

Cos'è un'equazione differenziale?

Un'**equazione differenziale** è un problema in cui si cerca una funzione $y(x)$ a partire da una *relazione tra lei e le sue derivate* $y', y'' \dots$

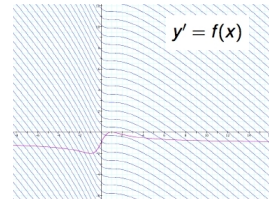
Sono **questioni frequenti e spesso fondamentali**.

Vediamo **alcuni esempi**, iniziando da quello base...

- 1. Integrazione indefinita.** Cercare le primitive di una funzione continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ su un intervallo I .

Problema: $y' = f(x)$

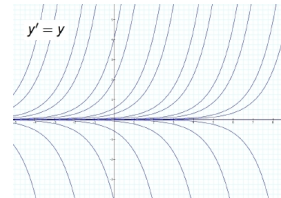
Soluzioni: $\{y = F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$



- 2. Funzioni invarianti per derivazione**

Problema: $y' = y$

Soluzioni: $\{y = k e^x : k \in \mathbb{R}\}$



Le equazioni differenziali per le scienze

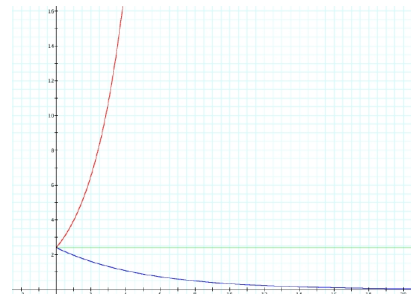
- 3. Popolazione con evoluzione malthusiana.** La rapidità di variazione di una popolazione è *proporzionale* al numero di individui (T. R. Malthus, 1766-1834).

Problema per $p(t)$: $p' = \nu p$

(ove $\nu = N - M$ è il *tasso di crescita*, con N e M tassi di natalità e mortalità)

Soluzione: $p(t) = p_0 e^{\nu t}$

(ove p_0 è la popolazione iniziale)



Se $\nu < 0$ la popolazione si estingue (ragionevole)

Se $\nu = 0$ la popolazione resta costante (ovviamente vero)

Se $\nu > 0$ la popolazione cresce esponenzialmente **irrealistico!**

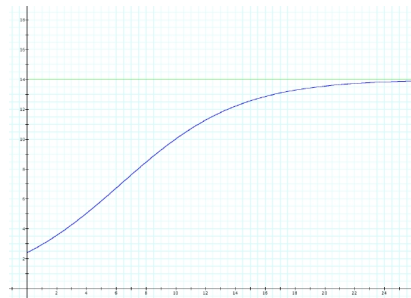
È meglio cercare un **modello più ragionevole nel caso $\nu > 0$** ...

Le equazioni differenziali per le scienze

- 4. Popolazione con evoluzione logistica.** Una popolazione con $\nu > 0$ cresce grossomodo proporzionalmente al numero di individui, ma oltre una *soglia critica* S inizia a decrescere.

Problema: $p' = \nu(1 - \frac{p}{S})p$

Soluzione: $p(t) = p_0 \frac{S e^{\nu t}}{S + p_0(e^{\nu t} - 1)}$
(ove p_0 è la popolazione iniziale, con $p_0 < S$)



Questa curva è detta **sigmoide logistica**

(la popolazione tende asintoticamente alla **soglia critica** S : ragionevole)

Si noti che **il modello malthusiano si ritrova nel limite** $S \rightarrow +\infty$.

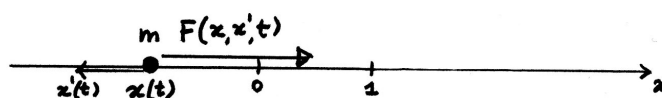
Le equazioni differenziali per le scienze

- 5. Meccanica newtoniana** [*Phil. Nat. Principia Math.* (1687), Lex II]
Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur (l'accelerazione subita da un corpo è proporzionale ed equidiretta alla forza su esso esercitata)

Sia $x(t)$ la posizione di un punto materiale in moto rettilineo:

- $x'(t)$ è la sua **velocità** (*motus*),
- $x''(t) = (x'(t))'$ è la sua **accelerazione** (*mutatio motus*).

Se m è la sua **massa** e $F(x, x', t)$ è la **forza** su esso all'istante t :



Problema: $x'' = \frac{1}{m}F(x, x', t)$

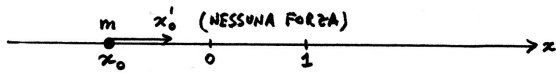
Soluzione: **Dipende da F !**

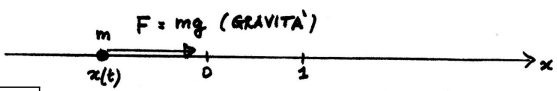
Le equazioni differenziali per le scienze

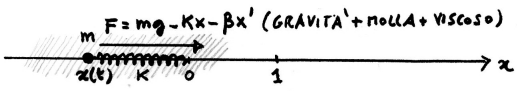


Isaac Newton, Lex II:

$$x'' = \frac{1}{m} F(x, x', t)$$

- (Nessuna forza)** 

$x'' = 0$ dà $x(t) = x_0 + x'_0 t$ (moto rett. unif. [Lex I]: già da Galileo)
- (Gravità)** 

$x'' = \frac{1}{m} mg$ dà $x(t) = x_0 + x'_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ (moto unif. accelerato)
- (Gravità, molla, attrito viscoso)** 

$x'' = \frac{1}{m} (mg - kx - \beta x')$ dà $x(t) = -\frac{mg}{k} + Ae^{-\eta t} \cos(\sigma t + \varphi)$

con $\eta = \frac{\beta}{2m}$, $\sigma = \frac{\sqrt{4mk - \beta^2}}{2m}$ (oscillazioni smorzate attorno all'equilibrio $\tilde{x} = -\frac{mg}{k}$)

Navigation icons: back, forward, search, etc.