ANALISI MATEMATICA I

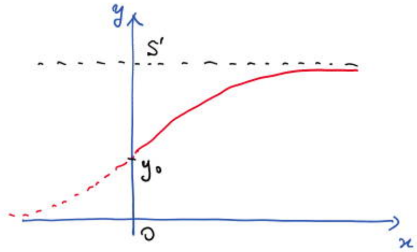
Università di Padova

Lauree in Fisica e Astronomia - A.A. 2014/15

Lezione di lunedì 19/01/2015

2. Risolvere l'equazione logistica $\begin{cases} y' = a(1-y/S)\,y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ al variare di $0 < y_0 < S$.

(vedi spot, con $y(x) \rightsquigarrow p(t)$)



Soluz. costanti? $y \equiv K \iff 0 = a(1-K/S)K \quad \forall x$

$\iff (K=0) \vee (K=S)$

Si ha $y' = g(y)$ con g di cl. C^1 $\Rightarrow$ per Cauchy c'è $\exists!$ delle soluzioni $\Rightarrow$ le soluz cercate avrà il grafico confinato tra le quote 0 e S. Ciò detto, risolviamo:

$$\frac{S}{y(S-y)}\,dy = a\,dx \rightsquigarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{S-y}\right)dy = a\,dx \rightsquigarrow \log\left(\frac{y}{S-y}\right) = ax + K.$$

Determiniamo K: $\log\left(\frac{y_0}{S-y_0}\right) = 0 + K \Rightarrow K = \log\left(\frac{y_0}{S-y_0}\right)$. Perciò:

$$\log\left(\frac{y}{S-y}\right) = ax + \log\left(\frac{y_0}{S-y_0}\right) \overset{(\exp)}{\rightsquigarrow} \frac{y}{S-y} = \frac{y_0}{S-y_0}\,e^{ax}$$

$$y = \left(\frac{y_0}{S-y_0}\,e^{ax}\right)(S-y) \rightsquigarrow \left(1 + \frac{y_0}{S-y_0}\,e^{ax}\right) y = y_0\,\frac{S e^{ax}}{S-y_0}$$

$$\rightsquigarrow \quad y(x) = y_0\,\frac{S e^{ax}}{\cancel{S-y_0}} \cdot \frac{\cancel{S-y_0}}{S-y_0+y_0 e^{ax}} = y_0\,\frac{S e^{ax}}{S + y_0(e^{ax}-1)} \quad \text{(sigmoide)}$$

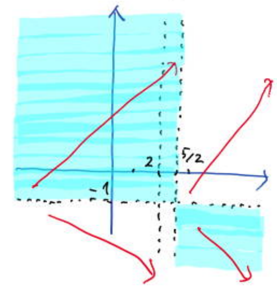
---

6. Data $(x-2)^2\,y' = y+1$ farne l'analisi a priori su costanti, crescenza, convessità. Trovarne poi tutte le soluzioni (in questo caso in due modi, sia come variabili separabili che come lineare), specificando se ve ne sono con dominio $\mathbb{R}$.

Visto che dovremo dividere per $(x-2)^2$ per cercare di risolvere, iniziamo col vedere cosa succede quando $x=2$. Ovvero: se una soluzione $y(x)$ per caso è definita anche in $x=2$, cosa deve succedere? $0 \cdot y'(2) = y(2)+1$ ovvero $y(2) = -1$. Dunque un'eventuale soluzione definita in $x=2$ deve valere ivi -1.

Costanti. $y \equiv k \rightsquigarrow 0 = k+1 \ \forall x \iff k = -1$. Dunque l'unica sol. costante è $y \equiv -1$.

Crescenza $\quad y' = \dfrac{y+1}{(x-2)^2} > 0$ per $y > -1$.



Convessità $\quad y'' = \dfrac{y' \cdot (x-2)^2 - (y+1) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \dfrac{(y+1)(5-2x)}{(x-2)^4}$

dunque le sol. sono convesse nelle zone azzurre.
(e per $x = 5/2$ sono previsti dei flessi)

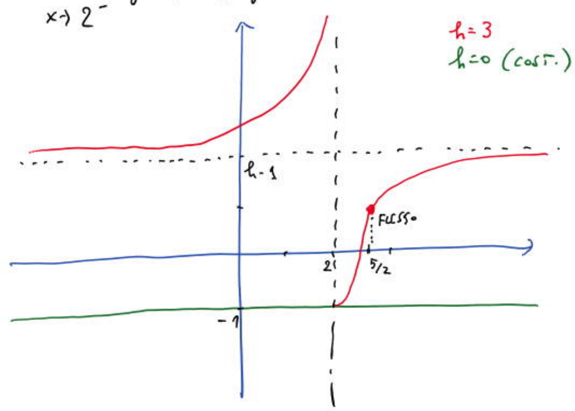
Soluzioni non costanti: $\dfrac{dy}{y+1} = \dfrac{dx}{(x-2)^2} \rightsquigarrow \log|y+1| = -\dfrac{1}{x-2} + K$

$\rightsquigarrow |y+1| = e^K e^{-\frac{1}{x-2}} \rightsquigarrow y+1 = h e^{-\frac{1}{x-2}}$ con $h \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$

$y(x) = h e^{-\frac{1}{x-2}} - 1$ (per $h=0$ si riottiene la sol. costante $y \equiv -1$)

Per $h \neq 0$ si ha $\lim_{x \to 2^+} y(x) = -1$, $\lim_{x \to 2^-} y(x) = (\mathrm{sign}\, h)\, \infty$

dunque non c'è alcuna speranza di estendere qualcuna di queste soluzioni anche per $x = 2$.
Ne segue che l'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ è la costante $y \equiv -1$.



Risolvendo l'e.d.o. come lineare: $y' - \dfrac{1}{(x-2)^2} y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$p(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2} \implies P(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $\displaystyle\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int \frac{1}{(x-2)^2} e^{+\frac{1}{x-2}}\, dx$

$= -e^{\frac{1}{x-2}}$. Dunque $y(x) = e^{-\frac{1}{x-2}}\left(-e^{\frac{1}{x-2}} + K\right) = K e^{-\frac{1}{x-2}} - 1$, come prima.

