ANALISI MATEMATICA I
Università di Padova
Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15
Lezione di mercoledì 14/01/2015

Proviamo ora a determinare una soluzione particolare del problema completo di ieri usando il <u>metodo di Lagrange</u> (generale) anziché quello dei coeff. indeterminati (più specifico), con cui si era trovato $\tilde{\varphi}(x) = \frac{2}{3} x e^x - 1$.

$$y'' - \frac{1}{2} y' - \frac{1}{2} = \overbrace{e^x + 1/2}^{b(x)} \quad . \qquad \varphi_1(x) = e^{-x/2}, \quad \varphi_2(x) = e^x .$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) = \alpha_1(x)\, e^{-x/2} + \alpha_2(x)\, e^x, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \alpha_1(x) = -\displaystyle\int \frac{\varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}\, b(x)\, dx \\ \alpha_2(x) = \displaystyle\int \frac{\varphi_1}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}\, b(x)\, dx \end{cases}$$

$$\varphi_1' = -\frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \varphi_2' = e^x \implies \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2 = \frac{3}{2} e^{x/2}$$

$$\alpha_1(x) = -\int \frac{e^x}{\frac{3}{2} e^{x/2}} \left(e^x + \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{2}{3} \int \left(e^{3x/2} + \frac{1}{2} e^{x/2}\right) dx = -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} e^{3x/2} + e^{x/2}\right)$$

$$\alpha_2(x) = \int \frac{e^{-x/2}}{\frac{3}{2} e^{x/2}} \left(e^x + 1/2\right) dx = \frac{2}{3} \int \left(1 + \frac{1}{2} e^{-x}\right) dx = \frac{2}{3} \left(x - \frac{1}{2} e^{-x}\right).$$

$$\tilde{\tilde{\varphi}}(x) = -\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} e^{3x/2} + e^{x/2}\right) e^{-x/2} + \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2} e^{-x}\right) e^x = -\frac{4}{9} e^x - 1 + \frac{2}{3} x e^x = \tilde{\varphi} - \frac{4}{9} e^x$$

Notiamo che $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\tilde{\varphi}}$ sono diverse: tuttavia, poiché esse differiscono per una soluzione dell'equazione omogenea ("un vettore del sottospazio lineare"), lo spazio delle soluzioni dell'equazione completa ("il sottospazio affine") non cambia.

I risultati enunciati ieri (sulla struttura dello spazio delle soluzioni di un'e.d.o. lineare) verranno dimostrati con più agio e generalità in Analisi $\underline{\text{III}}$; tuttavia, qualche verifica possiamo comunque permettercela, perlomeno in qualche caso di base. Ad esempio: verifichiamo che

Prop. Data l'equazione diff. omogenea a coefficienti costanti

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \, ,$$

e detto $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ il polinomio caratteristico, se $\alpha \in \mathbb{C}$ è radice di $p(z)$ almeno doppia allora $e^{\alpha x}$ e $x e^{\alpha x}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'eq. differenziale.

Dim. • $\varphi(x) = e^{\alpha x}$, $\varphi'(x) = \alpha e^{\alpha x}$, $\dots$, $\varphi^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x}$

Dunque $a_n \varphi^{(n)} + \dots + a_0 \varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k e^{\alpha x}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \right) e^{\alpha x} = \overset{0}{\overset{\shortparallel}{p(\alpha)}}\, e^{\alpha x} = 0 \, .$$

• $\varphi(x) = x e^{\alpha x}$, $\varphi'(x) = (1 + \alpha x) e^{\alpha x}$, $\varphi''(x) = (2\alpha + \alpha^2 x) e^{\alpha x}$, $\varphi'''(x) = (3\alpha^2 + \alpha^3 x) e^{\alpha x}$, $\dots$, $\varphi^{(k)}(x) = (k \alpha^{k-1} + \alpha^k x) e^{\alpha x}$

Dunque $\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (k \alpha^{k-1} + \alpha^k x) e^{\alpha x} =$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} k a_k \alpha^{k-1} + x \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \right) e^{\alpha x} = \Big(\overset{0 \text{ per ipotesi!}}{\overset{\shortparallel}{p'(\alpha)}} + x \overset{0}{\overset{\shortparallel}{p(\alpha)}} \Big) e^{\alpha x} = 0$$

Sono lin. indip.? Basta controllare che $e^{\alpha x}$ e $x e^{\alpha x}$ non siano funzioni proporzionali, ovvero che $\nexists\, u \in \mathbb{C}$ t.c. $x e^{\alpha x} = u e^{\alpha x}$ $\forall x$ ovvero $x = u$ $\forall x$, il che è ovviamente falso. $\square$

Nella dimostrazione si è usato il seguente

Lemma Dato un polinomio complesso $p(z)$, allora $\alpha \in \mathbb{C}$ è una sua radice almeno doppia $\iff$ $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$.

