Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)
Autoverifica sulle equazioni differenziali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

lunedì 19 gennaio 2015

Istruzioni generali. (1) Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 26/1). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato.

Istruzioni per l'autovalutazione. Ex. 1: 40 pt (15+10+15). **Ex. 2:** 30 pt (15+15). **Ex. 3:** 30 pt (15+15). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. (a) Data l'equazione differenziale $x^3y' + (y^2+4)\log|x| = 0$, si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Trovare le soluzioni costanti. Dimostrare che se $\phi(x)$ è una soluzione per $x > 0$, allora $\psi(x) = \phi(-x)$ è soluzione per $x < 0$. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy condizione iniziale $y(-1) = 0$.

(b) Risolvere $xy' + (x+1)y = -2-2x$ in due modi. Vi sono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$? Trovare le soluzioni tali $y(1) = -1$ oppure $y(1) = -2$.

(c) Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x^2-1)y' - x^2 + 2(x-y) + 5 = 0$ tale che $y(0) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Per quali α tale soluzione può essere prolungata ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?

2. (a) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = e^{-\alpha x} - 2\alpha\cos x$ e dalle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

(b) Trovare, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $4y'' - 4y' + \beta y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$ tali che $y(0) = -2y'(0)$.

3. (a) Una sferetta di massa m è immersa in un piccolo tubo orizzontale di vetro liscio contenente del fluido in quiete; essa è congiunta ad un punto del tubo da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, e si trova ferma sopra il perno della molla. Improvvisamente il fluido viene fatto scorrere con velocità costante $v > 0$ da sinistra verso destra. Detto β il coefficiente viscoso del fluido, discutere la legge oraria del moto $x(t)$ rispetto ad un riferimento cartesiano orizzontale x con l'origine nel perno della molla. (Si suggerisce di porre $\gamma = \beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega = \sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla).)

(b) La sera di San Silvestro, un gruppo di amici aveva deciso di lanciare in aria un candelotto di fuochi artificiali per festeggiare l'anno nuovo. Il candelotto aveva massa 1 kg, dunque era soggetto ad una forza di gravità di (circa) 10 N; al momento dell'accensione esso veniva spinto da una forza verso l'alto pari a 150 N, che decresceva proporzionalmente al tempo e si era esaurita dopo 5 secondi. L'aria opponeva una resistenza di tipo viscoso con coefficiente pari a 1 N·sec/m. Sapendo che il candelotto conteneva un meccanismo programmato per causare l'esplosione dopo 3 secondi dallo spegnimento della forza propulsiva (dunque, in tutto, dopo 8 secondi dalla partenza), si dica a che altezza dal suolo (arrotondata al metro) era esploso.

Soluzioni.

1. (a) (Figura 1) L'equazione differenziale $x^3y' + (y^2+4)\log|x| = 0$ è definita per $x \neq 0$; le soluzioni saranno crescenti dove $y' = -\frac{(y^2+4)\log|x|}{x^3} \geq 0$, dunque per $x \leq -1$ oppure $0 < x \leq 1$ (ci aspettiamo dunque dei massimi locali in $x = \pm 1$). Se $y \equiv k$ fosse soluzione, poiché $y' \equiv 0$ dovrebbe aversi $(k^2+4)\log|x| = 0$ per ogni $x \neq 0$, ma nessun k permette ciò (infatti $k^2+4 > 0$). Dunque non vi sono soluzioni costanti. Supponiamo ora che $\phi(x)$ sia una soluzione per $x > 0$, e poniamo $\psi(x) = \phi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\phi'(-x)$ (regola della catena), per un qualsiasi $x < 0$ si ha $x^3\psi'(x) + (\psi(x)^2+4)\log|x| = x^3(-\phi'(-x)) + (\phi(-x)^2+4)\log|x| = (-x)^3\phi'(-x) + (\phi(-x)^2+4)\log|-x| = 0$ (infatti $-x > 0$, e $\phi(t)$ è soluzione per $t > 0$, dunque in questo caso per $t = -x$): ma ciò significa che $\psi(x)$ è soluzione quando $x < 0$. Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione, che è a variabili separabili: si ottiene $\frac{1}{y^2+4}\,dy = -\frac{\log|x|}{x^3}\,dx$ da cui, integrando (al secondo membro per parti), si ottiene $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2} = \frac{2\log|x|+1}{4x^2} + k$. Con la condizione iniziale $y(-1) = 0$ si ottiene $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,0 = \frac{1}{4} + k$, da cui $k = -\frac{1}{4}$, da cui $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2} = \frac{2\log|x|+1}{2x^2} - \frac{1}{2}$, da cui $y = 2\,\mathrm{tg}\,(\frac{2\log|x|-1}{2x^2} - \frac{1}{2})$.

