $w = 3+i$, calcolare $\overline{z}$, $\overline{z+w}$, $|z|$, $|w|$, $|w^2|$, $|zw|$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{\overline{z}}$, $z - \overline{w}$, $\frac{z}{w}$, $\frac{w+z-\overline{w}}{z}$.*

Risoluzione. Si ha $\overline{z} = -1-2i$, $\overline{z+w} = \overline{z}+\overline{w} = -1-2i+3-i = 2-3i$, $|z| = \sqrt{(-1)^2+(2)^2} = \sqrt{5}$, $|w| = \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$, $|w^2| = |w|^2 = 10$, $|zw| = |z||w| = 5\sqrt{2}$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{-1-2i}{5} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{\overline{z}}}{|\overline{z}|^2} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{-1+2i}{5}$ o anche $\frac{1}{\overline{z}} = \overline{(\frac{1}{z})} = \frac{-1+2i}{5}$, $z - \overline{w} = (-1+2i)-(3-i) = -4+3i$, $\frac{z}{w} = z\frac{1}{w} = z\frac{\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(-1+2i)(3-i)}{10} = \frac{-1+7i}{10}$ e $\frac{w+z-\overline{w}}{z} = \frac{1}{z}(2i\,\mathrm{Im}\,w)+1 = \frac{-1-2i}{5}2i+1 = \frac{9-2i}{5}$.

Esercizio. **(1)** *Risolvere l'equazione $\overline{1-z}+\overline{iz} = 3-z$.* **(2)** *Dato $u = -2+i$, determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $|z-i| = 2$ e $\mathrm{Re}(zu) = 1$.* **(3)** *Determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ tali che $\frac{1}{z} = \overline{iz}$.*

Risoluzione. **(1)** Se $z = x+iy$ si ha $\overline{1-x-iy}+\overline{i(x+iy)} = 3-x-iy$, ovvero $1-x+iy-ix-y = 3-x-iy$, ovvero $1-x-y+i(y-x) = 3-x+i(-y)$. Ciò equivale a $1-x-y = 3-x$ e $y-x = -y$, con l'unica soluzione $(x,y) = (-4,-2)$. Pertanto $z = -4-2i$. **(2)** Se $z = x+iy$, si ha $|z-i| = |x+iy-i| = |x+i(y-1)| = \sqrt{x^2+y^2-2y+1} = 2$, mentre $\mathrm{Re}(zu) = \mathrm{Re}((x+iy)(-2+i)) = \mathrm{Re}(-2x+ix-2iy-y) = \mathrm{Re}(-2x-y+i(x-2y)) = -2x-y = 1$, da cui le due equazioni $x^2+y^2-2y+1 = 4$ e $-2x-y = 1$. Dalla seconda si ha $y = -2x-1$, che messa nella prima dà $5x^2+8x = 0$, ovvero $x = 0$ oppure $x = -\frac{8}{5}$, da cui rispettivamente $y = -1$ e $y = \frac{11}{5}$. Si ottengono allora le due soluzioni $z = -i$ e $z = \frac{-8+11i}{5}$. **(3)** Dev'essere $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \overline{iz} = -i\overline{z}$. Essendo senz'altro $z \neq 0$ e dunque $\overline{z} \neq 0$, si ricava $\frac{1}{|z|^2} = -i$, che è assurdo (il primo membro è reale positivo, il secondo immaginario puro). Dunque l'equazione non ha soluzioni.

Radici quadrate Dato un numero complesso $z_0 = a+ib$, calcoliamone le *radici quadrate*, ovvero tutti i numeri complessi $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tali che $z^2 = z_0$. Si ottiene allora **Radici quadrate** $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2-y^2)+(2xy)i = a+ib$, da cui il sistema $\begin{cases} x^2-y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$. Se $z_0 = 0$ si trova solo $z = 0$; in tutti gli altri casi si trovano due soluzioni, l'una l'opposta dell'altra,

[(42)] Come osservato in precedenza, l'altra diagonale del parallelogramma costruito sui vettori z e w si ottiene "traslando il vettore $z - w = z + (-w)$.

[(43)] Vale $|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2+|w|^2+2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$; ma $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le |\,\mathrm{Re}(z\overline{w})| \le |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|$, da cui $|z+w|^2 \le |z|^2+|w|^2+2|z||w| = (|z|+|w|)^2$, equivalente alla tesi.

date da

$$z = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & (\text{se } b = 0,\ a > 0) \\ \pm i\sqrt{-a} & (\text{se } b = 0,\ a < 0) \\ \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\,(\operatorname{sign} b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) & (\text{se } b \neq 0), \end{cases}$$

ove $\operatorname{sign} b = 1$ (se $b > 0$) oppure -1 (se $b < 0$). In sostanza, tranne lo zero, *ogni numero complesso non nullo ha esattamente due radici quadrate, l'una opposta dell'altra.*[(44)] Come si vede, se z è un numero reale positivo (ovvero $z = a > 0$), si ritrovano le già note radici reali $\pm\sqrt{a}$; se invece z è un numero reale negativo (ovvero $z = a < 0$) si hanno due radici immaginarie pure $\pm i\sqrt{-a}$ (in particolare, se $z = -1$ si trovano $\pm i$).

