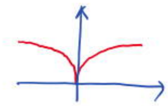
ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di martedì 13/01/2015

Ex $\boxed{\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}}$ In questo caso $f(x,y) = \overset{\text{"}1\text{"}}{h(x)}\, g(y) = 2\sqrt{|y|}$ 

È continua, dunque una soluzione esiste sicuramente!

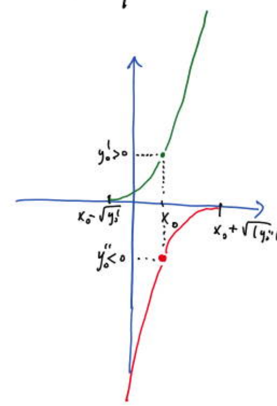
- Se $\underline{y_0 \neq 0}$, $g(y)$ è $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow$ $\exists!$ soluzione $y(x)$ definita all'intorno di $x = x_0$.

Determiniamola: $\frac{1}{2\sqrt{|y|}}\, dy = dx \Rightarrow \sigma_y \sqrt{|y|} = x + K$.

Da $y(x_0) = y_0 \Rightarrow \sigma_{y_0}\sqrt{|y_0|} = x_0 + K \Rightarrow K = \sigma_{y_0}\sqrt{|y_0|} - x_0$. Dunque

$\sigma_y \sqrt{|y|} = x - x_0 + \sigma_{y_0}\sqrt{|y_0|} \Rightarrow |y| = \left(x - x_0 + \sigma_{y_0}\sqrt{|y_0|}\right)^2$

$$y(x) = \begin{cases} (\text{se } y_0 > 0) & (x - x_0 + \sqrt{y_0})^2 \quad \text{con dominio } x > x_0 - \sqrt{y_0} \\ (\text{se } y_0 < 0) & -(x - x_0 - \sqrt{|y_0|})^2 \quad \text{con dominio } x < x_0 + \sqrt{|y_0|} \end{cases}$$



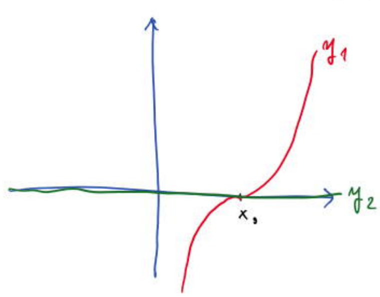
Come si vede, se $y_0 \neq 0$ la soluz. esiste ed è unica all'intorno di $x = x_0$.

- Se $\underline{y_0 = 0}$ allora $g(y)$ è solo continua, e non lipschitziana e dunque il T. Cauchy non è applicabile: potrebbe saltare l'unicità.

E in effetti accade proprio così:

Per $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$ c'è la soluzione precedente $\underline{y_1(x)} = \begin{cases} (x - x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \\ -(x - x_0)^2 & \text{se } x < x_0 \end{cases}$

ma c'è anche la soluz. costante $\underline{y_2 \equiv 0}$!



Si tratta di due soluzioni del medesimo problema di Cauchy (con dominio $\mathbb{R}$ per entrambe, un intorno di x_0) ma sono ben diverse l'una dall'altra, anche all'intorno di $x = x_0$: dunque salta l'unicità!

Passiamo ora alle

E.D.O. DEL I° ORDINE LINEARI $\boxed{y' + p(x)\, y = q(x)}$ (p, q continue)

Notiamo che $y' = f(x,y)$ con $f(x,y) = q(x) - p(x)\,y$ che soddisfa le condizioni del teorema di Cauchy (infatti è ovviamente C^1 rispetto a y): ne segue esistenza e unicità della soluzione per un qualsiasi dato di Cauchy.