(b) L'equazione del primo ordine $xy' + (x+1)y = -2-2x$, ovvero $xy' = -(x+1)(y+2)$, può essere interpretata sia come lineare che come a variabili separabili. In entrambi i casi, iniziamo notando che per portarla in forma normale (dunque anche per valutare esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy) bisognerà lavorare per $x \neq 0$, dunque esaminiamo cosa accade per un'eventuale soluzione $y(x)$ definita all'intorno di $x = 0$: per essa deve succedere che $0 = -(y(0)+2)$, dunque $y(0) = -2$. Ciò implica ad esempio che il problema di Cauchy con dato $y(0) = \alpha \neq -2$ non avrà soluzione: ciò non è contraddittorio perché, come detto, il teorema di Cauchy non si applica quando $x = 0$.
Posto ora $x \neq 0$, si ricava $y' = -\frac{(x+1)(y+2)}{x}$. Iniziamo con la risoluzione come equazione a variabili separabili. Notata la soluzione costante $y \equiv -2$, per le altre si ricava $\frac{1}{y+2}\,dy = -(1+\frac{1}{x})\,dx$, da cui $\log|y+2| = -x - \log|x| + k$, da cui $|y+2| = e^k\frac{1}{|x|}e^{-x}$, da cui $y+2 = h\frac{1}{x}e^{-x}$ con $h \in \mathbb{R}$, da cui infine $y(x) = h\frac{1}{x}e^{-x} - 2$ con $h \in \mathbb{R}$ (definita su uno dei due intervalli $]-\infty, 0[$ oppure $]0, +\infty[$ a seconda del dato iniziale).
Risolvendo come lineare, si ha $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = 1 + \frac{1}{x}$ e $q(x) = -2(1+\frac{1}{x})$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = x + \log|x|$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = -2\int |x|e^x(1+\frac{1}{x})\,dx = -2\sigma\int(x+1)e^x\,dx = -2\sigma xe^x = -2|x|e^x$, dunque le soluzioni sono $y(x) = e^{-x-\log|x|}(-2|x|e^x + h) = \frac{1}{|x|}e^{-x}(-2|x|e^x + h) = h\frac{1}{x}e^{-x} - 2$ con $h \in \mathbb{R}$ (definita su uno dei due intervalli $]-\infty, 0[$ oppure $]0, +\infty[$ a seconda del dato iniziale), come già trovato in precedenza. Notiamo che nessuna delle soluzioni con $h \neq 0$ è estendibile in $x = 0$ (divergono all'infinito) tranne quella con $h = 0$, che è la già nota costante $y \equiv -2$.
Infine, passiamo ai problemi di Cauchy. La soluzione tale che $y(1) = -2$ è la costante $y \equiv -2$. Invece la soluzione tale che $y(1) = -1$ sarà data da $-1 = h\frac{1}{1}e^{-1} - 2$, da cui $h = e$ e perciò $y(x) = \frac{1}{x}e^{1-x} - 2$, definita su $]0, +\infty[$.

