ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 07/01/2015

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE: PRIMI ELEMENTI

Un' equazione differenziale ordinaria (e.d.o.) è un problema in cui si chiede di determinare una funzione $y(x)$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ in cui varia x, a partire da una relazione che coinvolge y e le sue derivate fino ad un certo ordine:

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

In generale la funzione y si penserà a valori complessi: $y : I \to \mathbb{C}$

Il termine E.D. ORDINARIA indica che appaiono solo le derivate risp. x;
(più in generale si avrà a che fare con le eq. diff. ALLE DERIVATE PARZIALI (e.d.p.))

- ORDINE di un'eq. diff.: max ordine di derivata presente.
- FORMA NORMALE di un'eq. diff.: quando la derivata di y di ordine max appare esplicitata rispetto a tutto il resto:

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}$$

$\boxed{\text{Ex.}}$ E.d.o. del I° ordine in forma normale: $y' = f(x, y)$

- INTEGRALE GENERALE di un'e.d.: famiglia di tutte le sue soluzioni $y : I \to \mathbb{C}$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ • Integrale generale di $y' = f(x)$ è $y = F(x) + K$, ove $F' = f$.

• Integrale generale di $y' = \alpha y$ è $y = K e^{\alpha x}$.

• E.D. LINEARE: quando essa dipende in modo lineare da $y, y', \dots, y^{(n)}$ ovvero quando F è un polinomio di 1° grado in $y, y', \dots, y^{(n)}$: un'e.d. lineare in forma "normale" è dunque del tipo

$$\boxed{\begin{gathered} y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x) \\ \text{per certe funzioni continue } a_j : I \to \mathbb{C}, \quad b : I \to \mathbb{C} \end{gathered}}$$

(vedremo che l'integrale generale di un'e.d. lineare ha una struttura molto particolare...)

• E.D. AUTONOMA: quando la variabile indipendente x non appare esplicitamente nell'equazione, ma solo in modo implicito nella dipendenza dell'incognita y e delle sue derivate.

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $y' = x - y$ è del I° ordine in forma normale, lineare, <u>non</u> autonoma.

• $y' = y^2$ è del I° ordine in f.n., <u>non</u> lineare, autonoma.
(le sue soluzioni? $y = 0$, e $y(x) = \dfrac{1}{K - x}$, $K \in \mathbb{R}$)

In generale, le soluzioni di un'e.d.o sono <u>infinite</u>: però, <u>se aggiungo ulteriori condizioni ...</u>

PROBLEMA DI CAUCHY Significa assegnare:

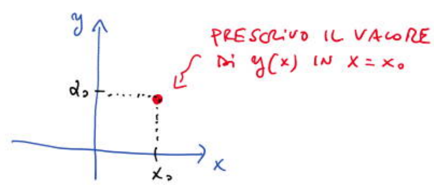
— un'e.d.o. di ordine n in forma normale $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$,

— i valori che la funzione $y(x)$ e le sue derivate $y', \dots, y^{(n-1)}$ devono assumere in un certo punto x_0:

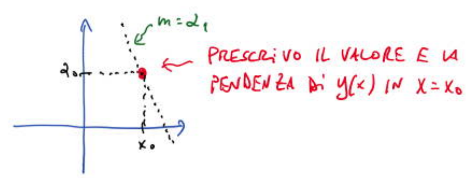
$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1} \end{cases}}$$

OVE f È CONTINUA IN CIASCUNA DELLE SUE VARIABILI ALL'INTORNO DI $(x_0, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $\underline{n=1}$ $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = \alpha_0 \end{cases}$



• $\underline{n=2}$ $\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \end{cases}$



Il seguente teorema, dovuto a Cauchy e Lipschitz (e anche a Peano per l'esistenza della soluzione con la sola continuità di f) dice che <u>un problema di Cauchy ha "praticamente quasi sempre" una e una sola soluzione $y(x)$ definita all'intorno di $x = x_0$:</u>

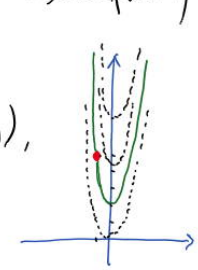
Teorema (CAUCHY-LIPSCHITZ, DI ESISTENZA E UNICITA' LOCALE)

Il problema di Cauchy (*) ammette almeno una soluzione $y(x)$ definita all'intorno di $x = x_0$.
Se inoltre f è lipschitziana rispetto a $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ (ad esempio se f è di classe $\mathcal{C}^1$ rispetto a $y, y', \dots, y^{(n-1)}$) allora tale soluzione è LOCALMENTE UNICA, nel senso che due soluzioni di (*) devono coincidere su qualche intorno di $x = x_0$.

