Numeri complessi e Teorema Fond. dell'Algebra

Un'equazione polinomiale a coefficienti reali può non avere soluzioni reali.

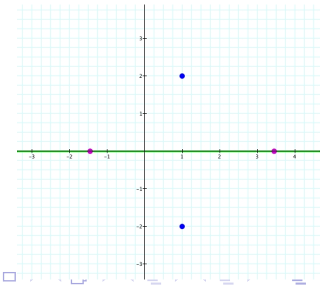
Esempi. $x^4 - 4 = 0$ e $x^2 - 2x - 5 = 0$ ne hanno due ciascuna, mentre $x^4 + 4 = 0$ e $x^2 - 2x + 5 = 0$ non ne hanno.

Per ovviare al problema, si allarga il corpo $\mathbb{R}$ a un corpo $\mathbb{C}$ **algebricamente chiuso**.

> TFA: un'equazione polinomiale di grado n a coefficienti in $\mathbb{C}$ **ammette esattamente n soluzioni in $\mathbb{C}$** (se contate con la loro molteplicità).

Sorgono naturalmente i seguenti problemi.

1. Come sono fatti i numeri complessi? Come riconoscere, tra essi, i vecchi reali?
2. Definire in $\mathbb{C}$ operazioni $+, \cdot$ che lo rendano corpo e non stravolgano quelle di $\mathbb{R}$.
3. Dimostrare effettivamente la chiusura algebrica di $\mathbb{C}$.



1. Un numero complesso è $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ (*parte reale* e *immaginaria*). I vecchi numeri reali sono i numeri complessi con parte immaginaria $b = 0$.
2. Le operazioni in $\mathbb{C}$ sono $\begin{cases} (a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \\ (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b) \end{cases}$ (come i polinomi, con $i^2 = -1$). • Su $\mathbb{R}$ esse coincidono con quelle di prima.
3. Non dimostreremo il TFA. Tuttavia vedremo che ogni numero complesso $w \neq 0$ ha n radici n-esime distinte (è come risolvere l'equazione $z^n - w = 0$, di grado n).
   - Le quattro soluzioni di $x^4 \mp 4 = 0$ sono risp. $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,i, -\sqrt{2}\,i\}$ e $\{1+i, 1-i, -1+i, -1-i\}$ (ovvero le quattro radici quarte di 4 e di -4 !)
   - Le soluzioni di $x^2 - 2x \mp 5 = 0$ sono $\{1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6}\}$ e $\{1+2i, 1-2i\}$.

Numeri complessi: da Erone a Gauss

- Di radici quadrate di numeri negativi si parla da tempo: già lo fece Erone di Alessandria (I sec. aC), per il volume di sezioni di piramidi.
- Nel seguito esse tornarono come utili ma misteriosi artifici di conto. Tale uso disinvolto raggiunse però livelli imbarazzanti nel XVI sec. con la scoperta (attribuibile a Dal Ferro, Tartaglia, Cardano) della formula di risoluzione per radicali delle equazioni di terzo grado, da cui ne discende una per il quarto (dal quinto in poi una tale formula non esiste, come provato da Abel e Galois verso il 1830). ▸ Formula
- Lo stupore per l'intrattabilità della formula proprio nel caso "amico" di tre radici reali distinte (Cardano, di fronte a un enigmatico $\sqrt{\Delta}$ con $\Delta < 0$, chiama questo caso *irriducibile*) causò uno sforzo di comprensione dell'oggetto misterioso $i = \sqrt{-1}$. Dopo le intuizioni di Bombelli sull'algebra di $\pm i$ e la lenta digestione del XVII secolo (Cartesio usa per primo il termine *numeri immaginari*), è nel XVIII sec. con de Moivre e Eulero che si inizia a sistematizzare la teoria. Nel 1799, dopo vari tentativi (Eulero, Lagrange, Laplace...), Gauss dimostra il TFA; ma è solo dopo la rappresentazione geometrica, completata da Argand e divulgata da Gauss (1832), Cauchy e Abel che i complessi vengono accettati dalla comunità matematica.




La soluzione per radicali delle equazioni di terzo grado

- Si abbia l'equazione $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ ove $a, b, c \in \mathbb{R}$ (o da subito $\in \mathbb{C}$).
- Con $x = t - \frac{1}{3}a$ si ha $t^3 + 3pt - 2q = 0$, ove $(p, q) = (-\frac{a^2-3b}{9}, -\frac{2a^3-9ab+27c}{54})$.

Formula di risoluzione delle equazioni di terzo grado

Le soluzioni di $t^3 + 3pt - 2q = 0$ sono $\sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}$, ove $\Delta = q^2 + p^3$.

- Cerchiamo di spiegare il procedimento, e con esso il significato della formula.

1. Cercare le tre radici cubiche u_1, u_2, u_3 di $q + \sqrt{\Delta}$ e le tre v_1, v_2, v_3 di $q - \sqrt{\Delta}$ (ove $\sqrt{\Delta}$ è una radice quadrata di Δ);
2. Esistono esattamente tre coppie (u_{j_ℓ}, v_{k_ℓ}) tali che $u_{j_\ell} v_{k_\ell} = -p$; le soluzioni sono $t_\ell = u_{j_\ell} + v_{k_\ell}$ (con $\ell = 1, 2, 3$).

Ebbene, **il caso di tre soluzioni** t_1, t_2, t_3 **reali e distinte è quello in cui** $\Delta < 0$:
pur essendo un problema reale con soluzioni reali, si deve passare per $\mathbb{C}$!

Esempio. Le soluzioni di $t^3 - 12t = 0$ sono chiaramente $t_1 = 0$, $t_2 = 2\sqrt{3}$ e $t_3 = -2\sqrt{3}$ (tutte reali). Dalla formula si ha $(p, q) = (-4, 0)$, $\Delta = -64$ e $\pm\sqrt{\Delta} = \pm 8i$. Le radici cubiche di $8i$ sono $\{u_1 = \sqrt{3} + i,\ u_2 = -\sqrt{3} + i,\ u_3 = -2i\}$, quelle di $-8i$ sono $\{v_1 = 2i,\ v_2 = -\sqrt{3} - i,\ v_3 = \sqrt{3} - i\}$; le tre coppie (u, v) il cui prodotto dà $-p = 4$ sono (u_1, v_3), (u_2, v_2) e (u_3, v_1), e si ritrova $u_1 + v_3 = t_2$, $u_2 + v_2 = t_3$ e $u_3 + v_1 = t_1$.