Sia $P(x)$ una primitiva di $p(x)$, e moltiplichiamo ambo i membri per $e^{P(x)}$ (è funzione >0, dunque non altera per nulla il nostro problema)

$$e^{P(x)}\left(y' + p(x)\,y\right) = e^{P(x)} q(x) \quad \text{ovvero} \quad \left(y\, e^{P(x)}\right)' = e^{P(x)} q(x)$$

$$\Rightarrow \quad y\, e^{P(x)} = \int e^{P(x)} q(x)\, dx + K$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(x) = e^{-P(x)} \left(\int e^{P(x)} q(x)\, dx + K \right)}$$

FORMULA DELL'INTEGRALE GENERALE

Se è data anche una condizione $y(x_0) = y_0$: usando come primitiva di $e^{P(x)} q(x)$ la funz. integrale $\int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)\, dt$ allora, calcolando ambo i membri in x_0, ottengo $y_0 = e^{-P(x_0)}(0 + K) \rightsquigarrow K = y_0 e^{P(x_0)} \rightsquigarrow$

$$\boxed{y(x) = e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{P(t)} q(t)\, dt + y_0\, e^{P(x_0)} \right)}$$

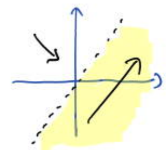
FORMULA DELLA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

Ex. $\boxed{y' = x - y}$ Analisi a priori.

Costanti? $y = K$ è sol. $\Leftrightarrow$ $0 = x + K \ \forall x$ falso! Dunque no.

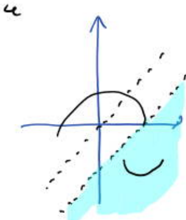
Crescenza: $y' = x - y > 0 \Leftrightarrow y < x$

$y' = 0 \Leftrightarrow y = x$



Dunque le soluzioni il cui grafico interseca la bisettrice assumeranno su essa un minimo assoluto.

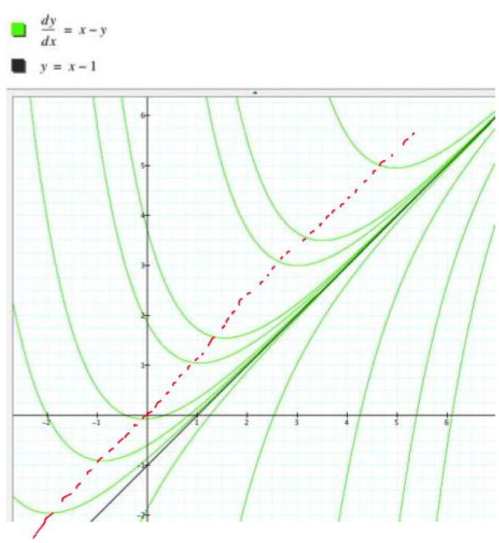
Convessità: $y'' = 1 - y' = 1 - (x - y) = y - x + 1 > 0 \Leftrightarrow y > x - 1$



Ora risolviamo. $y' = x - y \Rightarrow y' + \overset{p(x)}{1} \cdot y = \overset{q(x)}{x}$

$P(x) = x$ $\qquad \int e^x \cdot x \, dx = (x-1)e^x$

Dunque $y(x) = e^{-x}\left((x-1)e^x + K\right) = x - 1 + K e^{-x}, \quad K \in \mathbb{C}$.



Notiamo che le soluzioni disegnate dall'elaboratore grafico soddisfano le conclusioni dell'analisi a priori.

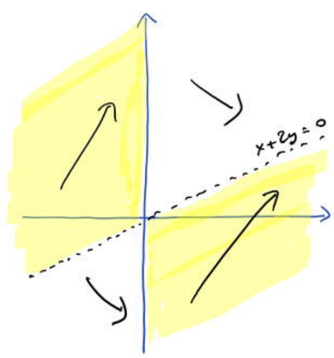
Ex. $\boxed{y' = x(x-2y)}$ È lineare: $y' + \underbrace{2x}_{p(x)}y = \underbrace{x^2}_{q(x)}$

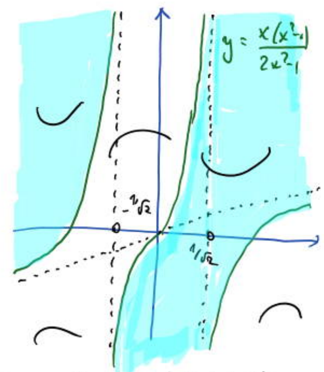
Iniziamo con un po' di analisi a priori.