(c) L'equazione differenziale $(x^2-1)y' - x^2 + 2(x-y) + 5 = 0$, ovvero $(x^2-1)y' - 2y = x^2 - 2x - 5$, è lineare del primo ordine; per portarla nella forma normale $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{2}{x^2-1}$ e $q(x) = \frac{x^2-2x-5}{x^2-1}$ bisogna dividere per x^2-1, dunque dobbiamo per il momento assumere $x \neq \mp 1$. Poiché $P(x) = \int p(x)\,dx = \log|\frac{x+1}{x-1}|$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int |\frac{x+1}{x-1}|\frac{x^2-2x-5}{x^2-1} = \Big(\mathrm{sign}\,(x^2-1)\Big)(\frac{x^2-x+6}{x-1})$, l'integrale generale (su ciascuno degli intervalli connessi che compongono $\mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$) è $y(x) = |\frac{x-1}{x+1}|(\Big(\mathrm{sign}\,(x^2-1)\Big)(\frac{x^2-x+6}{x-1}) + k) = \frac{x^2-x+6}{x+1} + k|\frac{x-1}{x+1}|$. Se ora vogliamo imporre la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dobbiamo dunque essere consapevoli che ciò riguarderà solo la costante sull'intervallo $]-1, 1[$ (sul quale $|\frac{x-1}{x+1}| = -\frac{x-1}{x+1}$): si ottiene $\alpha = 6 + k$, da cui $k = \alpha - 6$, ovvero la soluzione $y(x) = \frac{x^2-x+6}{x+1} + (\alpha-6)(-\frac{x-1}{x+1}) = \frac{x^2-(\alpha-5)x+\alpha}{x+1}$. Se si vuole avere una speranza di prolungare questa soluzione ad una su tutto $\mathbb{R}$ bisogna, per iniziare, che i limiti $\lim_{x\to\mp 1^\pm}\frac{x^2-(\alpha-5)x+\alpha}{x+1}$ siano finiti: quello per $x \to 1^-$ lo è sempre e vale 3, mentre quello per $x \to -1^+$ lo è solo quando $\alpha = 2$, e vale 1. In tal caso si ottiene in effetti la soluzione $y(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1} = x + 2$, che è valida su tutto $\mathbb{R}$... ed è anzi, come visto, l'unica ad esserlo.

2. (a) L'equazione caratteristica di $y'' + 2y' + y = 0$ è $t^2 + 2t + 1 = 0$, che ha radice doppia $t = -1$: dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\,e^{-x} + B\,xe^{-x} = (A + Bx)e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Poiché i non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_2(x) = -2\alpha\cos x$ è della forma $\tilde{y}_2(x) = a\,\cos x + b\,\sin x$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = b\,\cos x - a\,\sin x$ e $\tilde{y}_2''(x) = -a\,\cos x - b\,\sin x$, imponendo che lo sia si ottiene $2(b\,\cos x - a\,\sin x) = -2\alpha\cos x$, da cui $a = 0$ e $b = -\alpha$: dunque $\tilde{y}_2(x) = -\alpha\sin x$. Quanto a $b_1(x) = e^{-\alpha x}$, se $\alpha \neq 1$ si ha che $-\alpha$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x) = a\,e^{-\alpha x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = -a\alpha\,e^{-\alpha x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = a\alpha^2\,e^{-\alpha x}$, imponendo che lo sia si ottiene $(\alpha^2-2\alpha+1)a\,e^{-x}=e^{-x}$, da cui $a=\frac{1}{(\alpha-1)^2}$: dunque se $\alpha\neq 1$ si ha $\tilde{y}_1(x)=\frac{1}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x}$. Se invece $\alpha=1$, il numero $-\alpha=-1$ è soluzione doppia dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x)=ax^2\,e^{-x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x)=a(2x-x^2)\,e^{-x}$ e $\tilde{y}_1''(x)=a(2-4x+x^2)\,e^{-x}$, si ottiene $2a\,e^{-x}=e^{-x}$, da cui $a=\frac{1}{2}$. Ricapitolando:

