ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di lunedì 12/01/2015

La scorsa lezione si è introdotto l'argomento delle eq. diff. ordinarie (scalari) compresa l'analisi a priori e il Teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy.

Piccolo inciso. Il termine "scalari" significa che si cerca di determinare UNA SOLA funzione incognita $y(x)$, e non più di una, il che richiederebbe un sistema di equazioni differenziali scalari (o "eq. diff. vettoriale").
Ciò sarà visto meglio in Analisi III; facciamo comunque un esempio.

Ex. Cerchiamo le soluzioni $(x(t), y(t))$ del sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ IL PUNTO INDICA LA DERIVAZIONE RISPETTO t (TIPICAMENTE IL TEMPO)

Una evidente: $\varphi_1(t) = (\sin t, \cos t)$.

Altre due (un po' meno evidenti): $\varphi_2(t) = (e^{it}, ie^{it})$, $\varphi_3(t) = (e^{-it}, -ie^{-it})$.

E tutte le altre? In Analisi III si dimostrerà che sono uno spazio vettoriale di dim. 2 su $\mathbb{C}$, dunque ad esempio φ_1 si deve esprimere come combinazione lineare su $\mathbb{C}$ di φ_2 e φ_3. Vero? Sì, per Eulero:

$$\varphi_1(t) = (\sin t, \cos t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}, \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right) = \frac{1}{2i}(e^{it}, ie^{it}) - \frac{1}{2i}(e^{-it}, -ie^{-it}) = \frac{1}{2i}\varphi_2 - \frac{1}{2i}\varphi_3.$$

Con oggi iniziamo a mostrare i metodi di risoluzione di alcuni tipi di e.d.o.; ma iniziamo risolvendo i due esercizi assegnati alla fine della scorsa lezione.

(1) L'e.d.o. $\boxed{yy' = x}$ è di quale ordine? È lineare, in forma normale, autonoma? Si applica ad essa il Teorema di Cauchy-Lipschitz, e come? Fare l'analisi a priori di crescenza, convessità, eventuali soluzioni costanti, e del fatto che una

soluzione $\tilde{y}(x)$ definita all'intorno di $x_0=0$ deve essere necessariamente pari.

I° ordine; NON lineare, né in f.n., né autonoma.

Se una soluzione $y(x)$ si annulla in qualche x_0 (ovvero se $y(x_0)=0$) si ha che $0 = \overset{=0}{y(x_0)} \cdot y'(x_0) = x_0$: in altre parole, una soluzione può eventualmente annullarsi solo in $x_0=0$, e in tal caso $y(0)\cdot y'(0)=0$ ovvero una soluzione $y(x)$ definita anche per $x=0$ o si annulla lei o si annulla la sua derivata: dunque se $y(0)\neq 0$ necessariamente $x=0$ è un punto critico.

Invece dove $y \neq 0$ poniamo in forma normale $y' = \overset{=f(x,y)}{x/y}$: poiché f è di classe $\mathcal{C}^1$ risp. y, il T. Cauchy si applica per ogni dato $y(x_0)=y_0 \neq 0$.

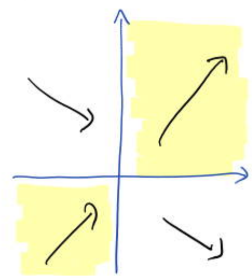
Ora l'analisi a priori.

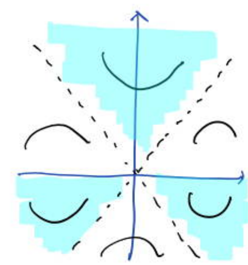
<u>Crescenza</u>: $y' = x/y \rightsquigarrow y' > 0 \iff x/y > 0$

<u>Convessità</u>: $y'' = \dfrac{1\cdot y - x\cdot \overset{=x/y}{y'}}{y^2} = \dfrac{y^2-x^2}{y^3}$

Il num. y^2-x^2 è $>0 \iff |y|>|x|$

Il denom. y^3 è $>0 \iff y>0$





<u>Costanti</u>? Se $y\equiv k$ è sol., si ha $y'\equiv 0$: dunque da $yy'=x$ ricava $0\cdot k = x \ \forall x$, cioè $0 = x \ \forall x$, falso! Dunque $\nexists$ sol. costanti

<u>Parità</u>: Se $\tilde{y}(x)$ è una soluzione definita in un intervallo I contenente $x=0$, sia $\varphi(x) := \tilde{y}(-x)$ (notiamo che φ avrà come dominio $-I$, che pure contiene 0).