Due parole su un esempio di sistema differenziale autonomo del I° ordine accoppiato e non lineare (già abbiamo parlato di un esempio lineare su $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$):

MODELLO PREDA-PREDATORE DI VOLTERRA-LOTKA

Si considerino, all'interno di un ambiente molto vasto, due specie di animali. La prima (PREDE) trovi nell'ambiente spazio e cibo a volontà, eliminando così ogni soglia logistica; la seconda (PREDATORI) trovi nell'ambiente spazio a volontà ma nessun cibo disponibile, tranne quello che le riesce a procurarsi cacciando le prede.

Esempio originale (da cui Vito Volterra elaborò il suo modello): il pesce commestibile e il pesce predatore nel mare Adriatico. Storicamente, i ricercatori dell'Università di Padova notarono che, durante la I° guerra mondiale, il drastico calo della pesca nell'Adriatico (dovuto alla paura che i pescherecci venissero colpiti da navi militari) stava provocando un aumento non del pesce commestibile ma del pesce predatore (squaletti etc.), contrariamente a quanto essi si aspettavano. Ne chiesero ragione all'insigne matematico Volterra, che risolse il dilemma spiegando col suo modello, di cui parliamo ora.

—

x = PREDE y = PREDATORI . Interessa l'evoluzione temporale di ciascuna delle due popolazioni, ovvero $t \mapsto (x(t), y(t))$.

L'evoluzione obbedisce a una legge del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d > 0$$

che, pensando ad esempio al caso di pesce commestibile e pesce predatore all'interno dell'ambiente marino, si può comprendere come segue:

COMPONENTE AMBIENTALE

COMPONENTE DI INTERAZIONE TRA PREDE E PREDATORI

crescita malthusiana: ambiente sconfinato e ricco di cibo per le prede

decrescita malthusiana: ambiente sconfinato ma senza cibo per i predatori

$$\begin{cases} \dot{x} = ax \;\; - bxy \\ \dot{y} = -cy \;\; + dxy \end{cases}$$

la frequenza di incontri (proporzionale alle due popolazioni) risulta LETALE per le prede e VITALE per i predatori

Una soluzione del problema è la costante $(x_0, y_0) = (c/d, a/b)$

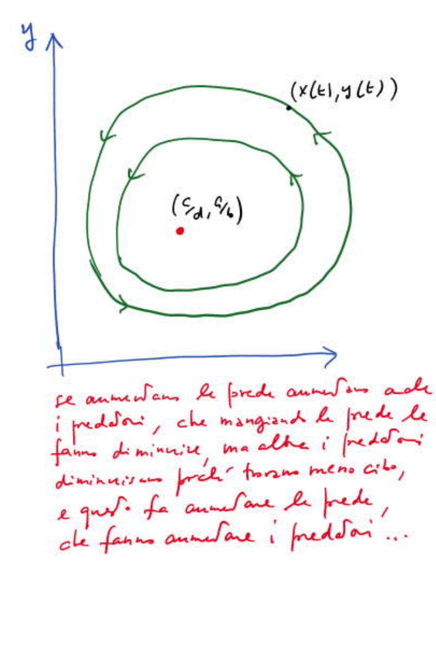
$\left(\text{infatti} \quad \begin{cases} 0 = a \cdot c/d - b \cdot c/d \cdot a/b \\ 0 = -c \cdot a/b + d \cdot c/d \cdot a/b \end{cases} \right)$

E le soluzioni non costanti $t \mapsto (x(t), y(t))$?

In Analisi III si vedrà che:

- le soluzioni sono periodiche e eterne (hanno dominio $t \in \mathbb{R}$)
- la loro immagine è un circuito che gira attorno alla soluzione costante (EQUILIBRIO), che risulta essere anche il valor medio delle popolazioni $x(t)$ e $y(t)$ nel periodo.

Ovvero, detto $T > 0$ il periodo temporale, $\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt \right) = (c/d, a/b)$.



se aumentano le prede aumentano anche i predatori, che mangiando le prede le fanno diminuire, ma allora i predatori diminuiscono perché trovano meno cibo, e questo fa aumentare le prede, che fanno aumentare i predatori ...

Supponiamo ora che le condizioni ambientali migliorino oppure peggiorino.
Questo si può modellizzare aggiungendo una crescita o decrescita malthusiana uguale per entrambe le popolazioni ($\varepsilon > 0$):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \pm \varepsilon x = (a+\varepsilon)x - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \pm \varepsilon y = -(c-\varepsilon)y + dxy \end{cases}$$

$\leadsto$ il problema è uguale al precedente con parametri alterati, e il nuovo valor medio si attesta su $\left(\frac{c \mp \varepsilon}{d}, \frac{a \pm \varepsilon}{b} \right)$

Dunque se le condizioni ambientali migliorano, ne risultano avvantaggiati i predatori. Ciò è avvenuto ad esempio:

- nell'Adriatico durante la I^a guerra mondiale, in cui la pesca era drasticamente diminuita: si era notato un sensibile aumento non delle specie di pesce commestibile ma delle specie dei predatori (squaletti etc...).

Invece se le condizioni ambientali peggiorano, ne risultano avvantaggiate le prede. Ad esempio:

- intensificando moderatamente la pesca (sia del pesce commestibile che dei predatori) si ottiene un aumento del pesce commestibile.
- Trattare una coltivazione con insetticidi, che sterminano sia i parassiti sia i loro predatori naturali (ad esempio le coccinelle), può portare alla fine ad un peggioramento dell'infestazione parassitaria.

9. Trovare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'eq. diff. $y''+4y'+5y = b(x)$ nei casi $b(x)=10$, $b(x) = x+e^x$ oppure $b(x) = 3e^{-2x}\sin x$, verificando che per $b(x)=10$ sono quelle indicate nell'ex. di una scorsa lezione.
Risolvere per ognuno dei tre con il pb. Cauchy con $y(0)=0$ e $y'(0)=-1$.