Costanti? $y \equiv k \Rightarrow 0 = x(x-2k)\ \forall x$ falso! Nessuna sol. costante.

Crescenza: $y' = x(x-2y) > 0$.

Vale $y' = 0$ per $x=0 \vee y = x/2$: lì si avranno punti critici.





Convessità:

$$y'' = 1(x-2y) + x(1-2y')$$
$$= x-2y+x(1-2x(x-2y))$$
$$= 2\left((2x^2-1)y - x(x^2-1)\right).$$

Dunque $y''>0 \iff (2x^2-1)y \geq x(x^2-1) \iff \begin{cases} |x| > 1/\sqrt{2} \\ y \geq \frac{x(x^2-1)}{2x^2-1} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \geq \mp 3/8 \end{cases} \vee \begin{cases} |x| < 1/\sqrt{2} \\ y \leq \frac{x(x^2-1)}{2x^2-1} \end{cases}$

VERO solo PER $x = 1/2$

Mostriamo anche che le soluzioni $\tilde{y}(x)$ t.c. $\tilde{y}(0)=0$ è dispari, cioè $\tilde{y}(-x) = -\tilde{y}(x)$.

Pos. $\varphi(x) := -\tilde{y}(-x)$, la tesi è che $\tilde{y} = \varphi$.

Verifichiamo che anche φ è soluzione, ovvero $\varphi'(x) = x(x-2\varphi(x))\ \forall x$.

$$\varphi'(x) = -\left(-\tilde{y}'(-x)\right) = \tilde{y}'(-x) = (-x)\left((-x)-2\tilde{y}(-x)\right) = x(x+2\tilde{y}(-x)) = x(x-2\varphi(x)).$$

Inoltre $\varphi(0) = -\tilde{y}(-0) = -0 = 0 = \tilde{y}(0)$: dunque per il T. Cauchy vale $\varphi = \tilde{y}$.

Passiamo ora alla risoluzione. $y' + \underbrace{2x}_{p(x)}y = \underbrace{x^2}_{q(x)}$. $P(x) = x^2$

$$\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int x^2 e^{x^2}dx = \int \underbrace{x}_{F}\cdot\underbrace{xe^{x^2}}_{g\quad G=\frac{1}{2}e^{x^2}}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{x^2} - \int\frac{1}{2}e^{x^2}dx$$

$= \frac{1}{2}\left(xe^{x^2} - \int e^{x^2}dx\right)$, solo che l'integrale "gaussiano" $\int e^{x^2}dx$ non è esprimibile in forma elementare: dunque $y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}(xe^{x^2} - \int e^{x^2}dx) + k\right)$

Con il dato di Cauchy $y(0) = y_0$ le soluzioni diventa

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}\left(xe^{x^2} - \int_0^x e^{t^2}dt\right) + y_0\right) = \frac{1}{2}\left(x + e^{-x^2}\left(y_0 - \int_0^x e^{t^2}dt\right)\right)$$

È ora il caso di sottolineare due caratteristiche importanti delle soluzioni di un'eq. diff. lineare (in forma normale) già riscontrabili dal caso del I° ordine appena svolto:

1. Le soluzioni sono definite su <u>tutto</u> l'intervallo dominio di $p(x)$ e $q(x)$.

(Per equazioni non lineari, questa ampiezza del dominio delle soluzioni (detta "esistenza in grande", che verrà trattata in Analisi III) NON è garantita. Ad esempio, le soluzioni dell'equazione $y' = y^2$ sono $y \equiv 0$ e quelle del tipo $y(x) = \frac{1}{K-x}$, definite quindi al più <u>sol</u> su una semiretta.)

2. Lo spazio delle soluzioni è strutturato come una "CLASSE LATERALE": ovvero uno sp. vettoriale di soluzioni traslato per una soluzione particolare:

$$y(x) = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)} q(x)\,dx + K\right) = \underbrace{e^{-P(x)}\int e^{P(x)} q(x)\,dx}_{\text{SOLUZIONE PARTICOLARE}} + \underbrace{K e^{-P(x)}}_{\text{SPAZIO VETTORIALE GENERATO DA } e^{-P(x)} \text{ AL VARIARE DI } K\in\mathbb{C}}$$

<u>Ex.</u> $y' = x - y \;\rightsquigarrow\; y(x) = \underbrace{x-1}_{\text{SOL. PART.}} + \underbrace{K e^{-x}}_{\text{SP. VETTORIALE GENERATO DA } e^{-x} \text{ AL VARIARE DI } K\in\mathbb{C}}$

Torneremo tra breve su queste proprietà delle soluzioni delle e.d.o. lineari con un enunciato più preciso, che verrà dimostrato in Analisi III.