Esempi. **(1)** Le radici quadrate di 4 sono ± 2; quelle di -12 sono $\pm 2\sqrt{3}i$. **(2)** Nel caso in cui z sia immaginario puro (ovvero $z = ib$, con $a = 0$) dalla formula sopra si ottiene $\pm\sqrt{\frac{|b|}{2}}(1 + (\operatorname{sign} b)i)$. Ad esempio, per $z = i$ si ha $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, mentre per $z = -3i$ si ha $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i)$. **(3)** Le radici di $z = 1 - 3i$ sono $\pm(\sqrt{\frac{\sqrt{10}+1}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2(\sqrt{10}+1)}}i)$.

Più generalmente si può mostrare (e lo faremo tra breve, vedi Proposizione 1.4.2) che, dato un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$, *ogni numero complesso non nullo ammette esattamente m radici m-esime distinte.*

Forma polare e trigonometrica di un numero complesso Introduciamo ora una descrizione alternativa dei numeri complessi.

I punti del piano cartesiano, oltre che con le consuete coordinate cartesiane (x, y), possono essere descritti (se diversi dall'origine O) anche con le *coordinate polari* (ρ, θ), ove ρ (detta *modulo*) è la distanza di P da O e θ (detto *argomento* o *anomalia*) è l'angolo, espresso in radianti, individuato dal vettore OP sulla circonferenza goniometrica $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ nel modo già descritto, ovvero contando, positivamente in senso orario, dal punto base $(1, 0)$. Il modulo è un numero reale > 0 ben definito, mentre l'argomento è un numero reale individuato a meno di multipli interi di 2π, anche se si usa chiamare *argomento principale* l'argomento in $]-\pi, \pi]$.[(45)] Il legame con le coordinate cartesiane è, come si vede facilmente,

Coordinate polari

Argomento principale

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

e viceversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Applichiamo ora queste considerazioni ai numeri complessi. Denotiamo con $\mathbb{U}$ la circonferenza $\mathbb{S}^1$ pensata come sottoinsieme di $\mathbb{C}$: sarà dunque

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos\theta + i\sin\theta : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

[(44)] Questa è la prima dimostrazione concreta della proprietà di chiusura algebrica dei numeri complessi, menzionata all'inizio (un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha n soluzioni complesse, se contate con la loro molteplicità): in questo caso il polinomio è $z^2 - z_0$, di grado 2, e difatti l'equazione $z^2 - z_0 = 0$ ha esattamente due soluzioni distinte tranne il caso in cui $z_0 = 0$, in cui c'è una sola soluzione ma doppia.

[(45)] Si noti che, ad esempio, in queste coordinate si può scrivere semplicemente $\mathbb{S}^1 = \{(\rho, \theta) : \rho = 1\}$.

Si noti che $\mathbb{U}$, luogo dei complessi di modulo 1, è sottogruppo *moltiplicativo* di $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$: infatti, se $z, w \in \mathbb{U}$, allora $|zw| = |z||w| = 1$ e $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = 1$, dunque $zw \in \mathbb{U}$ e $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Numeri complessi di modulo 1

Ogni complesso $z \neq 0$ si può scrivere come $z = |z|u_z$, con $u_z = \frac{z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} + i\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \in \mathbb{U}$:(46)

Forma polare

$$z = |z|u_z, \quad \text{con } u_z = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{U} \qquad \text{(forma polare del numero complesso } z\text{)}.$$

Scritto $u_z = \cos\theta + i\sin\theta$ usando l'argomento θ di z si ottiene la forma seguente, del tutto analoga alla polare:

Forma trigonometrica

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{(forma trigonometrica del numero complesso } z\text{)}.$$

Nella forma polare, $z = |z|u_z$ e $w = |w|u_w$ sono uguali se e solo se $|z| = |w|$ e $u_z = u_w$; nella forma trigonometrica, $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ sono uguali se e solo se $|z| = |w|$ e $\psi = \theta + 2k\pi$ per qualche intero k.

Usando le formule trigonometriche di addizione si vede subito che $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\theta+\psi) + i\sin(\theta+\psi)$ e perciò in generale, considerate le forme trigonometriche $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, si ottiene

Forma trigonometrica del prodotto

$$zw = |z||w|(\cos(\theta+\psi) + i\sin(\theta+\psi)),$$

che è già la forma trigonometrica del prodotto: in altre parole, la moltiplicazione in $\mathbb{C}$ di due numeri z e w si interpreta nel piano di Gauss prima modificando il modulo del vettore z moltiplicandolo per il fattore $|w|$, e poi ruotandolo per l'argomento di w. Notiamo anche che le forme trigonometriche dell'opposto, del coniugato e del reciproco di $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ sono

$$-z = |z|(\cos(\pi+\theta) + i\sin(\pi+\theta)); \quad \overline{z} = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)); \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)).$$

