Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica sui numeri complessi

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

lunedì 15 dicembre 2014

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 22/12). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 20 pt. **Ex. 2:** 15 pt. **Ex. 3:** 25 pt. **Ex. 4:** 25 pt. **Ex. 5:** 15 pt. **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

(1) Dato $w = -1 + i$, rispondere ai seguenti quesiti.

- (i) Determinare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $\overline{z}w \in \mathbb{R}$ e $|z| = 3$.
- (ii) Quali sono i numeri immaginari puri che distano almeno 4 da w?
- (iii) Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |w - z| < 2,\ 2\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z \leq 1\}$.
- (iv) Qual'è il numero complesso z tale che $\frac{w+3}{z-i} = 3 + 4i$?
- (v) Scrivere in forma algebrica i numeri $u_1 = 3\overline{(w + 1)} - 2i$, $u_2 = -3iw^2$ e $u_3 = \frac{|w|^2+i}{w^3-2}$, e determinare le loro radici quadrate.

(2) Risolvere le seguenti equazioni nella variabile complessa z: (i) $\overline{z}^2 = 1 - iz$; (ii) $\left|\dfrac{1 - 3z}{i + \overline{z}}\right| = 3$.

(3) Si consideri la funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $f(z) = \overline{z}^2 - i$.

- (i) La funzione f è iniettiva? Suriettiva?
- (ii) Dato $w = -5 - 13i$, calcolare $f(w)$ e la fibra $f^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = w\}$.
- (iii) Si dimostri che la restrizione di f a $A = \mathbb{R}_{>0}$ (semiasse reale positivo) è iniettiva, calcolare l'immagine $B = f(A)$ e determinare l'inversa $f^{-1} : B \to A$.
- (iv) Posto $K = \{iy : y < 0\}$ (semiasse immaginario inferiore), calcolare l'immagine $f(K) = \{f(z) : z \in K\}$ e l'antiimmagine $f^{-1}(K) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in K\}$.

(4) Siano $\alpha = -8(i\sqrt{3} + 1)$, $\beta = -3\sqrt{2}(1 - i)$, $\gamma = \frac{6(2i+1)}{i-2}$ e $\delta = 3 - 4i$.

- (i) Scrivere α, β, γ e δ in forma trigonometrica.
- (ii) Calcolare le radici quarte di α e le radici cubiche di γ.
- (iii) Descrivere le potenze intere di β e δ.
- (iv) Sia $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione esponenziale $\exp(z) = e^z$. Descrivere i valori di exp in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; descrivere anche le immagini tramite exp dei sottoinsiemi $i\mathbb{R}_{<0} = \{it \in i\mathbb{R} : t < 0\}$, $\mathbb{R}_{\leq -3} = \{t \in \mathbb{R} : t \leq -3\}$ e $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 2,\ 1 < \mathrm{Im}\, z < \pi\}$.

(5) (i) Risolvere l'equazione $p(z) = 6z^6 - 3z^5 + 14z^4 + 44z^3 + 4z^2 + 15z = 0$ sapendo che due sue soluzioni sono $-\frac{3}{2}$ e $1 - 2i$. Come si decompone il polinomio $p(z)$ in fattori irriducibili su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$?

(ii) Sia data l'equazione $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2\alpha = 0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{C}$ vi è una soluzione doppia? Si risolva poi l'equazione per $\alpha = 1 + i$.

Soluzioni.

(1) (i) Posto $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$ si ha $\overline{z}w = (x - iy)(-1 + i) = (-x + y) + i(x + y)$, e la condizione $\overline{z}w \in \mathbb{R}$ equivale a $\operatorname{Im}(\overline{z}w) = x + y = 0$; d'altra parte, la condizione $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 3$ dà $x^2 + y^2 = 9$. Il sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$ ha soluzioni $\pm(\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2})$: pertanto $z = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}(1 - i)$.