$\boxed{\text{Ex.}}$

- $y' = 6x$ (I° ordine, lineare, non autonoma: integrazione indefinita)

  Soluzioni: $y(x) = \int 6x\,dx = 3x^2 + K$ (infinite!)
  Ma se richiedo che ad esempio $y(-1) = 5$ (pb. Cauchy),
  ottengo $5 = 3(-1)^2 + K \Rightarrow K = 2$.
  Dunque l'unica soluz. $y(x) = 3x^2 + 2$.



- $y'' = 6x$ (II° ordine, lineare, non autonoma: DOPPIA integrazione indefinita)

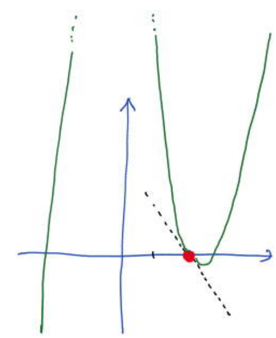
  Soluzioni: $y' = \int 6x\,dx = 3x^2 + K$

  $\rightsquigarrow \quad y(x) = \int (3x^2 + K)\,dx = x^3 + Kx + h$
  (infinite, con 2 parametri)

  Ma richiedendo che $y(2) = 0$, $y'(2) = -1$:

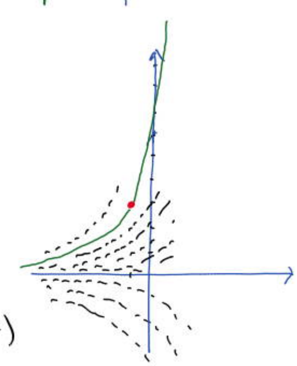
  $$\begin{cases} y(2) = 0 \\ y'(2) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 8 + 2K + h = 0 \\ 12 + K = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} K = -13 \\ h = 18 \end{cases}$$

  Unica soluzione $y(x) = x^3 - 13x + 18$



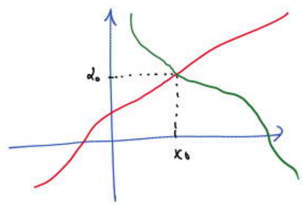
- $y' = y$ (I° ordine, lineare, autonoma)

  Soluzioni (vedremo perché): $y(x) = Ke^x$
  Ma richiedendo che $y(-1) = 3$:
  $3 = Ke^{-1} \rightsquigarrow K = 3e \rightarrow y(x) = 3e^{x+1}$ (unica)



Conseguenze immediate del T. Cauchy per gli ordini $\overline{\text{I}}^{\circ}$ e $\overline{\text{II}}^{\circ}$:

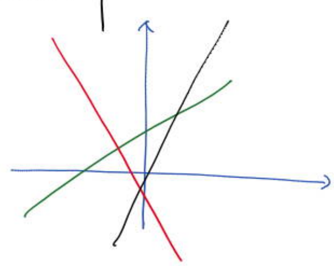
- Se un'e.d.o. del $\overline{\text{I}}^{\circ}$ ordine $y' = f(x,y)$ ha esistenza e (basta che f sia di classe C^1) unicità per ogni dato iniziale (x_0, α_0), allora <u>i grafici di due soluzioni diverse non possono mai intersecarsi</u>



- Se un'e.d.o. del $\overline{\text{II}}^{\circ}$ ordine $y'' = f(x, y, y')$ ha esistenza e unicità per ogni dato iniziale $(x_0, \alpha_0, \alpha_1)$, allora <u>i grafici di due soluzioni diverse possono intersecarsi, ma con pendenze diverse</u>

$\boxed{\text{Ex.}}$ $y'' = 0 \rightsquigarrow y'(x) = m \rightsquigarrow y(x) = mx + q$

Le soluzioni sono tutte le rette: si intersecano sì, ma sempre con pendenze diverse!



Noi non sappiamo ancora risolvere alcuna e.d.o. (tranne quelle dell'integrazione indefinita $y' = f(x)$). Tuttavia si può fare una

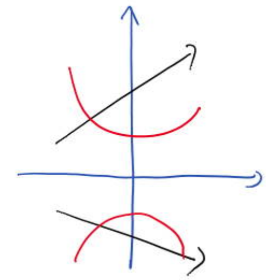
ANALISI A PRIORI: dedurre varie importanti proprietà delle soluzioni di una e.d.o. (crescenza, convessità, soluzioni costanti, parità, ...) <u>dalla sola forma dell'e.d.o.</u>, senza necessariamente dover determinare esplicitamente le soluzioni.