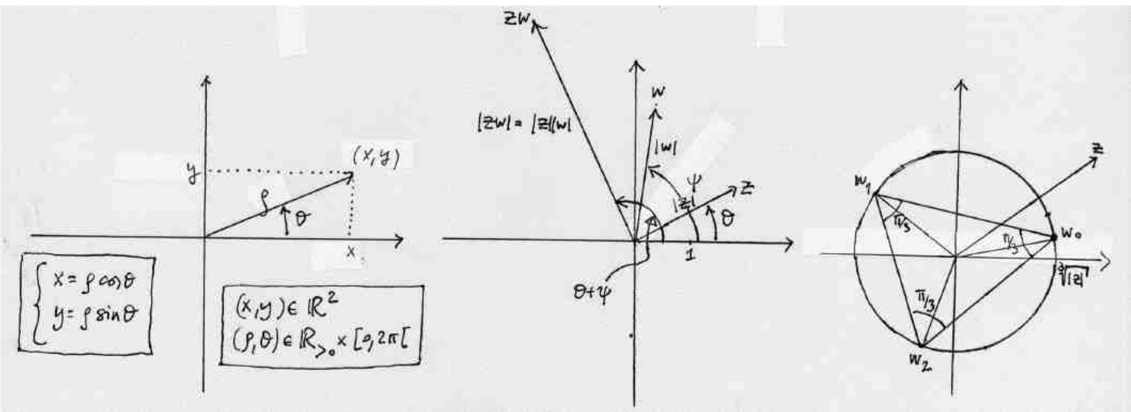

Figura 1.9: Coordinate polari nel piano; prodotto tra numeri complessi; radici cubiche w_0, w_1 e w_2 di z.

(46) Tale u_z è chiamato anche *segno* di z, perché se $z \in \mathbb{R}$ vale $u_z = \pm 1$ a seconda che $z \gtrless 0$.

Esercizio. **(1)** *Calcolare la forma trigonometrica di* 4, -1, $-3i$, $-1-\sqrt{3}i$, $1-3i$, $1+2i$. *Il numero* $z=-3(\cos\theta - i\sin\theta)$ *è in forma trigonometrica?* **(2)** *Calcolare la forma algebrica del numero complesso di modulo* 2 *ed argomento* $\frac{3\pi}{4}$.

Risoluzione. **(1)** $4=|4|\cdot\frac{4}{|4|}=4(\cos 0+i\sin 0)$; $-1=|-1|\frac{-1}{|-1|}=1\cdot(-1)=\cos\pi+i\sin\pi$; $-3i=|-3i|\frac{-3i}{|-3i|}=3(-i)=3(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$; $-1-\sqrt{3}i=2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$; $1-3i=\sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{3}{\sqrt{10}}i)=\sqrt{10}(\cos\theta+i\sin\theta)$ con $\theta=-\arcsin(\frac{3}{\sqrt{10}})$; $1+2i=\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i)=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$ con $\theta=\arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})$. Il numero z non è in forma trigonometrica: vale $z=3(-\cos\theta+i\sin\theta)=3(\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta))$, e quest'ultima è la forma cercata. **(2)** Si tratta di $2(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=2(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)=\sqrt{2}(-1+i)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.

La forma polare/trigonometrica è pratica anche per il calcolo di potenze intere e radici.

Proposizione 1.4.2. (Formule di de Moivre per le potenze e le radici)
Siano $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)\in\mathbb{C}$ *e* $m\in\mathbb{N}$. *Allora:*

(i) *vale* $z^m=|z|^m(\cos(m\theta)+i\sin(m\theta))$*;*

(ii) *esistono esattamente* m *distinte* radici m-esime *di* z (ovvero, numeri complessi w tali che $w^m=z$)*, poste sui vertici di un* m*-agono regolare inscritto nel cerchio dei numeri complessi di modulo* $\sqrt[m]{|z|}$*, e sono date da*

$$w_k=\sqrt[m]{|z|}\left(\cos\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{m}\right)+i\sin\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{m}\right)\right)\qquad (\text{con } k=0,1,\dots,m-1).$$

Dimostrazione. Essendo $z^m=z\cdots z$ (con m fattori), (i) deriva, direttamente dalle osservazioni fatte sopra. Sia $w=|w|(\cos\psi+i\sin\psi)$ una radice m-esima di z: usando (i), si ha dunque $w^m=|w|^m(\cos(m\psi)+i\sin(m\psi))=z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, da cui $|w|^m=|z|$ e $m\psi=\theta+2k\pi$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$. Si ricava dunque $|w|=\sqrt[m]{|z|}$ e $\psi=\frac{\theta+2k\pi}{m}$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$, ma basta limitarsi agli m interi $k=0,1,\dots,m-1$ per considerare tutti i possibili risultati senza ripetizione. Tutte le radici si trovano sul cerchio dei numeri complessi di modulo $\sqrt[m]{|z|}$, e tra una radice w_k e la successiva w_{k+1} intercorre sempre il medesimo angolo $\frac{\theta+2(k+1)\pi}{m}-\frac{\theta+2k\pi}{m}=\frac{2\pi}{m}$, da cui l'affermazione sulla disposizione delle radici nel piano di Gauss. □

Esercizio. **(1)** *Dati* $z=\sqrt{3}-i$ *e* $w=-2+3i$*, calcolare* z^n (per $0\le n\le 6$), w^5. **(2)** *Calcolare le radici quadrate e cubiche di* $z_1=-1$*, le quarte di* $z_2=-1-\sqrt{3}i$ *e le quinte di* $z_3=1-2i$.