(ii) La distanza di $z = iy$ (con $y \in \mathbb{R}$) da $w = -1 + i$ è data da $|z - w| = |iy - (-1 + i)| = |1 + i(y - 1)| = \sqrt{1^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{y^2 - 2y + 2}$: la condizione è allora $\sqrt{y^2 - 2y + 2} \geq 4$, ovvero $y^2 - 2y + 2 \geq 16$, da cui $y^2 - 2y - 14 \geq 0$, soddisfatta per $y \leq -\sqrt{15} + 1$ oppure $y > \sqrt{15} + 1$. Il luogo è formato pertanto da tutti i punti iy dell'asse immaginario con $y \leq -\sqrt{15} + 1$ oppure $y > \sqrt{15} + 1$.

(iii) Nel piano di Gauss, la condizione $|w - z| < 2$ descrive i numeri z che distano meno di 2 da $w = -1 + i$, ovvero quelli che stanno dentro la circonferenza di raggio 2 centrata in w; d'altra parte, la condizione $2\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \leq 1$ descrive i numeri z che stanno sotto o sulla retta $y = -2x + 1$ (con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$). L'insieme cercato è ottenuto intersecando le due zone.

(iv) Ponendo $z = x + iy$ si ha $\frac{w+3}{z-i} = \frac{2+i}{x+i(y-1)} = 3 + 4i$, da cui $2 + i = (3 + 4i)(x + i(y - 1)) = (3x - 4y + 4) + i(4x + 3y - 3)$, che equivale al sistema $\begin{cases} 3x - 4y + 4 = 2 \\ 4x + 3y - 3 = 1 \end{cases}$, con soluzione unica $(x, y) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$. Si ha perciò $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = \frac{2}{5}(1 + 2i)$.
L'equazione può essere risolta alternativamente anche con conti diretti, senza ricorrere a parte reale e immaginaria: da $\frac{w+3}{z-i} = \frac{2+i}{z-i} = 3 + 4i$, passando ai reciproci, si ricava $\frac{z-i}{2+i} = \frac{1}{3+4i}$, da cui $z - i = \frac{2+i}{3+4i}$, da cui $z = i + \frac{2+i}{3+4i} = \frac{3i-4+2+i}{3+4i} = \frac{-2+4i}{3+4i} = \frac{(-2+4i)(3-4i)}{25} = \frac{-6+8i+12i+16}{25} = \frac{10+20i}{25} = \frac{2}{5}(1 + 2i)$.

(v) Si ha $u_1 = 3\overline{(w + 1)} - 2i = 3\overline{i} - 2i = -3i - 2i = -5i$; $u_2 = -3iw^2 = -3i(1 - 1 - 2i) = -6$; $u_3 = \frac{|w|^2+i}{w^3-2} = \frac{2+i}{-1+3i-3i^2+i^3-2} = \frac{2+i}{2i} = \frac{(2+i)(-i)}{2} = \frac{1-2i}{2}$. Se $w = x + iy$ è radice quadrata di u_1 deve essere $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -5 \end{cases}$, con soluzioni $\pm(\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2})$: dunque $w = \pm\frac{\sqrt{10}}{2}(1 - i)$. Le radici quadrate di u_2 sono facilmente $\pm i\sqrt{6}$. Infine, le radici quadrate $w = x + iy$ di u_3 devono dare $\begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = -1 \end{cases}$, con soluzioni $w = \pm(\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2} - \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}i)$.

(2) (i) Posto $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, da $\overline{z}^2 = 1 - iz$ si trova $(x - iy)^2 = 1 - i(x + iy)$, ovvero $(x^2 - y^2) + i(-2xy) = (y + 1) + i(-x)$, da cui il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = y + 1 \\ -2xy = -x \end{cases}$. Dalla seconda equazione si ricava $x(1 - 2y) = 0$: se $x = 0$, dalla prima si ricava $y^2 + y + 1 = 0$, priva di soluzioni reali; se invece $y = \frac{1}{2}$, dalla prima si ricava $x^2 = y^2 + y + 1 = \frac{7}{4}$, da cui $x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Le soluzioni sono dunque $z_1 = \frac{\sqrt{7}+i}{2}$ e $z_2 = \frac{-\sqrt{7}+i}{2}$.