- Eq. caratt. $z^2+4z+5=0$ $\quad z=-2\pm i$

  $\rightsquigarrow$ soluz. dell'omogenea: $y(x) = A e^{-2x}\cos x + B e^{-2x}\sin x \quad (A,B\in\mathbb{C})$

  - $b(x)=10 \quad \tilde{y}(x)=a \quad \tilde{y}'=\tilde{y}''\equiv 0 \quad 0+4\cdot 0+5\cdot a=10 \quad a=2 \quad \tilde{y}\equiv 2$

    spazio soluzioni: $y(x) = 2+e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

  - $b(x) = \overset{b_1}{x}+\overset{b_2}{e^x}$. Per b_1: $\tilde{y}_1 = ax+b \quad \tilde{y}_1'=a \quad \tilde{y}''=0 \quad 0+4a+5(ax+b)=x$

    $5ax+(4a+5b)=x \rightsquigarrow a=1/5,\ b=-\frac{4a}{5}=-4/25$

    Per b_2: $\tilde{y}_2 = ae^x = \tilde{y}_2' = \tilde{y}_2'' \rightsquigarrow 10ae^x = e^x \rightsquigarrow a=\frac{1}{10}$

    spazio soluz.: $y(x) = e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)+\frac{1}{50}(10x-8+5e^x)$

  - $b(x)=3e^{-2x}\sin x$ $\quad$ poiché $-2+i$ è radice caratt. semplice, si avrà

    $\tilde{y} = xe^{-2x}(a\cos x+b\sin x)$ e si procede come prima (calcoli noiosi).

    Alternativa: $3e^{-2x}\sin x = \mathrm{Im}(3e^{\alpha x})$ ove $\alpha=-2+i$

    Idea: considero $y''+4y'+5y = 3e^{\alpha x}$. Se trovo una soluz. part. $\tilde{\psi}(x)$, allora $\tilde{\varphi}(x) := \mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(x)$ lo è per il pb che mi interessa, perché

    $\tilde{\psi}''+4\tilde{\psi}'+5\tilde{\psi} = 3e^{\alpha x} \rightsquigarrow (\mathrm{Im}\,\tilde{\psi})''+4(\mathrm{Im}\,\tilde{\psi})'+5(\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}) = \mathrm{Im}(3e^{\alpha x})$

    (attenzione: la cosa funziona perché siamo a coeff. costanti REALI).

    Cerchiamo $\tilde{\psi}(x)=axe^{\alpha x} \rightsquigarrow \tilde{\psi}'(x) = a(1+\alpha x)e^{\alpha x} \rightsquigarrow \tilde{\psi}''(x) = a(2\alpha+\alpha^2 x)e^{\alpha x}$

    va via perché α è rad. caratt.

    $\tilde{\psi}''+4\tilde{\psi}'+5\tilde{\psi} = 3e^{\alpha x} \rightsquigarrow ae^{\alpha x}(2\alpha+\cancel{\alpha^2 x}+4+\cancel{4\alpha x}+\cancel{5x}) = 3e^{\alpha x}$

    $\rightsquigarrow 2a\overset{=i}{(\alpha+2)}e^{\alpha x} = 3e^{\alpha x} \rightsquigarrow 2ai=3 \rightsquigarrow a=\frac{3}{2i}=-\frac{3}{2}i$

$$\rightsquigarrow \tilde{\Psi} = -\tfrac{3}{2} i x e^{\alpha x} = -\tfrac{3}{2} i x e^{-2x}(\cos x + i \sin x) = -\tfrac{3}{2} x e^{-2x}(-\sin x + i \cos x)$$

$$= \left(+\tfrac{3}{2} x e^{-2x} \sin x\right) + i \left(-\tfrac{3}{2} x e^{-2x} \cos x\right) \quad \tilde{\varphi}(x)$$

Si lascia determinare le soluz. del pb. Cauchy in ciascuno dei tre casi.

RISOLUZIONE DEGLI ALTRI ESERCIZI ASSEGNATI NELLE SCORSE LEZIONI

1. Studiare il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = a|y|^{\alpha} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ al variare di $a, y_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha \neq 1$.

Per iniziare, $f(x,y) = a|y|^{\alpha}$ è definita tranne che nei punti $(x,0)$ nel caso in cui $\alpha < 0$, ed è continua nel suo dominio; inoltre è Lipschitziana (anzi, anche $\mathcal{C}^1$) rispetto a y tranne che nei punti $(x,0)$ quando $0 < \alpha < 1$. Ne segue che ci sarà esistenza e unicità locale della soluzione per tutti i dati $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$, o anche con $y_0 = 0$ purché $\alpha = 0$ oppure $\alpha > 1$. Invece per i dati $y(x_0) = 0$ con $0 < \alpha < 1$ è garantita l'esistenza ma non l'unicità, come già visto nel caso $y' = 2\sqrt{|y|}$ (ove $a = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$). Passiamo ora alle soluzioni con la condizione iniziale $y(0) = y_0$.

Se $y_0 = 0$ (con $\alpha \geq 0$). Se $\alpha = 0$ si ha $y' = a \rightsquigarrow y(x) = ax + k \xrightarrow{y(0)=0} y(x) = ax$.

Se $\alpha > 1$: come detto la soluzione è unica, ed è chiaramente $y \equiv 0$.

Se $\alpha > 1$: come detto la soluzione è unica, ed è chiaramente $y \equiv 0$.

Se $0 < \alpha < 1$: anche in questo caso $y \equiv 0$ è soluzione, ma ne spunta anche un'altra, come vedremo tra breve dopo il caso $y_0 \neq 0$. (vedi (*) più sotto)

Se $y_0 \neq 0$: come detto, la soluzione di $y(0) = y_0 \neq 0$ esiste ed è unica.