(i) se $\alpha\neq 1$ l'integrale generale è $y(x)=(A+Bx)e^{-x}+\frac{1}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x}-\alpha\sin x$, da cui $y'(x)=(B-A-Bx)e^{-x}-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x}-\alpha\cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0)=y'(0)=0$ si ha $0=A+\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ e $0=B-A-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}-\alpha$, da cui $A=-\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ e $B=\alpha+\frac{1}{\alpha-1}$;

(ii) se invece $\alpha=1$ l'integrale generale è $y(x)=(A+Bx)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\,e^{-x}-\sin x$, da cui $y(x)=(B-A-Bx)e^{-x}+\frac{1}{2}(2x-x^2)\,e^{-x}-\cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0)=y'(0)=0$ si ha $0=A$ e $0=B-A-1$, da cui $A=0$ e $B=1$, ovvero la soluzione $y(x)=(x+\frac{1}{2}x^2)\,e^{-x}-\sin x$.

(b) L'equazione $4y''-4y'+\beta y=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$ è del secondo ordine a coefficienti costanti. Per le soluzioni dell'equazione caratteristica vanno distinti tre casi.

(i) Se $\beta<1$ vi sono due radici reali distinte $1\pm\sqrt{1-\beta}$, da cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y(x)=Ae^{(1+\sqrt{1-\beta})x}+Be^{(1-\sqrt{1-\beta})x}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Poiché entrambe le radici sono però diverse da $\frac{1}{2}$ (ottenibile come radice doppia solo quando $\beta=1$), una soluzione particolare dell'equazione completa sarà del tipo $\tilde{y}(x)=(ax+b)e^{\frac{x}{2}}$: da $\tilde{y}'(x)=(\frac{1}{2}ax+a+\frac{1}{2}b)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x)=(\frac{1}{4}ax+a+\frac{1}{4}b)e^{\frac{x}{2}}$ si ricava $4\tilde{y}''-4\tilde{y}'+\beta\tilde{y}=(\beta-1)(ax+b)e^{\frac{x}{2}}=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$, da cui $a=b=\frac{1}{\beta-1}$. L'integrale generale dell'equazione completa è pertanto $\{y(x)=Ae^{(1+\sqrt{1-\beta})x}+Be^{(1-\sqrt{1-\beta})x}+\frac{1}{\beta-1}(x+1)e^{\frac{x}{2}}\ :\ A,B\in\mathbb{C}\}$. Essendo $y'(x)=A(1+\sqrt{1-\beta})e^{(1+\sqrt{1-\beta})x}+B(1-\sqrt{1-\beta})e^{(1-\sqrt{1-\beta})x}+\frac{1}{\beta-1}(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})e^{\frac{x}{2}}$, la condizione $y(0)=-2y'(0)$ dà $A+B+\frac{1}{\beta-1}=-2A(1+\sqrt{1-\beta})-2B(1-\sqrt{1-\beta})-\frac{3}{\beta-1})$, da cui $B=-\frac{(3+2\sqrt{1-\beta})A+\frac{4}{\beta-1}}{3-2\sqrt{1-\beta}}$ e A libero (se $\beta\neq-\frac{5}{4}$) oppure $A=\frac{8}{27}$ e B libero (se $\beta=-\frac{5}{4}$).

(ii) Se $\beta>1$ vi sono due radici complesse coniugate $1\pm i\gamma$ (ove si è posto $\gamma:=\sqrt{\beta-1}$), da cui le soluzioni dell'equazione omogenea sono $y(x)=e^x(A\cos\gamma x+B\sin\gamma x)$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Per la soluzione particolare dell'equazione completa le considerazioni sono le stesse del caso (i), dunque l'integrale generale dell'equazione completa è $\{y(x)=e^x(A\cos\gamma x+B\sin\gamma x)+\frac{1}{\beta-1}(x+1)e^{\frac{x}{2}}\ :\ A,B\in\mathbb{C}\}$. Essendo poi $y'(x)=e^x((A+B\gamma)\cos\gamma x+(B-A\gamma)\sin\gamma x)+\frac{1}{\beta-1}(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2})e^{\frac{x}{2}}$, la condizione $y(0)=-2y'(0)$ dà $A+\frac{1}{\beta-1}=-2A-2\gamma B-\frac{3}{\beta-1}$, da cui $B=-\frac{3A+\frac{3}{\beta-1}}{2\sqrt{\beta-1}}$.