<u>Tesi</u>: $\tilde{y} = \varphi$. Idea: mostrare che $\tilde{y}$ e φ soddisfano uno stesso problema di Cauchy (nel qual caso scatterà il T. Cauchy e dunque $\tilde{y}=\varphi$).

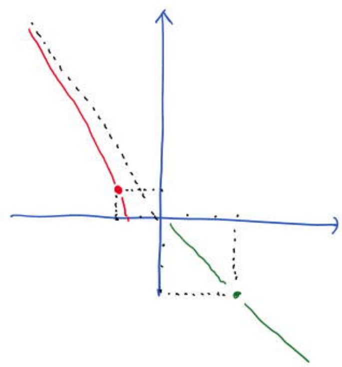
Intanto mostriamo che anche $\varphi(x)$ è soluzione, ovvero $\varphi(x)\,\varphi'(x) = x \ \forall x$.

$\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = \tilde{y}(-x)\cdot\left(-\tilde{y}'(-x)\right) = -\tilde{y}(-x)\cdot\tilde{y}'(-x) = -(-x) = x$, come si voleva.

Inoltre $\varphi(0) = \tilde{y}(-0) = \tilde{y}(0)$, dunque entrambe soddisfano allo stesso dato di Cauchy in $x_0 = 0 \Rightarrow$ sono uguali.

Verificare poi che le funzioni $y(x) = \pm\sqrt{x^2+K}$ sono soluzioni dell'e.d.o. $\forall K \in \mathbb{R}$ (mostreremo che queste sono tutte e sole le soluzioni: e tra esse appaiono anche $y(x) = \pm x$, visibili "ad occhio nudo"...)

Risolvere infine i problemi di Cauchy con dati iniziali $y(3) = -3$, oppure $y(1) = -2$, oppure $y(-2) = 1$.



$$y'(x) = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+K}} = \frac{x}{y}\,,$$ dunque son soluzione.

- Dato iniziale $y(3) = -3$: $-3 = \pm\sqrt{9+K}$

  ⇝ devo scegliere "$-$", e poi $9 = 9+K \Rightarrow K = 0$!

  $y = -\sqrt{x^2} = -|x| \overset{x_0=3>0}{=} -(x) = -x$, valida per $x > 0$.

- Dato iniziale $y(-2) = 1$: $1 = \pm\sqrt{4+K}$ ⇝ scelgo "+",

  poi $1 = 4+K \Rightarrow K = -3$ ⇝ $y(x) = \sqrt{x^2-3}$, valida per $x < -\sqrt{3}$

(2) L'e.d.o. $\boxed{y'' + 4y' + 5y = 10}$ è di quale ordine? È lineare, in forma normale, autonoma? Si applica ad essa il Teorema di Cauchy-Lipschitz? Vi sono soluzioni costanti? Due soluzioni diverse si possono intersecare?

II ordine, lineare, "quasi in f.n." ($y'' = 10 - 5y - 4y' = f(x, y, y')$) autonoma. Poiché f è ovviamente C^1, si applica il T. Cauchy, ovvero esistenza e unicità locale (in realtà sarà globale, valida per le equaz-

lineari) delle soluzioni del pb. con $y(x_0) = \alpha_0$, $y'(x_0) = \alpha_1$ $\forall x_0, \alpha_0, \alpha_1$.
Costanti? $y \equiv K$: $0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot K \equiv 10$ $\forall x$, cioè $K = 2$: dunque $y \equiv 2$.
Due soluzioni diverse possono intersecarsi purché con pendenze diverse
(conseguenza di Cauchy).

Verificare che le funzioni $y(x) = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + 2$
sono soluzioni dell'e.d.o. $\forall A, B \in \mathbb{C}$ (mostreremo che queste
sono tutte e sole le soluzioni).
Risolvere infine i problemi di Cauchy con $y(0) = 0$ e $y'(0) = -1$,
oppure con $y(\pi) = 2$ e $y'(\pi) = 0$.

$$y = e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) + 2$$
$$y' = e^{-2x}\big((B - 2A)\cos x + (-A - 2B)\sin x\big)$$
$$y'' = e^{-2x}\big((3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x\big)$$
$$\Rightarrow\ y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\left(\begin{pmatrix} \cancel{3A} - \cancel{4B} \\ + \cancel{4B} - \cancel{8A} \\ + \cancel{5A} \end{pmatrix}\cos x + \begin{pmatrix} \cancel{4A} + \cancel{3B} \\ - \cancel{4A} - \cancel{8B} \\ + \cancel{5B} \end{pmatrix}\sin x\right) + 10 \equiv 10$$