ESERCIZI

1. Studiare il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a|y|^\alpha \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ al variare di $a, y_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 1$.

2. Risolvere l'equazione logistica $\begin{cases} y' = a(1 - y/S)\,y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ al variare di $0 < y_0 < S$.
(vedi sopra, con $y(x) \rightsquigarrow p(t)$)

3. Data l'eq. diff. $(x+1)y' + 2y = 6x$ farne l'analisi a priori su costanti, crescenza e convessità. Trovarne poi tutte le soluzioni, specificando se ve sono con dominio tutto $\mathbb{R}$ (per risolverla va posta in forma normale, ma poi...)

4. Data $yy' = xe^{-y^2}$ determinarne a priori costanti, crescenza, parità; discutere l'applicabilità del T. Cauchy; trovare la soluzione con $y(0) = -1$.

5. Risolvere $y' = cy + b(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ e con $b(x) = x$ oppure $b(x) = e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R}$.

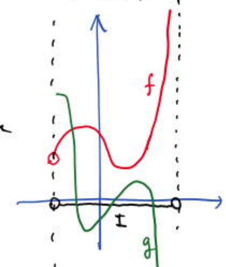
6. Data $(x-2)^2 y' = y+1$ farne l'analisi a priori su costanti, crescenza, convessità. Trovarne poi tutte le soluzioni (in questo caso in due modi, sia come variabili separabili che come lineare), specificando se ve ne sono con dominio $\mathbb{R}$.

7. Stesse domande per $(x-1)y' = y^2$, o per $y' + 2x = 2xy$.
Cosa si può dire su esistenza e unicità locale delle soluzioni?
Determinare infine le soluzioni di ciascuna delle due equazioni tali che $y(0) = -3$, oppure tali che $y(-3) = 0$.

8. Determinare le soluzioni di $y' = (2\sin x - y)\cos x$ tali che $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ opp. $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Se I è un intervallo (aperto) di $\mathbb{R}$, definisco l'insieme (dato $m \in \mathbb{N}$)

$$\mathcal{C}^m(I, \mathbb{R}) = \{ \text{funzioni } f : I \to \mathbb{R} \text{ di classe } \mathcal{C}^m \}$$



Questo insieme ha una naturale struttura di $\mathbb{R}$-sp. vettoriale (posso sommare due funzioni, e/o molt. per scalari in $\mathbb{R}$) di dimensione infinita ("come i punti di I")

Lo stesso discorso posso farlo con $\mathcal{C}^m(I, \mathbb{C}) = \{ \text{funz. } f : I \to \mathbb{C} \text{ di cl. } \mathcal{C}^m \}$ (ove si intende $f = (\mathrm{Re}\, f) + i\,(\mathrm{Im}\, f)$): sarà sp. vett. sul campo $\mathbb{C}$.

Tutto quello che faremo ora verrà svolto per funzioni <u>a valori complessi</u>, e <u>quelle a valori reali verranno viste come un sottocaso</u>; ciò verrà chiarito strada facendo.

Una eq. diff. <u>lineare</u> di ordine n "in forma normale" si può scrivere:

$$\text{(COMPL)} \qquad \boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x)}$$

Ad essa è naturale associare un'equazione OMOGENEA:

$$\text{(OMOG)} \qquad \boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0}$$

Siamo interessati a trovare l'insieme delle soluzioni S di (COMPL): cerchiamo di descriverlo in combinazione con l'insieme delle soluzioni S_0 di (OMOG)

Sia I un intervallo aperto su cui sono definite tutte le funzioni $a_j(x)$, $b(x)$.