Dim. "$\Rightarrow$" Per Ruffini $p(z) = (z - \alpha)^2 q(z)$, $\Rightarrow$

$$p'(z) = 2(z-\alpha) q(z) + (z-\alpha)^2 q'(z)$$
$$= (z-\alpha)\big(2q(z) + (z-\alpha) q'(z)\big).$$

Dunque $p(\alpha) = p'(\alpha) = 0$.

"$\Leftarrow$" $\quad p(\alpha)=0 \Rightarrow$ (Ruffini) $p(z) = (z-\alpha)\, r(z)$

$\Rightarrow p'(z) = r(z) + (z-\alpha)\, r'(z)$.

$p'(\alpha) = r(\alpha) \overset{\text{ipotesi}}{=} 0 \Rightarrow$ (Ruffini) $r(z) = (z-\alpha)\, q(z)$.

Ma allora $p(z) = (z-\alpha)\, r(z) = (z-\alpha)^2 q(z)$. $\square$

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = \overset{b_1}{2x} + \overset{b_2}{e^{-2x}} + \overset{b_3}{25x\cos x} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Eq. caratt. $z^2+4z+4=0 \Rightarrow z=-2$ doppia. Così le soluz. dell'eq. omogenea sono $y(x) = Ae^{-2x} + Bxe^{-2x} = (A+Bx)e^{-2x}$, con $A, B \in \mathbb{C}$

- $b_1(x) = 2x$. Si esprime nella forma $e^{rx}\left(P(x)\cos(sx) + Q(x)\sin(sx)\right)$ con $r=s=0$, $P(x)=2x$, $Q(x)$ qualunque (scelgo $Q(x)=0$).
  $\gamma = r+is = 0$ non è rad. caratt. ($\mu=0$) $\Rightarrow$ sol. part. $\tilde{\varphi}_1(x) = ax+b$.
  $\tilde{\varphi}_1' = a$, $\tilde{\varphi}_1'' = 0 \Rightarrow \quad 0 + 4a + 4(ax+b) = 2x$, $\quad 4ax + 4(a+b) = 2x$
  $\begin{cases} 4a = 2 \\ a+b=0 \end{cases}$ $\quad a = 1/2$, $b = -1/2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\varphi}_1 = \dfrac{x-1}{2}$

- $b_2(x) = e^{-2x}$: $r=-2$, $s=0$, $P(x)=1$, $Q(x)$ qualunque $(=0)$
  $\gamma = r+is = -2$ è rad. caratt. doppia ($\mu=2$) $\Rightarrow$ sol. part. $\tilde{\varphi}_2 = Kx^2e^{-2x}$
  $\tilde{\varphi}_2' = K(2x-2x^2)e^{-2x}$, $\tilde{\varphi}_2'' = K(2-8x+4x^2)e^{-2x} \Rightarrow$
  $Ke^{-2x}\left(2 \cancel{-8x} \cancel{+4x^2} \cancel{+8x} \cancel{-8x^2} \cancel{+4x^2}\right) = e^{-2x} \qquad 2Ke^{-2x} = e^{-2x}$
  dunque $K = 1/2 \Rightarrow \tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-2x}$

• $b_3(x) = 25x\cos x$: $r=0$, $s=1$, $P(x) = 25x$, $Q(x)=0$

$\gamma = r+is = i$ non è rad. caratt. $(\mu=0)$ $\Rightarrow$ sol. part. $\tilde{\varphi}_3(x) = (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x$

$\tilde{\varphi}_3' = (cx+d+a)\cos x + (-ax-b+c)\sin x$

$\tilde{\varphi}_3'' = (-ax-b+2c)\cos x + (-cx-d-2a)\sin x$

$$\tilde{\varphi}_3'' + 4\tilde{\varphi}_3' + 4\tilde{\varphi}_3 = \begin{pmatrix} -ax-b+2c \\ +4cx+4d+4a \\ +4ax+4b \end{pmatrix}\cos x + \begin{pmatrix} -cx-d-2a \\ -4ax-4b+4c \\ +4cx+4d \end{pmatrix}\sin x = 25x\cos x$$

$$\begin{cases} 3a+4c = 25 \\ 4a+3b+2c+4d = 0 \\ -4a+3c = 0 \\ -2a-4b+4c+3d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \frac{4}{3}a \\ a=3,\ c=4 \\ 20+3b+4d=0 \\ 10-4b+3d=0 \end{cases} \qquad b = \frac{3d+10}{4} \qquad 20 + \frac{9d+30}{4} + 4d = 0$$