$|y|^{-\alpha} dy = a\,dx \rightsquigarrow \underset{\text{sign } y}{\sigma} \dfrac{|y|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = ax + K$. Imponendo $y(0) = y_0$ e notando che $\text{sign}\, y_0 = \sigma$ si ha $\sigma \dfrac{|y_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = K$, da cui $\sigma \dfrac{|y|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = ax + \sigma \dfrac{|y_0|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$,

da cui $|y|^{1-\alpha} = \sigma\left(a(1-\alpha)x + \sigma |y_0|^{1-\alpha}\right) = |y_0|^{1-\alpha} + \sigma a(1-\alpha)x$

$\rightsquigarrow |y| = \left(|y_0|^{1-\alpha} + \sigma a(1-\alpha)x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightsquigarrow y(x) = \sigma\left(|y_0|^{1-\alpha} + \sigma a(1-\alpha)x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

(Ad esempio, per $a = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ si trova $y(x) = \sigma\left(\sqrt{|y_0|} + \sigma x\right)^2$, ovvero $y(x) = \sigma\left(x + \sigma\sqrt{|y_0|}\right)^2$, soluzione già evidenziata nella lezione di lunedì 13/1.)

(*) In particolare, pensando a $y_0 \to 0$ nel caso $0 < \alpha < 1$ si evidenzia la funzione $y(x) = \sigma\left(\sigma a(1-\alpha)x\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$, che è un'altra soluzione del pb. con $y(0) = 0$ oltre alla funzione nulla $y \equiv 0$.

Ad es.:
- per $a = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$ si trova $y = \sigma(\sigma x)^2 = \sigma x^2 = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$,
- per $a = 3$ e $\alpha = \frac{2}{3}$ (cioè $\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$) si ha $y = \sigma(\sigma x)^3 = x^3$.

---

3. Data l'eq. diff. $(x+1)y' + 2y = 6x$ farne l'andamento a priori su costanti, crescenza e convessità. Trovarne poi tutte le soluzioni, specificando se ve sono con dominio tutto $\mathbb{R}$ (per risolvere va posta in forma normale, ma poi...)

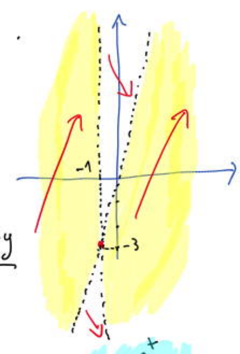
L'eq. $(x+1)y' + 2y = 6x$ è lineare ma non è ancora nella forma normale $y' + p(x)y = q(x)$: per portarla in questa forma dovrò dividere per $x+1$, dunque lavorare per $x \neq -1$. Tuttavia l'equazione ha senso anche per $x = -1$, dunque è opportuno:
1. Iniziare controllando cosa accade quando $x = -1$;
2. Risolvere l'eq. per $x \neq -1$;

3. Alla fine, controllare se qualcuna delle soluzioni trovate può essere estesa (come soluzione!) anche per $x=-1$.

1. Se una soluz. $y(x)$ è definita anche all'intorno di $x_0=-1$, si ha per forza che $(-1+1)\,y'(-1)+2y(-1)=6(-1)$ cioè $y(-1)=-3$. In particolare, se cerco una soluzione t.c. $y(-1)=\alpha$ per un qualunque $\alpha\neq-3$, tale soluzione non esiste. Ciò è o non è in contraddizione col T. Cauchy? No, perché l'applicazione del Teorema è possibile solo nel caso in cui l'equazione si presenti in forma normale $y'=f(x,y)$, cosa che per $x=-1$ è impossibile.

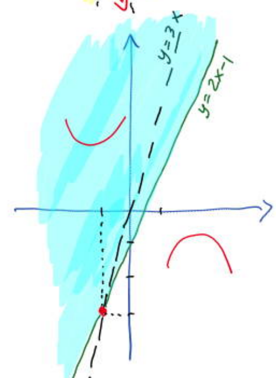
2. Invece per $x\neq-1$ si può scrivere $y'=2\frac{3x-y}{x+1}$, e $f(x,y)=2\frac{3x-y}{x+1}$ soddisfa le ipotesi di Cauchy: dunque la soluzione con dato iniziale $y(x_0)=y_0$ con $x_0\neq-1$ esiste e sarà unica all'intorno di x_0.

Visto che ci siamo, procediamo con l'analisi a priori.



Crescenza: $y'=2\frac{3x-y}{x+1}>0$: il num. $3x-y$ è >0 sotto la retta $y=3x$, il denom. $x+1$ è >0 a destra di $x=-1$, e il segno ne segue per quoziente.

Convessità: $$y''=2\frac{(3-y')(x+1)-1(3x-y)}{(x+1)^2}=2\frac{\left(3-2\frac{3x-y}{x+1}\right)(x+1)-3x+y}{(x+1)^2}$$
$$=2\,\frac{3x+3-6x+2y-3x+y}{(x+1)^2}=6\,\frac{y-2x+1}{(x+1)^2},$$
dunque le soluz. saranno convesse sopra la retta $y=2x-1$.



Costanti $y\equiv k \rightsquigarrow (x+1)\cdot 0+2k=6x \quad \forall x$
$\rightsquigarrow k=3x \quad \forall x$ No.
Non vi sono soluzioni costanti.

Risolviamo ora per $x\neq-1$. Dividendo per $x+1$ si ottiene
$y'+\overset{p(x)}{\frac{2}{x+1}}\,y=\overset{q(x)}{\frac{6x}{x+1}}$. $P(x)=2\log|x+1|=\log(x+1)^2$; $\int e^{P(x)}q(x)\,dx=$
$=\int (x+1)^2\cdot\frac{6x}{x+1}\,dx=2x^3+3x^2$. Dunque le soluz. per $x\neq-1$ sono

$y(x) = e^{-\lg(x+1)^2}(2x^3+3x^2+K) = \dfrac{2x^3+3x^2+K}{(x+1)^2}$, con costante K da scegliere indipendentemente su $]-\infty,-1[$ e su $]-1,+\infty[$ a seconda del dato iniziale.