(iii) Infine, se $\beta=1$ l'equazione caratteristica ha radice doppia $\frac{1}{2}$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è $y(x)=(A+Bx)e^{\frac{x}{2}}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa sarà dunque della forma $\tilde{y}(x)=x^2(ax+b)e^{\frac{x}{2}}$: da $\tilde{y}'(x)=(\frac{a}{2}x^3+(3a+\frac{b}{2})x^2+2bx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x)=(\frac{a}{4}x^3+(3a+\frac{b}{4})x^2+2(3a+b)x+2b)e^{\frac{x}{2}}$, la condizione $4\tilde{y}''-4\tilde{y}'+\tilde{y}=8(3ax+b)e^{\frac{x}{2}}=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$, dà $a=\frac{1}{24}$ e $b=\frac{1}{8}$. L'integrale generale dell'equazione completa è pertanto $y(x)=(A+Bx+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3)e^{\frac{x}{2}}$, al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Derivando si ottiene $y'(x)=(\frac{A}{2}+B+(\frac{1}{4}+\frac{B}{2})x+\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$, dunque la condizione $y(0)=-2y'(0)$ dà $A=-2(\frac{A}{2}+B)=-A-2B$, da cui $B=-A$: le soluzioni cercate sono pertanto quelle dell'integrale generale con $B=-A$.

3. (a) Il fluido, nel suo moto, spinge la sferetta verso destra con la forza viscosa costante βv, dunque l'equazione differenziale cui obbedisce il moto $x(t)$ è $mx''=-kx-\beta x'+\beta v$, ovvero $x''+2\gamma x'+\omega^2 x=2\gamma v$ con $\gamma=\beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega=\sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla). Una soluzione particolare dell'equazione completa è evidentemente la costante $\tilde{x}:=\frac{2\gamma v}{\omega^2}=\frac{\beta v}{k}$. Quanto all'equazione omogenea, il discriminante dell'equazione caratteristica è $4(\gamma^2-\omega^2)$, dunque vanno distinti tre casi.

(i) Se $\gamma>\omega$ (fluido denso, o molla debole), l'equazione caratteristica ha due radici reali negative distinte $\sigma'=-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$ e $\sigma''=-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$, con $\sigma'<\sigma''\leq 0$. L'integrale è $x(t)=Ae^{\sigma' t}+Be^{\sigma'' t}+\tilde{x}$, e con le condizioni iniziali $x(0)=0$ e $x'(0)=0$ si trova $A=\frac{-\sigma''}{\sigma''-\sigma'}\tilde{x}$ e $B=\frac{\sigma'}{\sigma''-\sigma'}\tilde{x}$, ovvero $x(t)=\tilde{x}\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t})-\sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'}$; in ogni caso, essendo $\sigma',\sigma''<0$ si ha $\lim_{t\to+\infty}x(t)=\tilde{x}$. Si noti che la velocità $x'(t)=\frac{\sigma'\sigma''}{\sigma''-\sigma'}(e^{\sigma'' t}-e^{\sigma' t})$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t\to+\infty$.