(ii) L'equazione ha senso quando $i + \overline{z} \neq 0$, cioè $\overline{z} \neq -i$, cioè $z \neq i$. Si ha $\left|\frac{1-3z}{i+\overline{z}}\right| = \frac{|1-3z|}{|i+\overline{z}|} = 3$, da cui $|1 - 3z| = 3\,|i + \overline{z}|$. Posto ancora $z = x + iy$, ciò significa $|(1 - 3x) + i(-3y)| = 3\,|x + i(1 - y)|$, ovvero $(1 - 3x)^2 + 9y^2 = 9(x^2 + (1 - y)^2)$, da cui $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$. Le soluzioni sono dunque tutti e soli i numeri complessi $z = x + iy$ che, sul piano di Gauss, stanno sulla retta $y = \frac{x}{3} + \frac{4}{9}$.

(3) (i) Da $f(z_1) = f(z_2)$ si ricava $\overline{z_1}^2 - i = \overline{z_2}^2 - i$, da cui $\overline{z_1}^2 = \overline{z_2}^2$, da cui ${z_1}^2 = {z_2}^2$: ma ciò non implica che $z_1 = z_2$ (infatti potrebbe essere anche $z_1 = -z_2$). Dunque f non è iniettiva. Dato invece un qualsiasi $w \in \mathbb{C}$, l'equazione $f(z) = w$ ha sempre soluzioni z, perché essa equivale a $\overline{z}^2 = w + i$, ovvero $z^2 = \overline{w + i}$, e basta ricordare che ogni numero complesso ha radici quadrate. Dunque f è suriettiva.

(ii) Si ha $f(w) = \overline{(-5 - 13i)}^2 - i = (-5 + 13i)^2 - i = 25 - 169 - 130i - i = -144 - 131i$. Da $f(z) = \overline{z}^2 - i = w$ si ricava invece $\overline{z}^2 = w + i = -5 - 12i$, ovvero $z^2 = -5 + 12i$: in altre parole, la fibra $f^{-1}(w)$ è formata dalle due radici quadrate del numero $-5 + 12i$. Se $(x + iy)^2 = -5 + 12i$ si deve avere $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 12 \end{cases}$, che ha soluzioni $(x, y) = \pm(2, 3)$: pertanto $f^{-1}(w) = \{\pm(2 + 3i)\}$.

(iii) Prendiamo $t_1, t_2 > 0$ e supponiamo che $f(t_1) = f(t_2)$: ciò significa che $\overline{t_1}^2 - i = \overline{t_2}^2 - i$, ovvero ${t_1}^2 = {t_2}^2$, da cui $t_1 = t_2$. Dunque la restrizione di f a $A = \mathbb{R}_{>0}$ è iniettiva. Si ha poi $B = f(A) = \{f(t) : t > 0\} = \{\bar{t}^2 - i : t > 0\} = \{t^2 - i : t > 0\} = \{u - i : u > 0\}$: pertanto B è la semiretta orizzontale nel piano di Gauss dei numeri con parte reale positiva e parte immaginaria uguale a -1. Preso $u - i \in B$, da $f(t) = t^2 - i = u - i$ si ricava $u = t^2$, da cui $t = \sqrt{u}$: dunque la funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ è data da $f^{-1}(u - i) = \sqrt{u}$.