3. Qualcuna delle soluzioni trovate può essere estesa ad per $x=-1$? Bisognerà, per iniziare, che $\lim_{x\to-1} y(x)$ sia finito: ciò può accadere solo per $K=-1$, in cui c'è forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e si ottiene

$$\frac{2x^3+3x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{(2x-1)\cancel{(x+1)^2}}{\cancel{(x+1)^2}} = 2x-1.$$

Ebbene, le soluzioni $y(x)=2x-1$ sui due intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$ può essere ovviamente estese a una funzione con dominio tutto $\mathbb{R}$, ponendo $f(-1)=2(-1)-1=-3$ ← guarda caso...,

Inoltre $y'(x)\equiv 2 \rightsquigarrow (-1+1)\cdot y'(-1)+2\cdot(-3)=6(-1)$ è soddisfatta.

Pertanto $y(x)=2x-1$ è l'unica soluzione dell'eq. diff. con dominio $\mathbb{R}$.

---

4. Data $yy' = xe^{-y^2}$ determinarne a priori costanti, crescenza, parità; discutere l'applicabilità del T. Cauchy; trovare la soluzione con $y(0)=-1$

Se una soluzione si annulla (cioè se $y(x_0)=0$) si ha $y(x_0)y'(x_0) = x_0 e^{-y(x_0)^2}$, ovvero $0=x_0$: in sostanza una soluzione può annullarsi (eventualmente) solo per $x=0$. Per $y\neq 0$ si ha invece $y' = f(x,y) = \frac{x}{y}e^{-y^2}$, che è continua e $\mathcal{C}^1$ rispetto a y, dunque c'è esistenza e unicità per i dati $y(x_0)=y_0\neq 0$.

Costanti: $y\equiv K \rightsquigarrow 0 = xe^{-K^2}\ \forall x$ No: non ci sono costanti.

Crescenza: $y' = \frac{x}{y}e^{-y^2} > 0$ nel I° e III° quadrante.

Parità e simmetrie. Se $\varphi(x)$ è soluzione con dominio $I\subset\,]0,+\infty[$, allora $\psi(x) := \varphi(-x)$ è soluzione su $-I\subset\,]-\infty,0[$. Infatti

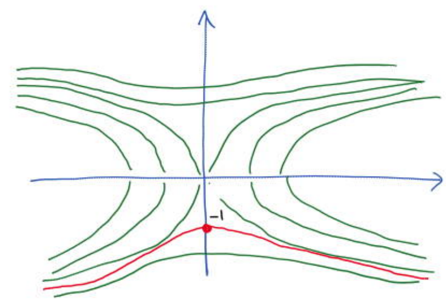
$$\psi'(x) = -\varphi'(-x) = -\frac{(-x)}{\varphi(-x)}e^{-\varphi(-x)^2} = \frac{x}{\psi(x)}e^{-\psi(x)^2}.$$

Ne segue che una soluzione definita all'intorno di $x=0$ sarà necessariamente pari.

Inoltre $\eta(x) := -\varphi(x)$ sarà anch'essa soluzione su I: in effetti

$$\eta'(x) = -\varphi'(x) = -\frac{x}{\varphi(x)} e^{-\varphi(x)^2} = \frac{x}{-\varphi(x)} e^{-(-\varphi(x))^2} = \frac{x}{\eta(x)} e^{-\eta(x)^2}.$$

Passiamo alla soluzione.



$yy' = xe^{-y^2} \rightsquigarrow 2y e^{+y^2} dy = 2x\,dx$

$\rightsquigarrow e^{y^2} = x^2+K \rightsquigarrow y^2 = \log(x^2+K)$

$\rightsquigarrow y = \pm\sqrt{\log(x^2+K)}$,

con dominio dato da $x^2+K \geq 1$,

ovvero $x \in \mathbb{R}$ se $K \geq 1$, oppure

$|x| \geq \sqrt{1-K}$ se $K < 1$.

In particolare, imponendo $y(0) = -1$ si ha $-1 = \pm\sqrt{\log K} \rightsquigarrow$ segno $-$, e $K = e$.

Dunque $y(x) = -\sqrt{\log(x^2+e)}$. (grafico sopra)

---

5. Risolvere $y' = cy + b(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ e con $b(x) = x$ oppure $b(x) = e^{ax}$ con $a \in \mathbb{R}$.

$y' + (-c)y = b(x) \rightsquigarrow y(x) = e^{cx}\left(\int e^{-cx} b(x)\,dx + K\right)$.

- se $b(x) = x$. $\int x e^{-cx} dx = $ (se $c=0$): viene $x^2/2$; (se $c \neq 0$): $= x\frac{e^{-cx}}{-c} - \int \frac{e^{-cx}}{-c} dx = -\frac{cx+1}{c^2} e^{-cx}$

- se $b(x) = e^{ax}$ $\int e^{(a-c)x} dx = $ (se $c=a$): viene x; (se $c \neq a$): $= \frac{e^{(a-c)x}}{a-c}$.

---

7. Stesse domande per $(x-1)y' = y^2$, o per $y' + 2x = 2xy$.
Cosa si può dire su esistenza e unicità locale delle soluzioni?
Determinare infine le soluzioni di ciascuna delle due equazioni tali che $y(0) = -3$, oppure tali che $y(-3) = 0$.

- Iniziamo $(x-1)y' = y^2$. Per il punto $x=1$ si possono ripetere considerazioni già viste in precedenza. L'unica sol. costante è $y \equiv 0$; crescenza per $x>1$; poi $y'' = \left(\frac{y^2}{x-1}\right)' = \frac{2yy'(x-1)-1\cdot y^2}{(x-1)^2} = \frac{2y^3-y^2}{(x-1)^2} = \frac{y^2(2y-1)}{(x-1)^2}$,

dunque convessità per $y > 1/2$. C'è esistenza e unicità per i dati (x_0, y_0) con $x_0 \neq -1$. Soluzioni: $y^{-2}\,dy = \frac{1}{x-1}\,dx \rightsquigarrow -\frac{1}{y} = \log|x-1| + K$

$\rightsquigarrow y(x) = -\frac{1}{\log|x-1|+K}$, definite in $]-\infty, 1[$ oppure in $]1, +\infty[$.