Risoluzione. **(1)** Conviene esprimere z in forma trigonometrica, ovvero $z=2(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$: allora si ha la formula generale $z^n=2^n(\cos\frac{n\pi}{6}+i\sin\frac{n\pi}{6})$. Se $n=0,1$ si trova $z^0=2^0(\cos 0+i\sin 0)=1$ e $z^1=2^1(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})=z$, come previsto; poi, si ha $z^2=2^2(\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6})=4(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2(1+\sqrt{3}i)$, $z^3=8(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=8i$, $z^4=16(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})=16(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=8(-1+\sqrt{3}i)$, $z^5=32(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6})=32(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=16(-\sqrt{3}+i)$ e $z^6=64(\cos\pi+i\sin\pi)=-64=(8i)^2=(z^3)^2$. Si ha poi $w=\sqrt{13}(-\frac{2}{\sqrt{13}}+\frac{3}{\sqrt{13}}i)=\sqrt{13}(\cos\theta+i\sin\theta)$ con $\theta=\pi-\arcsin(\frac{3}{\sqrt{13}})$, da cui $w^5=13^{\frac{5}{2}}(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)$; ora, vale $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{13}$ e $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=-\frac{5}{13}$, da cui $\sin 4\theta=2\sin 2\theta\cos 2\theta=\frac{120}{169}$ e $\cos 4\theta=\cos^2 2\theta-\sin^2 2\theta=-\frac{119}{169}$, da cui $\cos 5\theta=\cos(\theta+4\theta)=\cos\theta\cos 4\theta-\sin\theta\sin 4\theta=-\frac{122}{13^{\frac{5}{2}}}$ e $\sin 5\theta=\sin(\theta+4\theta)=\sin\theta\cos 4\theta+\cos\theta\sin 4\theta=-\frac{597}{13^{\frac{5}{2}}}$: se ne ricava $w^5=-122-597i$. Come si vede, i conti con la forma trigonometrica non sono molto vantaggiosi se l'argomento non è uno degli archi notevoli: in questi casi, molto meglio trattare il numero complesso come un qualsiasi binomio nel calcolo letterale, ricorrendo alla formula del *binomio di Newton* $(A+B)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}A^{n-j}B^j$, ove $\binom{n}{j}=\frac{n!}{j!(n-j)!}$; otteniamo allora $w^5=(-2+3i)^5=(-2)^5+5(-2)^4(3i)^1+10(-2)^3(3i)^2+10(-2)^2(3i)^3+5(-2)^1(3i)^4+(3i)^5=$

$-32+240i+720-1080i-810+243i=-122-597i$. **(2)** Si ha $z_1=1(\cos\pi+i\sin\pi)$, dunque le radici quadrate sono $w_0=\sqrt{1}(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})=i$ e $w_1=\sqrt{1}(\cos\frac{\pi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{2})=-i$, mentre le cubiche sono $w_0=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$, $w_1=\sqrt{1}(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3})=-1$ e $w_2=\sqrt{1}(\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3})=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)$; le radici quarte di $z_2=-1-\sqrt{3}i=2(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$ sono $w_0=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}}{4})=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1+\sqrt{3}i)$, $w_1=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4})=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $w_2=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4})=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1+\sqrt{3}i)$ e $w_3=\sqrt[4]{2}(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4})=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$. Infine è $z_3=1-2i=\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i)=\sqrt{5}(\cos\theta+i\sin\theta)$ con $\theta=-\arcsin(\frac{2}{\sqrt{5}})$; la formula delle radici quinte dà allora $w_k=\sqrt[10]{5}(\cos(\frac{\theta+2k\pi}{5})+i\sin(\frac{\theta+2k\pi}{5}))$, per $k=0,1,2,3,4$.

Esponenziale, logaritmo e potenze nel campo complesso Introduciamo la funzione *esponenziale complesso*

Esponenziale complesso

$$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^\times,\qquad z=x+iy\ \mapsto\ \exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

(notiamo dunque che, dato z in forma algebrica, $\exp(z)$ risulta già in forma trigonometrica, essendo $|\exp z|=e^x$). Osserviamo le seguenti proprietà, di verifica immediata.

(1) Se $z=x\in\mathbb{R}$, vale $\exp x=e^x$, e in particolare $\exp 0=1$ (d'ora in poi, dunque, visto che non c'è nessuna ambiguità, scriveremo indifferentemente "$\exp z$" o "e^z").

(2) Se $z=iy\in i\mathbb{R}$, vale $e^{iy}=\cos y+i\sin y$ (un elemento di $\mathbb{U}$): d'ora in poi potremo dunque esprimere la forma polare/trigonometrica di un numero complesso z anche nella forma $z=|z|e^{i\theta}$, ove θ è l'argomento di z.

(3) Come nel caso reale, vale la proprietà d'omomorfismo $\exp(z+w)=(\exp z)(\exp w)$ per ogni $z,w\in\mathbb{C}$ (e dunque $\exp:(\mathbb{C},+)\to(\mathbb{C}^\times,\cdot\,)$ è un morfismo di gruppi).

(4) L'esponenziale complesso è suriettivo ma non è iniettivo (vedi la definizione di *logaritmo complesso* qui di seguito).

Esercizio. *Si calcoli l'esponenziale* (in forma algebrica e trigonometrica) *di $t=i$, $z=-1-i$ e $w=\frac{1}{3}-\pi i$.*

Risoluzione. Per il calcolo dell'esponenziale di un numero complesso conviene partire dalla sua forma algebrica: si ha $e^t=e^0(\cos 1+i\sin 1)=\cos 1+i\sin 1$, $e^z=e^{-1}(\cos(-1)+i\sin(-1))=\frac{\cos 1}{e}-i\frac{\sin 1}{e}$ e $e^w=e^{\frac{1}{3}}(\cos(-\pi)+i\sin(-\pi))=-\sqrt[3]{e}$.