Teorema

(i) S_0 è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ di dimensione n: ovvero, vi sono n soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ definite su <u>tutto</u> I tali che

$$S_0 = \{ \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) \; : \; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}.$$

Un tale insieme di soluzioni $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ si dirà SISTEMA FONDAMENTALE di soluzioni di (OMOG).

(ii) S è il sottospazio affine di $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ ottenuto traslando il sottospazio vettoriale S_0 con una qualsiasi soluz. particolare $\tilde{\varphi}(x)$ di (COMPL.):

$$S = S_0 + \tilde{\varphi}(x) = \{ \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_n \varphi_n(x) + \tilde{\varphi}(x) \; : \; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} \}$$

(iii) (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE) Se $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, e $\tilde{\varphi}_1(x)$ (risp. $\tilde{\varphi}_2(x)$) è una soluzione di (COMPL) ove $b(x)$ sia rimpiazzato da $b_1(x)$ (risp. da $b_2(x)$), allora $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}_1(x) + \tilde{\varphi}_2(x)$ è soluzione di (COMPL.)

(Questo generalizza quanto trovato nel caso di $n=1$, come preannunciato sopra:

$$y(x) = e^{-A_0(x)} \left(\int e^{A_0(x)} b(x)\, dx + K \right) = K \overbrace{e^{-A_0(x)}}^{\varphi(x) \text{ soluz. di (OMOG)}} + \overbrace{e^{-A_0(x)} \int e^{A_0(x)} b(x)\, dx}^{\tilde{\varphi}(x) \text{ soluz. di (COMPL)}}$$
)

Tornando al caso generale, tutto sembra facile, nel senso che i "soli" problemi sono:

① procurarsi un sistema fondamentale di soluzioni $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ di (OMOG);

②. procurarsi una soluzione particolare $\tilde{\varphi}(x)$ per (COMPL).

C'è una buona notizia:

- Se si sa risolvere ① allora in principio si sa risolvere anche ②.

Esiste infatti un metodo dovuto a Lagrange, di cui diamo l'enunciato <u>solo nel caso $n=2$</u> (II ordine), rimandando ad Analisi III per il generale:

(METODO DI LAGRANGE DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE)

Sia data $y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x)$. (COMPL)

Se $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ è un sistema fondamentale di soluzioni di (OMOG), allora una soluzione particolare di (COMPL) è data da

$$\tilde{\varphi}(x) = \alpha_1(x)\varphi_1(x) + \alpha_2(x)\varphi_2(x) \quad \text{ove} \quad \begin{cases} \alpha_1(x) = -\int \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} b(x)\,dx \\ \alpha_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2} b(x)\,dx \end{cases}$$

Ce n'è però anche una cattiva, che purtroppo ridimensiona quella buona:

- Non esiste alcun metodo generale per risolvere (1).

Tuttavia è possibile risolvere (1) in un caso di grande importanza: quello dei COEFFICIENTI COSTANTI, in cui le funzioni coefficienti $a_j(x)$ sono costanti:

$$\left(\begin{smallmatrix}\text{COEFF}\\ \text{COST}\end{smallmatrix}\right) \qquad \boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)}$$

Consideriamo l'EQUAZIONE CARATTERISTICA $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

(esempio: $\underbrace{2}_{a_2=2} y'' \underbrace{-}_{a_1=-1} y' \underbrace{-}_{a_0=-1} y = \underbrace{2e^x + 1}_{b(x)} \rightsquigarrow 2z^2 - z - 1 = 0$)

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$ le soluzioni di tale equazione caratteristica, con molteplicità $m_1, \dots, m_s$ (dunque $m_1 + \dots + m_s = n$)

Prop. (i) (RISPOSTA AL PROBLEMA ①) Un sistema fondamentale per (COEFF COST) è dato da

$$
\begin{array}{lll}
e^{\alpha_1 x}, \ \ldots\ldots\ldots, & x^{m_1-1} e^{\alpha_1 x} & (\text{sono } m_1) \\
e^{\alpha_2 x}, \ \ldots\ldots, & x^{m_2-1} e^{\alpha_2 x} & (\text{sono } m_2) \\
\vdots & & \\
e^{\alpha_s x}, \ \ldots, & x^{m_s-1} e^{\alpha_s x} & (\text{sono } m_s)
\end{array}
$$

In totale sono n funzioni $\varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \ldots, \varphi_n(x) = x^{m_s-1} e^{\alpha_s x}$.