(iv) Se $K = \{iy : y < 0\}$ si ha $f(K) = \{f(iy) : y < 0\} = \{\overline{(iy)}^2 - i : y < 0\} = \{(-iy)^2 - i : y < 0\} = \{-y^2 - i : y < 0\} = \{-v - i : v > 0\}$: dunque $f(K)$ è la semiretta orizzontale nel piano di Gauss dei numeri con parte reale negativa e parte immaginaria uguale a -1.
Si ha infine $f^{-1}(K) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) \in K\} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^2 - i = iv \text{ con } v < 0\} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}^2 = iv \text{ con } v < 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z^2 = iv \text{ con } v > -1\}$. Se $z = x + iy$, la condizione "$z^2 = iv$ con $v > -1$" equivale al sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy > -1 \end{cases}$. La prima equazione dà $x = \pm y$: se $x = y$, la seconda diventa $x^2 > -\frac{1}{2}$ (sempre vera), mentre se $x = -y$ diventa $-x^2 > -\frac{1}{2}$, verificata per $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pertanto, l'antiimmagine $f^{-1}(K)$ è data dai numeri complessi che, sul piano di Gauss con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, giacciono su tutta la bisettrice $y = x$ oppure sul segmento della bisettrice $y = -x$ con $|x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(4) (i) Si ha $|\alpha| = 8|i\sqrt{3} + 1| = 16$, da cui $\alpha = 16(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Si ha poi $|\beta| = 3\sqrt{2}|1 - i| = 6$, da cui $\beta = 6(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 6\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Vale $\gamma = \frac{6(2i+1)}{i-2} = \frac{6(2i+1)(-2-i)}{5} = \frac{6(-5i)}{5} = -6i$, da cui $\gamma = 6\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Infine, si ha $|\delta| = 5$ da cui $\delta = 5(\frac{3}{5} + i(-\frac{4}{5})) = 5\,e^{i\theta}$ con $\cos\theta = \frac{3}{5}$ e $\sin\theta = -\frac{4}{5}$: sarà ad esempio $\theta = -\arcsin\frac{4}{5}$.

(ii) Le radici quarte di $\alpha = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$ sono date da $w_k = \sqrt[4]{16}\,e^{i(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2})}$ con $k = 0, 1, 2, 3$, dunque $w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$, $w_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$, $w_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = -w_0$ e $w_3 = 2e^{i\frac{11\pi}{6}} = -w_1$. Le radici cubiche di $\gamma = 6\,e^{i\frac{3\pi}{2}}$ sono $z_k = \sqrt[3]{6}\,e^{i(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3})}$ con $k = 0, 1, 2$, dunque $z_0 = \sqrt[3]{6}\,e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt[3]{6}\,i$, $z_1 = \sqrt[3]{6}\,e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt[3]{6}}{2}(\sqrt{3} + i)$ e $z_2 = \sqrt[3]{6}\,e^{i\frac{11\pi}{6}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}(\sqrt{3} - i)$.

(iii) Se $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\beta^k = 6^k\,e^{i\frac{3k\pi}{4}}$: si tratta di un numero di modulo 6^k ed argomento $\frac{3k\pi}{4}$, che sta sulle bisettrici per k dispari, sull'asse reale per k pari e multiplo di 4 e sull'asse immaginario per k pari ma non multiplo di 4. D'altra parte si ha $\delta^k = 5^k e^{ik\theta}$ con $\theta = -\arcsin\frac{4}{5}$: si tratta di un numero di modulo 5^k ed argomento $k\theta$, e quest'ultimo non assume valori notevoli come nel caso precedente. Si noti che i moduli delle potenze tendono a 0^+ per $k \to -\infty$, e a $+\infty$ per $k \to +\infty$.