Dato $w\in\mathbb{C}^\times$, il *logaritmo complesso* $\mathbf{log}\,w$ di w è definito come l'insieme dei numeri complessi il cui esponenziale dà w, ovvero

Logaritmo complesso

$$\mathbf{log}\,w=\exp^{-1}(w)=\{z\in\mathbb{C}:e^z=w\}.$$

Come è fatto tale insieme? Sia $w=|w|e^{i\theta}$, con $\theta\in]-\pi,\pi]$ argomento principale: se $z=x+iy\in\mathbf{log}\,w$, avremo $e^z=e^xe^{iy}=|w|e^{i\theta}$, da cui $e^x=|w|$ (ovvero $x=\log|w|$) e $y=\theta+2k\pi$ per qualche $k\in\mathbb{Z}$, e dunque possiamo scrivere

$$\mathbf{log}\,w=\log|w|+i(\theta+2\mathbb{Z}\pi)=\{\log|w|+i(\theta+2k\pi):k\in\mathbb{Z}\}$$

(si tratta di una famiglia di numeri complessi posta verticalmente sulla retta $\operatorname{Re}z=\log|w|$). Il numero ottenuto per $k=0$, ovvero $\log w:=\log|w|+i\theta$, viene detto *logaritmo* *principale* (oppure *determinazione principale del logaritmo*) di w: ad esempio, se $w \in \mathbb{R}_{>0}$ la determinazione principale del logaritmo di $w = t \in \mathbb{R}_{>0}$ è il già noto logaritmo reale $\log t$. Ribadiamo che, mentre $\mathbf{log}\, w$ rappresenta un insieme di numeri complessi, $\log w$ è un ben preciso numero complesso in $\mathbf{log}\, w$, e vale

Logaritmo principale

$$\mathbf{log}\, w = \log w \ + 2k\pi i \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Esercizio. *Si calcoli il logaritmo complesso dei numeri* 1*;* i*;* $-1-i$*;* $\frac{1}{3} - \pi i$.

Risoluzione. Contrariamente all'esponenziale, per il logaritmo è preferibile partire dalla forma trigonometrica, che nei casi in questione è $1 = e^{i0}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $-1-i = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ e $\frac{1}{3} - \pi i = \sqrt{\frac{1}{9} + \pi^2}\, e^{i\psi}$ con $\psi = -\arcsin(\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{9}+\pi^2}})$. Perciò $\mathbf{log}\, 1 = \{\log 0 + i(0 + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$ (in altre parole: $\exp w = 1$ se e solo se $w = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$), $\mathbf{log}\, i = \{\log 1 + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = \{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ (sottoinsieme dell'asse immaginario), $\mathbf{log}(-1-i) = \{\frac{1}{2}\log 2 + i(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$ e $\mathbf{log}(\frac{1}{3} - \pi i) = \{\frac{1}{2}\log(\frac{1}{9} + \pi^2) + i(-\arcsin(\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{9}+\pi^2}}) + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Dati $z, w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$, definiamo la *potenza complessa* w^z come il seguente sottoinsieme di $\mathbb{C}$:

Potenza complessa

$$\begin{aligned} w^z &= \exp(z\, \mathbf{log}\, w) \\ &= \exp(z \log w) \exp(2i\mathbb{Z}\pi z) = \{\exp(z \log w) \exp(2ik\pi z) : k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Il numero complesso $\exp(z \log w)$ (ove $\log w$ è il logaritmo principale di w) è detto *potenza principale* (oppure *determinazione principale* di w^z).

Potenza principale

Esercizio. *Si discuta* w^z *nei seguenti casi:* **(1)** $z \in \mathbb{Q}$*;* **(2)** $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$*;* **(3)** $z \in \mathbb{R}$*;* **(4)** $z \in i\mathbb{R}$*;* **(5)** $w = e$*;* **(6)** $w = z = i$*;* **(7)** $w = 3$*,* $z = \pi$*;* **(8)** $w = -2(\sqrt{3} + i)$*,* $z = -\frac{2}{5}$.

Risoluzione. **(1)** Sia $z = \frac{m}{n}$: allora $\exp(2i\mathbb{Z}\pi\frac{m}{n})$ è l'insieme delle n radici n-esime di 1, e dunque w^z ha esattamente n determinazioni diverse (che sono, guarda caso, le radici n-esime di w^m). **(2)** In questo caso w^z ha $\mathbb{Z}$-infinite determinazioni, perché $\exp(2i\mathbb{Z}\pi z) \simeq \mathbb{Z}$. **(3)** In questo caso $\exp(2i\mathbb{Z}\pi z) \subset \mathbb{U}$, dunque tutte le determinazioni hanno il medesimo modulo della potenza principale. **(4)** Qui $\exp(2i\mathbb{Z}\pi z) \subset \mathbb{R}_+$, dunque tutte le determinazioni sono multipli positivi della potenza principale. **(5)** $e^z = (\exp z)\exp(2i\mathbb{Z}\pi z)$ (l'esponenziale complesso $\exp z$ è solo la potenza principale di e^z). **(6)** Per quanto detto in (2) e (4), i^i avrà infinite determinazioni, tutte multipli positivi della principale: si ricava anzi $i^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\mathbb{Z}\pi}$. **(7)** Per (2) e (3), vi saranno infinite determinazioni col medesimo modulo, e dai conti si ricava $3^\pi \exp(2\pi^2 i\mathbb{Z})$ (ove 3^π indica la potenza reale, determinazione principale della 3^π complessa). **(8)** Per (1), w^z avrà 5 determinazioni, che saranno le radici quinte di $(-2(\sqrt{3}+i))^{-2} = \frac{1-\sqrt{3}i}{32} = \frac{1}{16}(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3})$: esse sono dunque $\frac{\sqrt[5]{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{5}))$ per $k = 0, 1, 2, 3, 4$. La potenza principale, ottenuta per $k = 0$, è dunque $\frac{\sqrt[5]{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt[5]{2}}{4}(1 + \sqrt{3}i)$.