Per l'eventuale prolungabilità delle soluzioni non costanti, notiamo che $\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{\log|x-1|+K}\right) = 0^+$ per ogni $K\in\mathbb{R}$: tuttavia ciò non basta ancora, perché dobbiamo verificare che la prolungabilità sia possibile come funzione derivabile. Ma questo non è possibile, in quanto $y'(x) = \frac{y(x)^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{(\log|x-1|+K)^2}$ tende a $\pm\infty$ quando $x\to 1^{\pm}$.

Soluzioni dei pbb di Cauchy: $y(0) = -3 \rightsquigarrow -\frac{1}{0+K} = -3 \Rightarrow K = 1/3$;

$y(-3) \equiv 0 \rightsquigarrow y \equiv 0$.

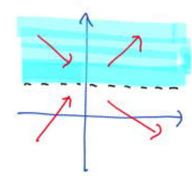
- $y' + 2x = 2xy$, ovvero $y' + (-2x)y = -2x$, lineare.

Come detto, per le eq. lineari sono sempre garantite esistenza e unicità, e anzi già sappiamo che il dominio delle soluzioni sarà $\mathbb{R}$.

Nessuna soluz. costante; crescenza per $y' = 2x(y-1) > 0$;

convessità per $y'' = 2(y-1+xy') = 2(y-1+2x^2(y-1)) =$

$= 2(2x^2+1)(y-1) > 0$ (vedi a destra, zona blu)



Le soluzioni saranno pari:

infatti se $\varphi(x)$ è soluzione lo sarà anche $\psi(x) := \varphi(-x)$, in quanto

$\psi'(x) = -\varphi'(-x) = -2(-x)(\varphi(-x)-1) = 2x(\psi(x)-1)$.

Soluzioni: $P(x) = -x^2$, $\int e^{-x^2}(-2x)\,dx = e^{-x^2} \rightsquigarrow y(x) = e^{x^2}(e^{-x^2}+h) = 1+he^{x^2}$.

Trattabile come var. separabili: $\frac{dy}{y-1} = 2x\,dx \rightsquigarrow \log|y-1| = x^2+K \rightsquigarrow$

$|y-1| = e^K e^{x^2} \rightsquigarrow y-1 = he^{x^2} \rightsquigarrow y(x) = 1+he^{x^2}$, come visto.

Pbb. di Cauchy: $y(0) = -3 \rightsquigarrow -3 = 1+he^0 \rightarrow h=-4$, dunque $y = 1-4e^{x^2}$.

$y(-3) = 0 \rightarrow 0 = 1+he^9 \rightsquigarrow h = -e^{-9} \rightsquigarrow y(x) = 1-e^{x^2-9}$.

8. Determinare le soluzioni di $y' = (2\sin x - y)\cos x$ tali che $y(\frac{\pi}{2})=0$ opp. $y(\frac{\pi}{2})=1$.

$y' + y\cos x = \sin 2x$ Lineare; soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.

$P(x) = \sin x$; $\int e^{\sin x} \cdot \sin 2x \, dx = \left[\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{matrix}\right] \int 2te^t dt = 2(t-1)e^t$.

Dunque $y(x) = e^{-\sin x}\left(2(\sin x - 1)e^{\sin x} + k\right) = Ke^{-\sin x} + 2(\sin x - 1)$.

Sol. con $y(\pi/2)=0$: $0 = Ke^{-1} \rightsquigarrow K=0$, dunque $y(x) = 2(\sin x - 1)$.

Sol. con $y(\pi/2)=1$: $1 = Ke^{-1} \rightsquigarrow K=e$, dunque $y(x) = e^{1-\sin x} + 2(\sin x - 1)$.

---

10. Determinare le soluzioni delle seguenti eq. diff. il cui grafico è tangente in $x=0$ alla parabola $y - x^2 = 0$:

$3y'' + 2y' - y = x + \cos x$; $y'' + 3y = 5\sin 3x - 4x + e^x$; $9y'' - y = x^3$.

La condizione richiesta equivale evidentemente a $y(0) = y'(0) = 0$.

- $\boxed{3y'' + 2y' - y = x + \cos x}$ $3z^2 + 2z - 1 = 0 \iff z = -1, 1/3$.

  Sol. omogenea: $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x/3}$.

  Per $b_1(x) = x$: $\tilde{\varphi}_1(x) = ax + b \rightsquigarrow 0 + 2a - (ax+b) = x \iff \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$

  Per $b_2(x) = \cos x$: $\tilde{\varphi}_2(x) = a\cos x + b\sin x$

  $\rightsquigarrow 3(-a\cos x - b\sin x) + 2(b\cos x - a\sin x) - (a\cos x + b\sin x) = \cos x$

  $\rightsquigarrow (-4a + 2b)\cos x + (-2a - 4b)\sin x = \cos x \iff \begin{cases} -4a + 2b = 1 \\ -2a - 4b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/5 \\ b = 1/10 \end{cases}$

  Sol. gen. $y(x) = Ae^{-x} + Be^{+x/3} - (x+2) - \dfrac{2\cos x - \sin x}{10}$

  Condizione: $\begin{cases} A + B - 2 - 1/5 = 0 \\ -A + B/3 - 1 + \frac{1}{10} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} A = \cdots \\ B = \cdots \end{cases}$

- $\boxed{y'' + 3y = 5\sin 3x - 4x + e^x}$ $z^2 + 3 = 0 \iff z = \pm i\sqrt{3}$.

  Sol. omogenea: $y(x) = A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3})$.

  Sol. part. per $b_1(x) = 5\sin 3x$: $\tilde{\varphi}_1(x) = a\cos 3x + b\sin 3x$

  $(-9a + 3a)\cos 3x + (-9b + 3b)\sin x = 5\sin 3x \iff a = 0, b = -5/6$.