- Pb. di Cauchy $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$:

$$\begin{cases} A + 2 = 0 \\ B - 2A = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = -5 \end{cases} \Rightarrow\ y(x) = -e^{-2x}(2\cos x + 5\sin x) + 2$$

- Pb. di Cauchy $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 0$

$$\begin{cases} e^{-2\pi}(-A) + \cancel{2} = \cancel{2} \\ \cancel{e^{-2\pi}}(2A - B) = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 0 \\ B = 2A \end{cases} \Rightarrow\ A = B = 0 \ \Rightarrow\ \text{costante } y \equiv 2$$
(come prevedibile!)

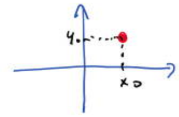
Esaminiamo ora il primo tipo di e.d.o. che impariamo a risolvere:

EQ. DIFF. DEL I° ORDINE A VARIABILI SEPARABILI $\boxed{y' = h(x)\, g(y)}$ (ove $h(x)$ e $g(y)$ sono funz. continue)

(In generale, un'e.d.o. del I° ordine in forma normale si presenta come $y' = f(x,y)$, e NON tutte le $f(x,y)$ si lasciano esprimere come $f(x,y) = h(x)\, g(y)$. Esempio: $y' = x - y$)

Per la risoluzione, accoppiamo l'e.d.o. con una condizione iniziale, ovvero consideriamo il pb. di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y' = h(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$$



Se le condizioni del T. Cauchy sono soddisfatte (ex: se $g(y)$ è $\mathcal{C}^1$ all'int. di y_0) allora una soluzione $y(x)$ del pb. dato esiste ed è unica (in realtà, per l'esistenza basterebbe $h(x)$ e $g(y)$ siano continue all'intorno risp. di x_0 e di y_0)

1° caso: $g(y_0) = 0$. Allora $y(x) \equiv y_0$ è soluzione (ovvio: $0 = h(x) \cdot g(y_0) = 0$)

2° caso: $g(y_0) \neq 0$. Per la permanenza del segno, $g(y)$ resta $\neq 0$ all'int. di y_0.

$$\frac{1}{g(y)}\, y' = h(x).$$

Ora integro i due membri tra $x = x_0$ e x generico:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{g(y(t))}\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt$$

Nel 1° integrale faccio un cambio di variabile: $\eta := y(t) \Rightarrow d\eta = y'(t)\, dt$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(\eta)}\, d\eta = \int_{x_0}^{x} h(t)\, dt.$$

Siano ora $L(\eta)$ una primitiva di $\frac{1}{g(\eta)}$, e $H(t)$ una primitiva di $h(t)$.

$$L(y) - L(y_0) = H(x) - H(x_0) \Rightarrow L(y) = H(x) - H(x_0) + L(y_0).$$

A questo punto resta solo da esplicitare il I° membro rispetto a y

(tenendo conto della condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$)

per determinare la $y(x)$ desiderata.

L'intervallo su cui tale soluzione $y(x)$ è definita sarà il più grande intervallo I contenuto nel dominio di $h(x)$ contenente x_0 e tale che $\frac{1}{g(y(x))}$ abbia senso (cioè $g(y) \neq 0$).

Una rilettura "speditiva" del procedimento, utile in pratica:

$$y' = h(x)\, g(y) \rightsquigarrow \frac{1}{g(y)}\, dy = h(x)\, dx \rightsquigarrow \quad (\text{PENSANDO } y' = \tfrac{dy}{dx})$$

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int h(x)\, dx \rightsquigarrow L(y) = H(x) + K$$

Poi, determinata K tale che $y(x_0) = y_0$, si esplicita $y(x)$.