Come visto, né il logaritmo complesso $\mathbf{log}\, w$ né la potenza complessa w^z sono *funzioni* di $w \in \mathbb{C}^\times$, nel senso che una funzione può dare *uno ed un solo* valore (e non parecchi) ad ogni elemento del suo dominio. Tuttavia, in casi come questo, si parla di "funzioni a valori multipli definite in $\mathbb{C}^\times$" o anche "funzioni ramificate su $\mathbb{C}^\times$": si sta pensando in realtà ad una funzione $t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, e l'insieme dei valori che la corrispondente funzione ramificata T associa a $w \in \mathbb{C}^\times$ è $T(w) = \{t(z) : \exp z = w\}$ (ovvero, $T(w)$ è l'insieme delle immagini, tramite t, dei vari logaritmi di w in $\mathbb{C}$). Ad esempio, per $T(w) = \mathbf{log}\, w$ si ha $t(\zeta) = \zeta$, mentre per $T(w) = w^z$ si ha $t(\zeta) = \exp(z\zeta)$.

Equazioni algebriche nel campo complesso Terminiamo enunciando (senza dimostrazione) l'essenziale proprietà di $\mathbb{C}$ che abbiamo presentato, all'inizio, come ragione per la sua costruzione.

Teorema 1.4.3. (Teorema fondamentale dell'Algebra) *Ogni polinomio non costante in una variabile a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

Cerchiamo di capire meglio questo teorema. Sia $n \in \mathbb{N}$, e consideriamo un polinomio

$$p(z) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \;=\; a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con coefficienti $a_j \in \mathbb{C}$ (per $j = 0, \ldots, n$) e $a_n \neq 0$ (dunque $p(z)$ non è costante), e sia $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ una radice di $p(z)$ in $\mathbb{C}$; grazie a Ruffini possiamo dividere $p(z)$ per il fattore $(z - \alpha_1)$ ottenendo $p(z) = (z - \alpha_1)q(z)$, ove $q(z)$ è il polinomio quoziente, di grado $n - 1$. Se $n - 1 = 0$, $q(z)$ è costante ed abbiamo terminato; altrimenti, possiamo applicare ancora il teorema a $q(z)$, e poi via via ancora ai quozienti: alla fine arriveremo a scrivere $p(z) = a_n \prod_{j=1}^{n}(z - \alpha_j) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$. Può certamente accadere che non tutti gli α_j siano diversi gli uni dagli altri[47] e dunque, considerando solo la famiglia $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ (con $1 \leq d \leq n$) delle radici distinte, radunando i fattori uguali potremo scrivere

$$p(z) = a_n(z - \alpha_1)^{m_1} \cdots (z - \alpha_d)^{m_d}$$

ove i numeri naturali $m_1, \ldots, m_d$ (detti rispettivamente *molteplicità* delle radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$) **Molteplicità** soddisfano $\sum_{j=1}^{d} m_j = n$. Possiamo dunque affermare che *se $n \in \mathbb{N}$, ogni polinomio in una variabile di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$ ammette n radici in $\mathbb{C}$, ove ogni radice distinta venga però contata un numero di volte pari alla sua molteplicità*: ne consegue che, in $\mathbb{C}$, i soli polinomi non costanti irriducibili sono quelli di primo grado.

Come abbiamo già notato, il corpo dei reali $\mathbb{R}$ non gode di questa proprietà. Tuttavia, poniamo di avere un polinomio $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ (ove $a_n \neq 0$) che sia *multiplo costante di un polinomio a coefficienti reali*, ovvero che $\frac{p(z)}{a_n}$ sia un polinomio a coefficienti reali: a meno di dividere per a_n, dunque, possiamo supporre da subito che tutti i coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ siano *reali*. Cosa si potrà dire delle sue soluzioni? Iniziamo con l'osservare che *se $\beta \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(z)$, lo sarà anche la coniugata $\overline{\beta}$*, perché $p(\overline{\beta}) = \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{\beta}^j = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j \beta^j} = \overline{0} = 0$ (ove nella seconda uguaglianza si sono usate le proprietà del coniugio ed il fatto che i coefficienti sono reali): pertanto, le radici non reali di $p(z)$ "vengono sempre a coppie" fatte di numeri coniugati. Ora, dividendo $p(z)$ per $(z-\beta)(z-\overline{\beta}) = z^2 - 2(\operatorname{Re}\beta)z + |\beta|^2$ (polinomio di secondo grado a coefficienti reali), troveremo ancora un quoziente a coefficienti reali cui