  Sol. part. per $b_2(x) = -4x$: $\tilde{\varphi}_2(x) = ax + b$.

  $0 + 3(ax+b) = -4x \iff a = -4/3, b = 0$.

  Sol part. per $b_3(x) = e^x$: $\tilde{\varphi}_3(x) = ae^x$. $(a + 3a)e^x = e^x \iff a = 1/4$.

Sol. gen. $y(x) = A\cos(x\sqrt{3}) + B\sin(x\sqrt{3}) - \frac{5}{6}\sin 3x - \frac{4}{3}x + \frac{1}{4}e^{x}$.

Cond. : $\begin{cases} A + \frac{1}{4} = 0 \\ B\sqrt{3} - \frac{5}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{43}{12\sqrt{3}} \end{cases}$

- $\boxed{9y'' - y = x^3}$ $\quad 9z^2 - 1 = 0 \iff z = \pm\frac{1}{3}$. Sol. omog. $y(x) = Ae^{x/3} + Be^{-x/3}$.

Per $b(x) = x^3$: $\tilde{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $\tilde{y}' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\tilde{y}'' = 6ax + 2b$

$\rightsquigarrow 9(6ax + 2b) - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = x^3 \rightsquigarrow -ax^3 - bx^2 + (54a - c)x + (18b - d) = x^3$

$\iff a = -1,\ b = 0,\ c = -54,\ d = 0$.

Sol. gen : $y(x) = Ae^{x/3} + Be^{-x/3} - x^3 - 54x$.

Cond. $\begin{cases} A + B = 0 \\ \frac{1}{3}A - \frac{1}{3}B - 54 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 81 \\ B = -81 \end{cases}$

---

11. Trovare in due modi diversi le soluzioni di $y'' - 2y' = 2x$.

1° modo : $z^2 - 2z = 0 \rightsquigarrow z = 0, 2 \rightsquigarrow$ sol. omog. $y(x) = A + Be^{2x}$ $(A, B \in \mathbb{C})$.

Per $b(x) = 2x$: poiché 0 è rad. caratt., una sol. part. sarà del tipo

$\tilde{y}(x) = x(ax + b)$. $\rightsquigarrow \tilde{y}' = 2ax + b \rightsquigarrow \tilde{y}'' = 2a$

$2a - 2(2ax + b) = 2x \qquad -2ax + (a - b) = x \qquad a = b = -\frac{1}{2}$

$\rightsquigarrow$ sol. gen. $y(x) = A + Be^{2x} - \frac{x(x+1)}{2}$

2° modo $\quad y' - 2y = x^2 + K$ (integrando ambo i membri), eq. lin. del I° ord.

$p(x) = -2 \rightsquigarrow P(x) = -2x$; $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int \overset{F}{(x^2 + K)}\, \overset{g}{e^{-2x}}\, dx$

$= (x^2 + K)\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{1}{2}(x^2 + K)e^{-2x} + \int \overset{F}{x}\, \overset{g}{e^{-2x}}\, dx$

$= -\frac{1}{2}(x^2 + K)e^{-2x} + x\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 1 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2}\, dx = -\frac{1}{2}(x^2 + K)e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}$

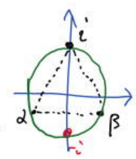
$-\frac{1}{4}e^{-2x} = -\frac{1}{2}\left(x^2 + K + x + \frac{1}{2}\right)e^{-2x}$

$$\rightsquigarrow\ y(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+k+x+\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + h\right)$$

$$= \overset{B}{h}\, e^{2x} - \frac{1}{2}(x^2+x) \overset{A}{-\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

---

12. Trovare le soluzioni $y(x)$ di $y''' + iy = e^{ix} - 2$ ($\overline{\text{III}}$° ordine) e di $y^{(IV)} - y = 3 - 2x\sin x$ ($\overline{\text{IV}}$° ordine).



- L'eq. caratt. $z^3 + i = 0$ ha come soluzioni le tre radici cubiche di $-i$, ovvero $z = i$, $z = \alpha = \frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ e $z = \beta = \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

  Sol.z. omogenea: $y(x) = Ae^{ix} + Be^{\alpha x} + Ce^{\beta x}$ $(A, B, C \in \mathbb{C})$.

  Per $b_1(x) = e^{ix}$: poiché i è radice caratteristica semplice, si avrà

  $\tilde{\varphi}_1(x) = axe^{ix} \rightsquigarrow \tilde{\varphi}_1'(x) = a(1+ix)e^{ix} \rightsquigarrow \tilde{\varphi}_1''(x) = a(2i-x)e^{ix} \rightsquigarrow$

  $\tilde{\varphi}_1'''(x) = a(-3-ix)e^{ix}$, da cui $a(-3-\cancel{ix})e^{ix} + \cancel{iax}e^{ix} = e^{ix} \iff a = -1/3$.

  Per $b_2(x) = -2$: una sol. evidente è $\tilde{\varphi}_2(x) \equiv -\frac{2}{i} = 2i$.

  Dunque sol. generali: $y(x) = (A - x/3)e^{ix} + Be^{\alpha x} + Ce^{\beta x}$ $(A, B, C \in \mathbb{C})$.

- L'eq. caratt. $z^4 - 1 = 0$ ha come soluzioni le quattro radici quarte dell'unità, ovvero ± 1 e $\pm i$.

  Sol. omogenea: $y(x) = Ae^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$ $(A, B, C, D \in \mathbb{C})$.

  (N.B.: al posto delle funzioni generatrici $\{e^x, e^{-x}\}$ potremmo usare $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ e $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, base reale alternativa che rende più simmetrica l'espressione, vista la presenza di $\cos x$ e $\sin x$.)

  Per $b_1(x) \equiv 3$: una sol. evidente è $\tilde{\varphi}_1(x) \equiv -3$.