(ii) (METODO DEI COEFFICIENTI INDETERMINATI PER IL PROBLEMA ②)

Se $b(x) = A(x) e^{\gamma x}$ ove $\gamma \in \mathbb{C}$ e $A(x)$ polinomio complesso,
sia μ la molteplicità di γ come soluzione dell'eq. caratt. (dunque $\mu \in \{0, \ldots, n\}$).
Allora una soluz part. $\tilde{\varphi}(x)$ dell'eq. completa è della forma
$\tilde{\varphi}(x) = x^{\mu} B(x) e^{\gamma x}$ ove $B(x)$ è un polinomio incognito da determinare,
di grado al più uguale a quello di $A(x)$.

N.B.: Il metodo dei coefficienti indeterminati esposto qui sopra (per risolvere il problema ②) funziona in realtà solo nel caso in cui $b(x)$ sia della forma $A(x) e^{\gamma x}$ (caso peraltro piuttosto vasto, come vedremo negli esercizi).

In generale, come detto in precedenza, esiste comunque il METODO DI LAGRANGE DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI ARBITRARIE che fornisce una soluzione particolare $\tilde{\varphi}(x)$ a partire da un sistema fondamentale $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

In particolare, ci occupiamo del caso $n=2$ (II° ordine) a coeff. a_2, a_1, a_0 REALI.

Prop. Si abbia $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, e siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ le soluzioni dell'eq. caratteristica $a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$.

(i) Un sistema fondamentale di soluzioni è dato da:

1. Se $\Delta > 0$ (λ_1, λ_2 reali distinte): $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$
2. Se $\Delta = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$): $\varphi_1(x) = e^{\lambda x}$, $\varphi_2(x) = x e^{\lambda x}$
3. Se $\Delta < 0$ ($\lambda_{1,2} = u \pm i v$): $\varphi_1(x) = e^{ux} \cos(vx)$, $\varphi_2(x) = e^{ux} \sin(vx)$

(ii) Se $b(x) = e^{rx}\left(P(x)\cos(sx) + Q(x)\sin(sx)\right)$ per opportuni $r, s \in \mathbb{R}$ e $P(x), Q(x)$ polinomi reali, sia μ la molteplicità di $\gamma := r + is$ come soluz. dell'eq. caratteristica (dunque $\gamma = \{0, 1, 2\}$).
Allora una soluz. part. dell'eq. completa è del tipo
$$\tilde{\varphi}(x) = x^\mu e^{rx}\left(R(x)\cos(sx) + S(x)\sin(sx)\right)$$
ove $R(x)$ e $S(x)$ sono polinomi reali di grado al più uguale al massimo tra i gradi di $P(x)$ e $Q(x)$.

Quest'ultima Proposizione segue facilmente dalla precedente: si noti che nel caso $\Delta < 0$ si è rimpiazzata la base $\{\varphi_1(x) = e^{(u+iv)x}, \varphi_2(x) = e^{(u-iv)x}\}$ con la base $\{\psi_1(x) = e^{ux}\cos(vx), \psi_2(x) = e^{ux}\sin(vx)\}$ ottenuta dalla precedente applicando una trasformazione lineare invertibile:
$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \qquad \left(\det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2i & -1/2i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2} \neq 0\right)$$

Ora qualche esercizio.

• $$\boxed{\begin{cases} 2y'' - y' - y = 2e^x + 1 \\ y(0) = -7, \quad y'(0) = 5 \end{cases}}$$

Per il T. Cauchy le soluzioni esiste ed è unica; inoltre il suo dominio sarà tutto $\mathbb{R}$, poiché l'equazione diff. è lineare, e tutte le funzioni di x che in essa compaiono sono definite su tutto $I = \mathbb{R}$.

Iniziamo da (1): Trovare un sist. fond. $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ per l'omogenea associata.