[47] Come caso estremo si pensi a $p(z) = (z - \alpha)^n$, in cui tutte le radici sono uguali ad α.

si potrà applicare lo stesso ragionamento: in particolare, è chiaro che alla fine β e $\overline{\beta}$ avranno la stessa molteplicità. Abbiamo dunque dimostrato il seguente

Corollario 1.4.4. *Sia $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ un polinomio a coefficienti reali, con r radici reali $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ di molteplicità $m_1, \dots, m_r$, ed s coppie di radici non reali e coniugate $\beta_1, \overline{\beta_1}, \dots, \beta_s, \overline{\beta_s}$ di molteplicità $m'_1, \dots, m'_s$* (con $r, s \geq 0$ e $r + 2s = n$)*: allora*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{r} (z - \alpha_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{s} (z^2 - 2(\operatorname{Re}\beta_k)z + |\beta_k|^2)^{m'_k}$$

è la decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili con coefficienti in $\mathbb{R}$.
In particolare: (1) *i polinomi a coefficienti reali irriducibili in $\mathbb{R}$ hanno grado al più due;* (2) *tutti i polinomi a coefficienti reali di grado dispari hanno almeno una radice reale.*

Esercizio. **(1)** *Trovare le radici dei polinomi $p(z) = (1-i)z^2 - 3iz - (1+2i)$ e $q(z) = 2z^2 - 2z + 7$.* **(2)** *Trovare le radici del polinomio $p(z) = z^3 + z + 10$, sapendo che una di esse è $1 - 2i$. Scrivere la decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$.* **(3)** *Trovare le radici del polinomio $p(z) = 4z^4 + 9$ e scrivere la decomposizione di $p(z)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{C}$.*

Risoluzione. **(1)** Dividendolo per $a_n = 1 - i$, si osserva che $p(z)$ non è multiplo di un polinomio a coefficienti reali: dunque di certo le due radici di $p(z)$ in $\mathbb{C}$ non saranno coniugate, e non potranno nemmeno essere entrambe reali. La formula risolutiva è la solita delle equazioni di secondo grado: $z_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{(-3i)^2 - 4(1-i)(-1-2i)}}{2(1-i)} = \frac{1}{2}\frac{1+i}{2}(3i \pm \sqrt{3+4i})$, ove stavolta l'espressione "$\pm\sqrt{3+4i}$" sta ad indicare le due radici quadrate del numero complesso $w = 3 + 4i$. Un calcolo diretto: da $(x+iy)^2 = w$ si ricava $x^2 - y^2 + (2xy)i = 3 + 4i$, ovvero $xy = 2$ e $x^2 - y^2 = 3$, da cui $(x, y) = \pm(2, 1)$: le radici di w sono $x + iy = \pm(2 + i)$. (Il metodo moltiplicativo per trovare le radici di w qui è meno vantaggioso, ma vediamolo comunque: si ha $w = 5(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i) = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$ con $\theta = \arccos\frac{3}{5}$, da cui le radici quadrate sono $w_0 = \sqrt{5}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})$ e $w_1 = -w_0$; dalle formule di bisezione si ricava $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, da cui $w_0 = 2+i$.) Tornando alle soluzioni, si trova dunque $z_{1,2} = \frac{1}{2}\frac{1+i}{2}(3i \pm (2+i))$, ovvero $z_1 = \frac{-1+3i}{2}$ e $z_2 = -1$. L'altro polinomio $q(z)$ è invece a coefficienti reali, dunque le sue radici saranno o entrambe reali o complesse coniugate l'una dell'altra. Il conto mostra subito che accade la seconda eventualità: infatti $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 2 \cdot 7}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}i}{2}$. **(2)** Il polinomio è a coefficienti reali, e di grado dispari: dunque ammetterà senz'altro una radice reale, e le altre due saranno o entrambe reali o complesse coniugate l'una dell'altra. L'informazione aggiuntiva ci dice che accade la seconda eventualità: dunque le altre due radici saranno $1 - 2i$ e $\overline{1-2i} = 1 + 2i$. Dividendo $p(z)$ per $(z - (1-2i))(z - (1+2i)) = z^2 - 2z + 5$ si ottiene $z + 2$, da cui le decomposizioni cercate sono $p(z) = (z+2)(z - (1-2i))(z - (1+2i))$ (in $\mathbb{C}$) e $p(z) = (z+2)(z^2 - 2z + 5)$ (in $\mathbb{R}$); la radice reale, di cui si era prevista l'esistenza, è -2. **(3)** Le radici di $p(z)$ sono le radici quarte di $-\frac{9}{4}$, ovvero i numeri complessi a due a due coniugati $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)$, $w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1+i)$, $w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(-1-i) = \overline{w_1}$ e $w_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i) = \overline{w_0}$. Le decomposizioni sono $4(z - w_0)(z - \overline{w_0})(z - w_1)(z - \overline{w_1})$ (in $\mathbb{C}$) e $4(z^2 - 2\operatorname{Re}(w_0)z + |w_0|^2)(z^2 - 2\operatorname{Re}(w_1)z + |w_1|^2) = 4(z^2 - \sqrt{3}z + \frac{3}{2})(z^2 + \sqrt{3}z + \frac{3}{2}) = (2z^2 - 2\sqrt{3}z + 3)(2z^2 + 2\sqrt{3}z + 3)$ (in $\mathbb{R}$).