(ii) Se $\gamma=\omega$ (caso risonante), l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia negativa $-\gamma$. L'integrale è $x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t}+\tilde{x}$, da cui $x'(t)=(B-\gamma A-\gamma Bt)e^{-\gamma t}$, e imponendo le condizioni iniziali $x(0)=0$ e $x'(0)=0$ si trova $A=-\tilde{x}$ e $B=-\gamma\tilde{x}$, da cui $x(t)=\tilde{x}(1-(1+\gamma)e^{-\gamma t})$; in ogni caso, essendo $-\gamma<0$ si ha anche qui $\lim_{t\to+\infty}x(t)=\tilde{x}$, e la velocità $x'(t)=\gamma(1+\gamma)\tilde{x}\,e^{-\gamma t}$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t\to+\infty$.

(iii) Infine, se $\gamma<\omega$ (fluido rarefatto, o molla forte), l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate con parte reale negativa $-\gamma$ e parte immaginaria $\pm\eta$, con $\eta=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$. L'integrale, scritto in forma reale, è $x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\eta t + B\sin\eta t) + \tilde{x}$, da cui $x'(t) = ((\eta B - \gamma A)\cos\eta t - (\eta A + \gamma B)\sin\eta t)e^{-\gamma t}$ e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = -\tilde{x}$ e $B = -\frac{\gamma}{\eta}\tilde{x}$, ovvero $x(t) = \tilde{x}(1 - e^{-\gamma t}(\cos\eta t + \frac{\gamma}{\eta}\sin\eta t))$; e anche qui, essendo $-\gamma < 0$, si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \tilde{x}$, mentre la velocità $x'(t) = \tilde{x}\frac{\gamma^2+\eta^2}{\eta}e^{-\gamma t}\sin\eta t$ oscilla di segno e tende a smorzarsi per $t \to +\infty$.

Ricapitolando, in tutti i casi la sferetta tende asintoticamente alla posizione $\tilde{x} = \frac{\beta v}{k}$: nei primi due casi, avvicinandosi da sinistra con velocità positiva tendente a zero; nel terzo, dopo una "fase transitoria" di oscillazioni smorzate attorno a $\tilde{x}$. Tutto ciò è fisicamente sensato: è naturale che, dopo una fase iniziale transitoria, la spinta del fluido e il richiamo della molla facciano attestare la sferetta su una posizione di compromesso.

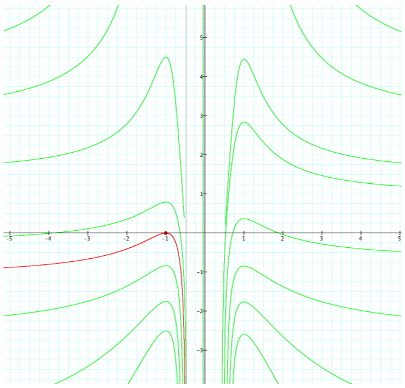
Curiosità: i casi estremi come limite dei casi intermedi. Se nel tubo non ci fosse fluido ($\gamma = 0$) il moto avverrebbe solo per azione della forza elastica: da $x'' + \omega^2 x = 0$ si otterrebbe, come noto, $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, e con le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si avrebbe $A = B = 0$, ovvero la prevedibile quiete $x(t) \equiv 0$. Se invece non ci fosse la molla ($k = 0$) agirebbe solo il fluido, che finirebbe per trascinare via con sè la sferetta: da $x'' + 2\gamma x' = 2\gamma v$ si otterrebbe $x(t) = A + Be^{-2\gamma t} + vt$, da cui $x(t) = v - 2\gamma Be^{-2\gamma t}$, e le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ darebbero $A + B = 0$ e $v - 2\gamma B = 0$, da cui $A = -\frac{v}{2\gamma}$ e $B = \frac{v}{2\gamma}$, ovvero $x(t) = v(\frac{e^{-2\gamma t}-1}{2\gamma} + t)$. Si tratta infatti di un moto che tende (man mano che scema l'effetto del termine transitorio $e^{-2\gamma t}$) al rettilineo uniforme, con la velocità $x'(t) = v(1 - e^{-2\gamma t})$ che tende asintoticamente a v. Cerchiamo ora di ottenere questi due casi estremi come limite, rispettivamente, dei casi (c) e (a) trattati in precedenza.