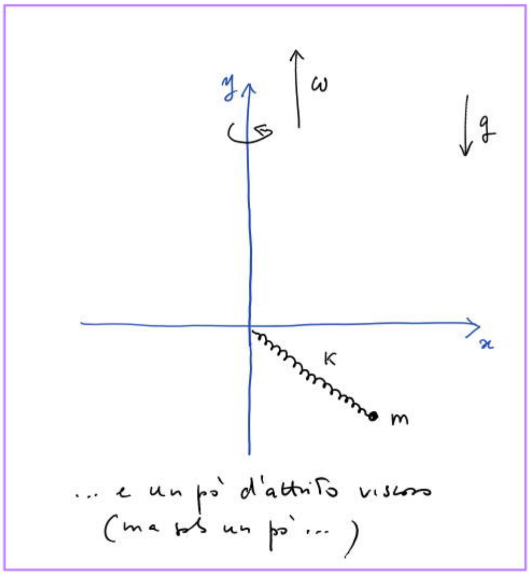
$$80+9d+30+16d=0 \qquad d = -\frac{110}{25} = -\frac{22}{5} \qquad b = \frac{1}{4}\left(-\frac{66}{5}+10\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\tilde{\varphi}_3(x) = \left(3x - \tfrac{4}{5}\right)\cos x + \left(4x - \frac{22}{5}\right)\sin x$$

Sol. generale dell'eq. completa:

$$y(x) = \left(A + Bx + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-2x} + \frac{x-1}{2} + \left(3x - \frac{4}{5}\right)\cos x + \left(4x - \frac{22}{5}\right)\sin x$$

A questo punto, basta derivare e poi porre $y(0)=1$ e $y'(0)=0$ per determinare A e B, e con essi la soluzione del pb. Cauchy.



Determinare la dinamica del sistema con cond. iniziali
$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ e
$(\dot x(0), \dot y(0)) = (0,0)$

Si tratta di un sistema differenziale (vanno determinate $x(t)$ e $y(t)$).

Forze: $(0,-mg) - K(x,y) + m\omega^2(x,0) - \beta(\dot x, \dot y)$ con β piccolo

$$(m\ddot x, m\ddot y) = \left((m\omega^2 - K)x - \beta \dot x,\ -mg - Ky - \beta \dot y\right)$$

$$\begin{cases} \ddot x = (\omega^2 - \Omega^2)x - 2\eta \dot x \\ \ddot y = -\Omega^2 y - 2\eta \dot y - g \end{cases}$$ ove $\Omega := \sqrt{K/m}$, $\eta := \beta/2m$ piccolo

Per y: $\ddot y + 2\eta \dot y + \Omega^2 y = -g$ eq. diff. II ord. lineare a coeff. cost. non omogenea

Eq. caratt. $z^2 + 2\eta z + \Omega^2 = 0$ $\quad z = -\eta \pm \sqrt{\underbrace{\eta^2 - \Omega^2}_{<0 \text{ perché } \eta \text{ piccolo}}} = -\eta \pm i\Omega_{sm}$

ove $\Omega_{sm} := \sqrt{\Omega^2 - \eta^2}$ ("sm" sta per smorzato)

Soluz. dell'omogenea: $y(t) = A e^{-\eta t} \cos(\Omega_{sm} t) + B e^{-\eta t} \sin(\Omega_{sm} t)$, $A, B \in \mathbb{R}$

Soluz. particolare della completa: $r = s = 0$, $P(t) = -g$, $Q(t)$ qualsiasi $(=0)$

γ: $r + is = 0$ non è rad. caratt. $\Rightarrow$ $\tilde y(t) = K$ costante da determinare.

$0 + 0 + \Omega^2 K = -g \Rightarrow K = -g/\Omega^2$

ampiezza, fase: $\mathcal{A}\cos(\Omega_{sm} t + \phi)$

Sol. generale: $$y(t) = \underbrace{e^{-\eta t}\left(A\cos(\Omega_{sm} t) + B\sin(\Omega_{sm} t)\right)}_{\text{termine transitorio: oscillazioni che si spengono a causa dell'attrito viscoso}} \underbrace{- g/\Omega^2}_{\text{posizione di equilibrio tra molla e gravità}}$$

Imponendo $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$ si determinano A e B, oppure A e ϕ:

$$y(0) = A - g/\Omega^2$$

$$y'(t) = e^{-\eta t}\left((B\Omega_{sm} - \eta A)\cos(\Omega_{sm} t) + (-A\Omega_{sm} - \eta B)\sin(\Omega_{sm} t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = B\Omega_{sm} - \eta A$$

$$\begin{cases} A - g/\Omega^2 = y_0 \\ B\Omega_{sm} - \eta A = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = y_0 + g/\Omega^2 \\ B = \dfrac{\eta}{\Omega_{sm}} A = \dfrac{\eta}{\Omega_{sm}}\left(y_0 + g/\Omega^2\right) \end{cases}$$

La quota $y(t)$ tende asintoticamente all'equilibrio $\tilde{y} = -g/\Omega^2$ con oscillazioni di frequenza costante Ω_{sm} ma sempre meno ampie.