  Per $b_2(x) = -2x\sin x$: poiché i è radice caratt. semplice, una sol. part. è del tipo $\tilde{\varphi}_2(x) = x\left((ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right)$, con calcoli noiosi. In alternativa, visto che l'equazione è a coefficienti reali possiamo pensare (come nell'ex svolto all'inizio di oggi) $b_2(x) = \mathrm{Im}(-2xe^{ix})$, trovare una soluzione $\tilde{\psi}(x)$ per $y^{(iv)}-y=-2xe^{ix}$ e poi prendere $\tilde{\varphi}(x)=\mathrm{Im}\,\tilde{\psi}(x)$.

Si avrà $\tilde{\psi}(x)=x(ax+b)e^{ix}=(ax^2+bx)\,e^{ix}$ $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \tilde{\psi}'(x)=(iax^2+(2a+ib)x+b)\,e^{ix}$

$\rightsquigarrow \tilde{\psi}''(x)=(-ax^2+(4ia-b)x+2a+2ib)\,e^{ix}$

$\rightsquigarrow \tilde{\psi}'''(x)=(-iax^2+(-6a-ib)x+6ia-2b)\,e^{ix}$

$\rightsquigarrow \tilde{\psi}^{(iv)}(x)=(ax^2+(-8ia+b)x+(-12a-3ib))\,e^{ix}$

perciò $\left(\cancel{ax^2}+(-8ia+b)x+(-12a-3ib)\right)e^{ix}-(\cancel{ax^2}+bx)e^{ix}=-2xe^{ix}$

$$\iff \begin{cases}-8ia+b=-2\\ -12a-3ib=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-i/2\\ b=2\end{cases}$$

Così $\tilde{\psi}(x)=\left(-\frac{1}{2}ix^2+2x\right)(\cos x+i\sin x)$

$$=\left(2x\cos x+\frac{1}{2}x^2\sin x\right)+i\,\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2\cos x+2x\sin x\right)}_{\tilde{\varphi}(x).}$$

Pertanto soluz. gen. è, al variare di $A,B,C,D\in\mathbb{C}$:

$$y(x)=A\cosh x+B\sinh x+\left(C-\frac{1}{2}x^2\right)\cos x+(D+2x)\sin x-3\,.$$

---

13. Trovare le soluzioni $y(x)$ di $y''-2iy=3e^x\sin x-ix^2$
(interpretando $3e^x\sin x=3e^x\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{3}{2}i\left(e^{(1-i)x}-e^{(1+i)x}\right)$).

Eq. caratt. $z^2-2i=0$ dà le radici quadrate di $2i$, ovvero $z=\pm(1+i)$: ← non sono coniugate! Non siamo in un caso reale.

dunque soluz. omog. sono $y(x)=Ae^{(1+i)x}+Be^{-(1+i)x}$.

- Per $b_1(x)=3e^x\sin x$: poiché non siamo a coeff. reali, il giochino fatto in precedenza (pensare $3e^x\sin x=\mathrm{Im}\left(3e^{(1+i)x}\right)$, trovare ne soluzione $\tilde{\psi}(x)$ per $3e^{(1+i)x}$ e prenderne Im) non funziona più.

Usiamo allora, come suggerito, le formule di Eulero:

$3e^x \sin x = 3e^x \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{3}{2}i\left(e^{(1-i)x} - e^{(1+i)x}\right)$, e anche il principio di sovrapposizione.

Una soluz. part. per $b_{1,1}(x) = \frac{3}{2}i\, e^{(1-i)x}$ è $\tilde{\varphi}_{1,1}(x) = a\, e^{(1-i)x}$ $\rightsquigarrow$

$\tilde{\varphi}_{1,1}'(x) = a(1-i)e^{(1-i)x} \rightarrow \tilde{\varphi}_{1,1}''(x) = a(1-i)^2 e^{(1-i)x} = -2ia\, e^{(1-i)x}$,

dunque deve essere $\left(-2ia\, e^{(1-i)x}\right) - 2ia\, e^{(1-i)x} = \frac{3}{2}i\, e^{(1-i)x} \iff a = -\frac{3}{8}$

Una sol. part. per $b_{1,2}(x) = -\frac{3}{2}i\, e^{(1+i)x}$ è $\tilde{\varphi}_{1,2}(x) = b\,x\,e^{(1+i)x}$ (infatti $1+i$ è rad. caratt.)

$\rightsquigarrow \tilde{\varphi}_{1,2}'(x) = b\left(1+(1+i)x\right)e^{(1+i)x} \rightsquigarrow \tilde{\varphi}_{1,2}''(x) = b\left(2+2i+2ix\right)e^{(1+i)x}$,

dunque deve essere $b\left(2+2i+\cancel{2ix}\right)e^{(1+i)x} - \cancel{2ibx\,e^{(1+i)x}} = -\frac{3}{2}i\, e^{(1+i)x}$

$\iff 2b(1+i) = -\frac{3}{2}i \iff b = -\frac{3}{4}\cdot\frac{i}{1+i} = -\frac{3}{4}i\cdot\frac{1-i}{2} = -\frac{3}{8}(1+i)$

Dunque una sol. part. per $b_1(x)$ è $-\frac{3}{8}\left(e^{(1-i)x} + (1+i)x\,e^{(1+i)x}\right)$

- Una sol. part. per $b_2(x) = -ix^2$ sarà del tipo $\tilde{\varphi}_2(x) = ax^2+bx+c$, dunque deve essere $2a - 2i(ax^2+bx+c) = -ix^2 \iff \begin{cases} 2a = 1 \\ -2ib = 0 \\ 2a - 2ic = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = -i/2 \end{cases}$

Le soluzioni generali dell'equazione $y'' - 2iy = 3e^x \sin x - ix^2$ è perciò

$$y(x) = \left(A - \frac{3}{8}(1+i)x\right)e^{(1+i)x} + B\,e^{-(1+i)x} - \frac{3}{8}e^{(1-i)x} + \frac{1}{2}(x^2 - i) \quad (\text{con } A, B \in \mathbb{C}).$$