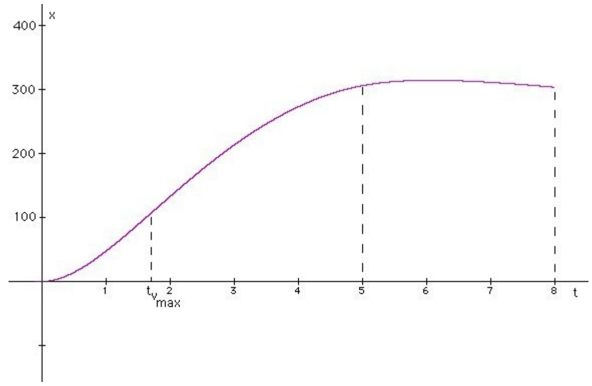
Se il fluido è estremamente rarefatto o la molla estremamente dura ($\frac{\gamma}{\omega} \to 0^+$), la posizione $\tilde{x}$ tende a 0, e da (c) si osserva che $x(t)$ tende effettivamente alla quiete in 0.

Se invece il fluido è estremamente denso o la molla estremamente cedevole ($\frac{\omega}{\gamma} \to 0^+$), l'evoluzione del moto $x(t)$ in (a) è meno chiara: infatti la posizione $\tilde{x}$ tende coerentemente a $+\infty$ ma, poiché σ' e σ'' tendono rispettivamente a -2γ e a 0^-, la frazione $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t})-\sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'}$ tende a 0. Conviene allora operare come segue, sviluppando $x(t)$ (per un t fissato) rispetto alla quantità infinitesima $\varepsilon := \frac{\omega}{\gamma}$. Si ha $\sigma' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma(1+\sqrt{1-\varepsilon^2}) = -\gamma(1+1-\frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $\sigma'' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega^2} = -\gamma(1-\sqrt{1-\varepsilon^2}) = -\gamma(1-1+\frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, dunque $\sigma'' - \sigma' = 2\gamma - \gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $1 - e^{\sigma' t} = 1 - e^{(-2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t}e^{(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t}(1 + \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = (1 - e^{-2\gamma t}) - \frac{1}{2}\gamma te^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$ e $1 - e^{\sigma'' t} = 1 - e^{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - (1 - \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$: sostituendo, si ha $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t})-\sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'} = \frac{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2))((1-e^{-2\gamma t})-\frac{1}{2}\gamma te^{-2\gamma t}\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2))-(-2\gamma+\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2))(\frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2))}{2\gamma-\gamma\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2)} = \frac{-\frac{1}{2}\gamma(1-e^{-2\gamma t})\varepsilon^2+\gamma^2 t\varepsilon^2+o_0(\varepsilon^2)}{2\gamma+o_0(1)} = \frac{2\gamma t-1+e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$. D'altra parte vale $\tilde{x} = \frac{2\gamma v}{\omega^2} = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}$, dunque $x(t) = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}(\frac{2\gamma t-1+e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) \sim_0 \frac{v}{2\gamma}(2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t})$, che è quanto trovato in precedenza nel caso di assenza della molla.