$\boxed{\text{Ex.}}$ • $\underline{y' = y}$ crescenza $\iff y' \overset{\text{equaz.}}{=} y > 0$

Convessità $\iff y'' \overset{\text{equaz.}}{=} y' \overset{\text{equaz.}}{=} \underline{y > 0}$

Soluz. costanti? $y \equiv K$ è soluzione $\iff$

$0 \overset{\text{equaz.}}{=} K$: dunque $y \equiv 0$ è la sola soluz. costante.

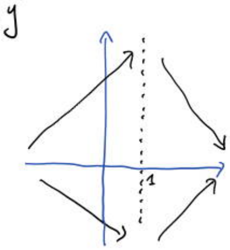


• $\underline{(x-1)y^3 + y' = 0}$ In f. normale: $y' = (1-x)y^3$

Crescenza: $y' > 0 \iff (1-x)y^3 > 0$

Sol. costanti? $y \equiv K \iff 0 = (1-x)K^3 \ \forall x$

$\iff K = 0$ (soluz. nulla $y \equiv 0$)



Convessità: $y'' = (-1)y^3 + (1-x)3y^2 \cdot y'$

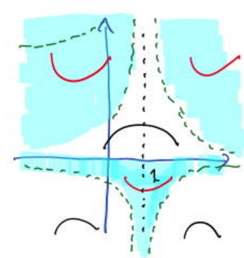
$= -y^3 + 3y^5(1-x)^2 = y^3(3y^2(1-x)^2 - 1)$

$y'' > 0 \iff y^3(3y^2(1-x)^2 - 1)$

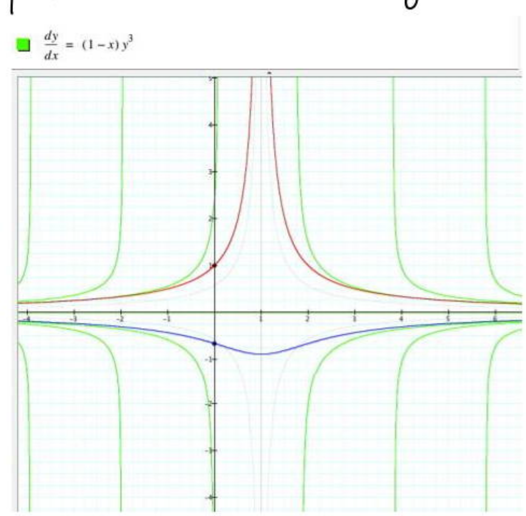
Fattori: $y^3 > 0 \iff y > 0$

$3y^2(1-x)^2 - 1 > 0 \iff \begin{cases} y^2 > \dfrac{1}{3(1-x)^2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} |y| > \dfrac{1}{\sqrt{3}\,|x-1|} \\ x \neq 1 \end{cases}$



Sarà vero? Quando nelle prossime lezioni saremo in grado di risolvere l'equazione vedremo che le sue soluzioni sono quelle evidenziate qui a fianco dal calcolatore grafico: ed in effetti esse sembrano rispettare le conclusioni su crescenza etc. appena ricavate dall'analisi a priori.



ESERCIZI

(1) L'e.d.o. $\boxed{yy' = x}$ è di quale ordine? È lineare, in forma normale, autonoma? Si applica ad essa il Teorema di Cauchy-Lipschitz, e come? Fare l'analisi a priori di crescenza, convessità, eventuali soluzioni costanti, e del fatto che una soluzione $\tilde{y}(x)$ definita all'intorno di $x_0 = 0$ deve essere necessariamente pari.

Verificare poi che le funzioni $y(x) = \pm\sqrt{x^2 + K}$ sono soluzioni dell'e.d.o. $\forall K \in \mathbb{R}$ (mostreremo che queste sono <u>tutte e sole</u> le soluzioni: e tra esse appaiono anche $y(x) = \pm x$, visibili "ad occhio nudo"...)

Risolvere infine i problemi di Cauchy con dati iniziali $y(3) = -3$, oppure $y(1) = -2$, oppure $y(-2) = 1$.

(2) L'e.d.o. $\boxed{y'' + 4y' + 5y = 10}$ è di quale ordine? È lineare, in forma normale, autonoma? Si applica ad essa il Teorema di Cauchy-Lipschitz? Vi sono soluzioni costanti? Due soluzioni diverse si possono intersecare?

Verificare che le funzioni $y(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + 2$ sono soluzioni dell'e.d.o. $\forall A, B \in \mathbb{R}$ (mostreremo che queste sono <u>tutte e sole</u> le soluzioni).

Risolvere infine i problemi di Cauchy con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$, oppure con $y(\pi) = 2$ e $y'(\pi) = 0$.