Per x: $\quad \ddot{x} + 2\eta\dot{x} + (\Omega^2 - \omega^2)x = 0$ eq. diff. II° ordine omogenea a coeff. costanti.

Eq. caratteristica $z^2 + 2\eta z + \Omega^2 - \omega^2 = 0 \qquad z = -\eta \pm \sqrt{(\omega^2+\eta^2) - \Omega^2}$

Posto $\sigma := \sqrt{|\Omega^2 - (\omega^2+\eta^2)|}$ si hanno tre casi (sempre con η piccolo):

(1) $\Omega > \sqrt{\omega^2+\eta^2}$ (Molla forte, o rotazione lenta)

In tal caso $z = -\eta \pm i\sigma \Rightarrow x(t) = e^{-\eta t}(A\cos(\sigma t) + B\sin(\sigma t))$

Dunque $\dot{x}(t) = e^{-\eta t}\left((B\sigma - \eta A)\cos(\sigma t) + (-A\sigma - \eta B)\sin(\sigma t)\right)$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B\sigma - \eta A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{\eta}{\sigma} x_0 \end{cases}$$

Oscillazione di qua e di là dell'asse y di frequenza σ che tendono a spegnersi.

(2) $\Omega = \sqrt{\omega^2+\eta^2}$ (caso risonante: la forza centrifuga "equilibra" la molla)

$z = -\eta$ doppio $\Rightarrow x(t) = e^{-\eta t}(A + Bt)$,

dunque $\dot{x}(t) = e^{-\eta t}(B - \eta A - \eta B t)$

$$\begin{cases} x(0) = A = x_0 \\ \dot{x}(0) = B - \eta A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \eta x_0 \end{cases}$$. Dunque

Perciò $x(t) = x_0 e^{-\eta t}(1 + \eta t)$ (lento avvicinamento all'asse y)

(3) $\Omega < \sqrt{\omega^2+\eta^2}$ (molle debole, o rotazione veloce)

$z = -\eta \pm \sigma \implies x(t) = A\, e^{(\sigma-\eta)t} + B\, e^{(-\sigma-\eta)t}$

$\dot{x}(t) = A(\sigma-\eta)e^{(\sigma-\eta)t} + B(-\sigma-\eta)e^{(-\sigma-\eta)t}$

$$\begin{cases} x(0) = A+B = x_0 \\ \dot{x}(0) = A(\sigma-\eta) + B(-\sigma-\eta) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A = (1+\eta/\sigma)\, x_0/2 \\ B = (1-\eta/\sigma)\, x_0/2 \end{cases}$$

Perciò $x(t) = \dfrac{x_0}{2} e^{(\sigma-\eta)t}\left(1+\eta/\sigma + e^{-2\sigma t}(1+\eta/\sigma)\right)$

Ad esempio, trascurando l'attrito ($\eta=0$) si ottiene

$x(t) = \dfrac{x_0}{2} e^{\sigma t}(1+e^{-2\sigma t}) = x_0 \cosh(\sigma t)$ (allontanamento dall'asse y)

$\boxed{\text{ESERCIZI}}$ (La lista segue quella degli esercizi assegnati in precedenza)

9. Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'eq. diff. $y''+4y'+5y = b(x)$ nei casi $b(x)=10$, $b(x) = x+e^x$ oppure $b(x) = 3e^{-2x}\sin x$, verificando che per $b(x)=10$ sono quelle indicate nell'ex. di una scorsa lezione. Risolvere per ognuno dei tre casi il pb. Cauchy con $y(0)=0$ e $y'(0)=-1$.

10. Determinare le soluzioni delle sgg. eq. diff. il cui grafico è tangente in $x=0$ alla parabola $y-x^2=0$:
$3y''+2y'-y = x+\cos x$; $y''+3y = 5\sin 3x - 4x + e^x$; $9y''-y = x^3$.

11. Trovare in due modi diversi le soluzioni di $y''-2y' = 2x$.

12. Trovare le soluzioni $y(x)$ di $y'''+iy = e^{ix}-2$ ($\underline{\text{III}}$° ordine) e di $y^{(IV)}-y = 3-2x\sin x$ ($\underline{\text{IV}}$° ordine).

13. Trovare le soluzioni $y(x)$ di $y''-2iy = 3e^x\sin x - ix^2$ (interpretando $3e^x \sin x = 3e^x \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \dfrac{3}{2}i\left(e^{(1-i)x} - e^{(1+i)x}\right)$).