(b) (Figura 2) In base a quanto detto, l'intensità della forza propulsiva è data dalla funzione continua $F : [0,8] \to \mathbb{R}$ data da $F(t) = 150(1 - \frac{1}{5}t) = 150 - 30t$ (per $0 \le t \le 5$) e $F(t) \equiv 0$ (per $5 \le t \le 8$). Fissiamo ora un sistema di coordinate ascisse x orientato verso l'alto con il valore $x = 0$ sul suolo. Dall'istante iniziale $t = 0$ all'istante $t = 5$ il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x' + (150 - 30t)$, ovvero $x'' + x' = 140 - 30t$, con condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ (il candelotto parte da terra con velocità nulla). Una prima integrazione dà $x' + x = 140t - 15t^2 + k$ con k da determinare; ma le condizioni iniziali danno necessariamente $k = 0$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = 140t - 15t^2$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 140t - 15t^2$, una primitiva di $p(t)$ è $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int(140t - 15t^2)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - \int(140 - 30t)e^t\,dt = (140t - 15t^2)e^t - (140 - 30t)e^t + \int(-30)e^t\,dt = (170t - 15t^2 - 170)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((170t - 15t^2 - 170)e^t + h) = 170t - 15t^2 - 170 + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(0) = 0$ si ricava $-170 + h = 0$, ovvero $h = 170$, da cui la soluzione $x(t) = 170(t - 1 + e^{-t}) - 15t^2$. Ribadiamo che questa legge vale solo fino a $t = 5$, in cui l'altezza raggiunta vale $x(5) \sim 306$ m, e la velocità è $x'(5) = [170(1 - e^{-t}) - 30t]_{t=5} \sim 19$ m/sec (corrispondenti a circa 68 km/h).
Dall'istante iniziale $t = 5$ all'istante $t = 8$ la forza propulsiva sparisce, ed il moto $x(t)$ obbedisce dunque all'equazione $x'' = -10 - x'$, ovvero $x'' + x' = -10$, con le nuove condizioni iniziali $x(5) = 306$ m e $x'(5) = 19$ m/sec ereditate dal moto precedente. Procedendo ancora come prima, una prima integrazione dà $x' + x = -10t + k$ con k da determinare, e le condizioni iniziali danno $19 + 306 = -50 + k$, da cui $k = 375$. Si ottiene allora l'equazione lineare del primo ordine $x' + x = -10t + 375$. Ponendo $p(t) = 1$ e $q(t) = 375 - 10t$, una primitiva di $p(t)$ è ancora $P(t) = t$, e $\int e^{P(t)}q(t)\,dt = \int(375 - 10t)e^t\,dt = (375 - 10t)e^t - \int(-10)e^t\,dt = (385 - 10t)e^t$. L'integrale generale è dunque $x(t) = e^{-t}((385 - 10t)e^t + h) = 385 - 10t + he^{-t}$ con h da determinare; da $x(5) = 306$ si ricava $385 - 50 + he^{-5} = 306$, ovvero $h = -29e^5 \sim -4304$, da cui la soluzione $x(t) = 385 - 10t - 4304e^{-t}$, che vale per $5 \le t \le 8$. L'altezza finale raggiunta all'istante

dello scoppio, ovvero all'istante dell'inizio dello spettacolo dei fuochi d'artificio, è dunque $x(8) \sim 303$ m. (Terminiamo, per curiosità, con alcune osservazioni. La velocità massima toccata dal candelotto si ha quando $(x'(t))' = x''(t) = 170e^{-t} - 30 = 0$, ovvero dopo $\tilde{t} = \log \frac{17}{3} \sim 1,73$ secondi dalla partenza, quando diventa $x'(\tilde{t}) \sim 88$ m/sec, ovvero circa 317 km/h. L'altezza massima raggiunta durante l'ascesa si ha quando $x'(t) = -10 + 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo $\hat{t} = \log \frac{2152}{5} \sim 6,06$ secondi dalla partenza, alla quota $x(\hat{t}) \sim 314$ m; infatti, all'istante dello scoppio il candelotto sta già scendendo, con velocità $x'(\hat{t}) \sim -8,55$ m/sec, circa -31 km/h. È pure curioso notare che, in base al modello adottato in questo problema, se il candelotto non fosse esploso la velocità di discesa si sarebbe stabilizzata velocemente sui -10 m/sec, circa -36 km/h, raggiungendo nuovamente il suolo quando $385 - 10t - 4304e^{-t} = 0$, ovvero dopo circa $t_1 \sim 38,5$ secondi.)





(1) Soluzioni di (1.a); **(2)** Il grafico della legge oraria del moto di (3.b).