Esercizio. *Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}^3$.* (i) *f è iniettiva? È suriettiva?* (ii) *Determinare $f(A)$ e $f^{-1}(A)$, ove $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.* (iii) *Determinare $f(-8)$ e $f^{-1}(-8)$.* (iv) *Descrivere $S = \{t(1+i) : t \in \mathbb{R}_{>0}\}$, e calcolare $f(S)$ e $f^{-1}(S)$.*

Risoluzione. (i) Per l'iniettività bisognerebbe dimostrare che $f(z_1) = f(z_2)$ implica $z_1 = z_2$: ma $f(z_1) = f(z_2)$ significa $\overline{z_1}^3 = \overline{z_2}^3$, ovvero ${z_1}^3 = {z_2}^3$, e ciò non implica affatto che $z_1 = z_2$ (ogni numero complesso non nullo ha tre distinte radici cubiche). Dunque f non è iniettiva. Per la suriettività bisognerebbe dimostrare che per ogni $w \in \mathbb{C}$ (codominio) esiste $z \in \mathbb{C}$ (dominio) tale che $f(z) = w$, cioè che l'equazione $\overline{z}^3 = w$ ha sempre soluzione in z: e ciò è vero, perché essa equivale a $z^3 = \overline{w}$, e dunque se $w = 0$ c'è la soluzione $z = 0$, mentre se $w \neq 0$ essa è soddisfatta dalle tre radici cubiche di $\overline{w}$. Dunque f è suriettiva. (ii) A è il semipiano alla destra dell'asse immaginario (escluso). Un numero $w \in \mathbb{C}$ (codominio) appartiene a $f(A)$ se e solo se $f(z) = \overline{z}^3 = w$ per qualche $z \in A$, ovvero per qualche z con $\operatorname{Re} z > 0$. Certo sarà $w \neq 0$ (perché $f(z) = 0$ solo per $z = 0$, e $0 \notin A$); scritti allora $w = |w|e^{i\theta}$ e $z = |z|e^{i\psi}$, la condizione $f(z) = w$ si scrive $|z|^3 e^{-3i\psi} = |w|e^{i\theta}$, ed equivale dunque a $|z| = \sqrt[3]{|w|}$ e $\psi = -\frac{\theta}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Imponendo che $z \in A$, si ottiene che $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \psi < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, e perciò si ricava $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < -\frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero $-\frac{3\pi}{2} + 6k\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} + 6k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Ciò non dà alcuna restrizione per $w \neq 0$ (ad esempio, per $k = 0$ si ottiene $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$, che copre tutto $\mathbb{C}^\times$). Dunque $f(A) = \mathbb{C}^\times$. Invece, $z \in \mathbb{C}$ (dominio) sta in $f^{-1}(A)$ se e solo se $f(z) \in A$, ovvero se e solo se $\operatorname{Re}(\overline{z}^3) > 0$. Poiché $z \neq 0$ (perché $f(0) = 0 \notin A$), scriviamo $z = |z|e^{i\theta}$: si ha allora $\operatorname{Re}(\overline{z}^3) = \operatorname{Re}(|z|^3 e^{-3i\theta}) = |z|^3 \cos(-3\theta) = |z|^3 \cos 3\theta$, dunque la condizione diventa $\cos 3\theta > 0$, ovvero $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 3\theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ovvero $-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ (con $k \in \mathbb{Z}$): facendo variare $\theta \in [-\pi, \pi]$, si ottiene perciò $f^{-1}(A) = \{z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times : -\frac{5\pi}{6} < \theta < -\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$ o $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{6}\}$, che è una "elica di ventilatore" unione di tre spicchi del piano di Gauss delimitati da rette uscenti da 0 (escluso). (iii) Vale $f(-8) = (\overline{-8})^3 = (-8)^3 = -512$; la condizione $f(z) = \overline{z}^3 = -8$ equivale a $z^3 = -8$, da cui (cercando le radici cubiche) si ottiene $z = -2, 1 \pm \sqrt{3}i$: dunque $f^{-1}(-8) = \{-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i\}$. (iv) Il punto generico di S si scrive (già in forma trigonometrica) come $z_t = \sqrt{2}te^{i\frac{\pi}{4}}$ al variare di $t > 0$: dunque S è la semiretta nel piano di Gauss uscente da 0 (escluso) e passante per $1 + i$. Vale $f(z_t) = 2\sqrt{2}t^3 e^{-3i\frac{\pi}{4}}$, ed al variare di $t > 0$ viene descritta la semiretta uscente da 0 (escluso) e passante per $-1 - i$: dunque $f(S) = \{t(-1 - i) : t > 0\}$. Preso poi un $z \in \mathbb{C}$ (dominio), si cerca la condizione affinché $f(z) \in S$. Certo è $z \neq 0$ (perché $f(0) = 0 \notin S$); scritto $z = |z|e^{i\theta}$, la condizione diventa $|z|^3 e^{-3i\theta} \in S$, e questo si verifica se e solo se $-3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $\theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Facendo variare $\theta \in [-\pi, \pi]$, si ottiene perciò $f^{-1}(S) = \{z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^\times : \theta = -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{2}\}$, ovvero l'unione di tre semirette uscenti da 0 (escluso).