(iv) Ricordiamo che se $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$ allora $e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$: dunque e^α ha modulo e^{-8} e argomento $-8\sqrt{3} \sim -13{,}8$ radianti (si tratta di un angolo nel terzo quadrante); e^β ha modulo $e^{-3\sqrt{2}}$ e argomento $3\sqrt{2} \sim 4{,}4$ radianti (un po' meno di $\frac{3\pi}{2}$); e^γ ha modulo 1 e argomento -6 (a meno di un giro, corrisponde circa a $\frac{\pi}{12}$); infine, e^δ ha modulo e^3 e argomento -4 radianti (a meno di un giro, corrisponde circa a $\frac{3\pi}{4}$). L'immagine di $i\mathbb{R}_{<0}$ è $\{e^{it} : t < 0\}$: si ottiene tutto l'insieme $\mathbb{U} = \{z : |z| = 1\}$ dei numeri complessi unitari. L'immagine di $\mathbb{R}_{\le -3}$ è $\{e^t : t \le -3\} =]0, \frac{1}{e^3}]$, e quella del rettangolo $Q = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 2,\ 1 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ è $\{e^z = e^x e^{iy} : |x| < 2,\ 1 < y < \pi\}$, il "ventaglio" dei numeri di modulo compreso tra $\frac{1}{e^2}$ e e^2, e argomento compreso tra 1 e π radianti.

(5) (i) Una soluzione ovvia di $p(z) = 6z^6 - 3z^5 + 14z^4 + 44z^3 + 4z^2 + 15z = 0$ è $z = 0$; un'altra, indicata nel testo, è $z = -\frac{3}{2}$; inoltre, poiché $p(z)$ ha coefficienti reali, se $1 - 2i$ è soluzione tale è anche $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$. Dunque $p(z)$ sarà divisibile per $q(z) = z(2z + 3)(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z(2z + 3)(z^2 - 2z + 5)$: in effetti, dalla divisione euclidea di $p(z)$ per $q(z)$ si ottiene quoziente $3z^2 + 1$ e resto zero. Le ultime due soluzioni di $p(z) = 0$ sono date perciò da $3z^2 + 1 = 0$, ovvero $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\,i$. La decomposizione di $p(z)$ su $\mathbb{C}$ è data da $p(z) = 6(z - 0)(z - (-\frac{3}{2}))(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i))(z - \frac{\sqrt{3}}{3}i)(z - (-\frac{\sqrt{3}}{3}i)) = z(2z + 3)(z - 1 - 2i)(z - 1 + 2i)(\sqrt{3}\,z + i)(\sqrt{3}\,z - i)$; quella su $\mathbb{R}$ è data da $p(z) = z(2z + 3)(z^2 - 2z + 5)(3z^2 + 1)$.

(ii) Il discriminante dell'equazione $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2\alpha = 0$ è dato da $\Delta = b^2 - 4ac = 9(1 + i)^2 - 8\alpha(2 - i) = 18i - 8\alpha(2 - i)$: una soluzione doppia appare quando $\Delta = 0$, ovvero per $\alpha = \frac{18i}{8(2-i)} = \frac{9}{4}\frac{i(2+i)}{5} = -\frac{9}{20}(1 - 2i)$, e tale soluzione è $z = -\frac{b}{2a} = -\frac{3(1+i)}{2(2-i)} = -\frac{3(1+i)(2+i)}{10} = -\frac{3(1+3i)}{10}$. • Posto poi $\alpha = 1 + i$ e, applicando a $(2 - i)z^2 + 3(1 + i)z + 2(1 + i) = 0$ la consueta formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado si trova $z = \frac{-3(1+i) \pm \sqrt{9(1-1+2i) - 8(2-i)(1+i)}}{2(2-i)} = \frac{-3(1+i) \pm \sqrt{-24+10i}}{2(2-i)}$: le radici quadrate di $-24 + 10i$ risultano $\pm(1 + 5i)$, dunque si trova $z = \frac{-3(1+i) \pm (1+5i)}{2(2-i)}$, ovvero $z = \frac{-2+2i}{2(2-i)} = \frac{(-1+i)(2+i)}{5} = -\frac{3-i}{5}$ oppure $z = \frac{-4-8i}{2(2-i)} = -\frac{2(1+2i)(2+i)}{5} = -2i$.