Equazione caratteristica: $2z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z = \alpha_1 = -\frac{1}{2}$ (molt. $m_1 = 1$), $z = \alpha_2 = 1$ (molt. $m_2 = 1$) $\Rightarrow \varphi_1(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, $\varphi_2(x) = e^x$.

Dunque le soluz. del pb. omogeneo $2y'' - y' - y = 0$ sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = Ae^{-\frac{x}{2}} + Be^x$, $A, B \in \mathbb{C}$.

Per il pb. (2): trovare una soluzione particolare $\tilde{\varphi}(x)$ di $2y'' - y' - y = \overbrace{2e^x + 1}^{b(x)}$.

Il mio $b(x) = \overbrace{2e^x}^{b_1(x)} + \overbrace{1}^{b_2(x)}$ si presenta nella forma $e^{rx}\left(P(x)\cos(sx) + Q(x)\sin(sx)\right)$ per opportuni $r, s, P(x)$ e $Q(x)$? Tutto intero è impossibile: ma, vedendo come $b = b_1 + b_2$, è possibile per $b_1(x)$ e $b_2(x)$ separatamente.

Cerco allora una soluz. part. $\tilde{\varphi}_1(x)$ per $b_1(x)$, una $\tilde{\varphi}_2(x)$ per $b_2(x)$ e poi, sommandole, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2$ sarà sol. part. per $b(x)$ (Principio sovrapposizione).

- $b_1(x) = 2e^x$. $r = 1$, $s = 0$, $P(x) = 2$, $Q(x)$ a piacere (scelgo $Q(x) = 0$).

  $\gamma = r + is = 1$ è soluz. caratteristica di molt. $\mu = 1$ (caso "risonante"): dunque una sol. part. sarà del tipo $\tilde{\varphi}_1(x) = Kxe^x$ con $K \in \mathbb{R}$ da determinare.

  Bisogna che $2\tilde{\varphi}_1'' - \tilde{\varphi}_1' - \varphi_1 = 2e^x$, ovvero

  $$2K(\cancel{x}+2)e^x - K(\cancel{x}+1)e^x - \cancel{Kxe^x} = 2e^x \quad \text{cioè} \quad 3Ke^x = 2e^x$$

  $\Rightarrow K = \frac{2}{3}$. Dunque $\tilde{\varphi}_1(x) = \frac{2}{3}xe^x$.

- $b_2(x)=1$. $r=s=0$, $P(x)=1$, $Q(x)$ a piacere (scelgo $Q(x)=0$)
$\gamma=0+i0=0$ non è soluzione caratteristica ($\mu=0$): dunque una sol. part. sarà del tipo $\tilde{\varphi}_2(x)=h$ con $h\in\mathbb{R}$ da determinare.
Bisogna che $2\tilde{\varphi}_2''-\tilde{\varphi}_2'-\tilde{\varphi}_2=1$, ovvero $0-0-h=1$, da cui $h=-1$.
Pertanto $\tilde{\varphi}_2(x)\equiv-1$.

Ne segue che $\tilde{\varphi}(x)=\frac{2}{3}xe^x-1$ è sol. particolare per $b(x)=2e^x+1$.
Dunque le soluzioni dell'eq. diff. $2y''-y'-y=2e^x+1$ sono tutte e sole quelle del tipo

$$y(x)=Ae^{-x/2}+Be^x+\frac{2}{3}xe^x-1 \quad \text{al variare di } A,B\in\mathbb{C}.$$

In particolare $y'=-\frac{1}{2}Ae^{-x/2}+Be^x+\frac{2}{3}(x+1)e^x$: dunque imponendo il dato di Cauchy $(y(0),y'(0))=(-7,5)$ si trova

$$\begin{cases} A+B-1=-7 \\ -\frac{1}{2}A+B+\frac{2}{3}=5 \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} B=-A-6 \\ -\frac{1}{2}A-A-6+\frac{2}{3}=5 \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A=-\frac{62}{9} \\ B=8/9 \end{cases}.$$

La soluzione cercata è così $y(x)=-\frac{62}{9}e^{-x/2}+\left(\frac{2}{3}x+8/9\right)e^x-1$.