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\boxed{y' = y^2}$ $\quad y(x_0) = y_0 \qquad h(x) \equiv 1, \quad g(y) = y^2$

Qui $y' = f(x,y) = y^2$ è $C^1 \Rightarrow \exists!$ per Cauchy

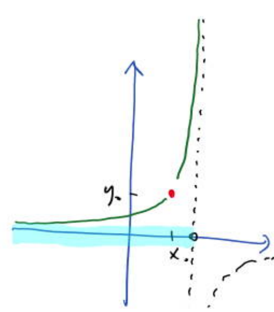
1° caso: $y_0 = 0$ soluz. $y \equiv 0$

2° caso: $y_0 \neq 0$ $\qquad \frac{1}{y^2}\, y' = 1 \Rightarrow$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{y^2(t)}\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} 1\, dt \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{1}{\eta^2}\, d\eta = x - x_0$$

$$\left(-\frac{1}{\eta}\right)\Bigg|_{y_0}^{y} = x - x_0 \qquad -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x - x_0 \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0} - x + x_0$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 + y_0(x_0 - x)}{y_0} \Rightarrow y = \frac{y_0}{1 + y_0(x_0 - x)} = \frac{1}{\underbrace{\left(x_0 + \frac{1}{y_0}\right)}_{K} - x}$$



definita su una semiretta che comprende x_0

Col metodo "spedito":

$y' = y^2 \quad \frac{1}{y^2}\,dy = dx \qquad \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 1\,dx$

$-\frac{1}{y} = x + K \Rightarrow y = \frac{1}{-K-x} = \frac{1}{h-x}, \quad h \in \mathbb{R}$

$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{h - x_0} \Rightarrow h = x_0 + \frac{1}{y_0}$

Ex. $\boxed{y' = \alpha y}$ $(\alpha \neq 0)$ (STATISTICA MALTHUSIANA) $\quad y(x_0) = y_0$

Anche qui abbiamo $\exists!$ della soluzione del pb. di Cauchy.

Se $y_0 = 0$: soluz. $y \equiv 0$,

se $y_0 \neq 0$: $\frac{1}{y}\,dy = \alpha\,dx \Rightarrow \log|y| = \alpha x + K$

$\Rightarrow |y| = e^{\alpha x + K} = \underbrace{e^K}_{h>0} e^{\alpha x} \Rightarrow y = \underbrace{h}_{\in\mathbb{R}} e^{\alpha x}$

$y(x_0) = y_0 \Rightarrow y_0 = h e^{\alpha x_0} \Rightarrow h = y_0 e^{-\alpha x_0}$

Dunque $y(x) = y_0 e^{\alpha(x - x_0)}$

Ex. $\boxed{(x-1)y^3 + y' = 0}$ $\quad y' = (1-x)y^3 \quad y(x_0) = y_0$

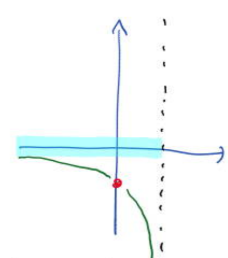
$y_0 = 0$: soluz. $y \equiv 0$

$y_0 \neq 0$: le soluzioni NON si ANNULLANO mai (T. Cauchy)

$y^{-3}\,dy = (1-x)\,dx \Rightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = x - \frac{x^2}{2} + K$

$y^{-2} = x^2 - 2x - 2K$ scrivo $+K$ generica! $\Rightarrow y^2 = \frac{1}{x^2 - 2x + K}$

$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + K}}, \quad K \in \mathbb{R}$.



Es. dato $y(0) = -1 \neq 0$: $-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{0 - 0 + K}}$

$\Rightarrow 1 = \frac{1}{K} \Rightarrow K = 1$: $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = -\frac{1}{|x-1|} \overset{x \sim 0}{=} -\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

Dominio: $I =]-\infty, 1[$ (contiene $x_0 = 0$)

$\boxed{\text{Ex.}}$ $\boxed{y y' = x}$ $\quad y(x_0) = y_0$

E' l'esercizio precedente!

$$y\,dy = dx \Rightarrow y^2 = x^2 + 2K \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{x^2+K}, \quad K \in \mathbb{R}$$

chiamo $K \in \mathbb{R}$

per poter applicare Cauchy!

$$y(x_0) = y_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \pm\sqrt{x_0^2+K} \quad \Rightarrow$$ scelgo tra $\pm$ il segno di y_0,

e poi $y_0^2 = x_0^2 + K \Rightarrow K = y_0^2 - x_0^2$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (\operatorname{sign} y_0)\sqrt{x^2 + (y_0^2 - x_0^2)}$$

$\boxed{\text{Ex}}$ $\boxed{\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$ In questa equazione, per alcuni valori del dato iniziale $y(x_0) = y_0$ non sarà possibile applicare il T. Cauchy nella parte che riguarda l'unicità: ovvero la soluzione esiste (perché $f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$ è continua) MA potrebbe non essere unica. Ne riparleremo nella prossima lezione.