Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esercizi in preparazione delle rimanenti prove d'esame (01/07/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 1 - x\,,\ 0 < x \leq 4\} \cup \{1 - 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite di $a_n = \dfrac{(\alpha-1)^n - 2(n-1)^\alpha}{1 + 3n^{1-\alpha}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Determinare il dominio di $g(x) = 1 + \log(1 + \sin x)$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g([0, \frac{2\pi}{3}[)$.

4. Calcolare $\displaystyle\lim_{-\infty,\,0,\,+\infty} \frac{1 + 2e^{-x^2} - 3\cos 2x - 4x^2 + 3x^3}{x^4 + 2\sin^3 x - 3\,\mathrm{arctg}\,(x^3)}$ con l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...).

5. Sia $f_\alpha(x) = \dfrac{\alpha x - 3}{e^x - 3}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Studiare l'andamento di $f_2(x)$ (ovvero con $\alpha = 2$), e tracciarne il grafico.

(b) Determinare le parti principali di $f_\alpha(x)$ in $-\infty$, 0, 1 e $+\infty$. Esiste qualche α per cui $f_\alpha(x)$ è prolungabile a una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$?

6. Posto $\varphi(x) = f_0(x)^2$ (vedi Ex. 5), calcolare $\displaystyle\int \varphi(x)\,dx$.

7. Trovare $w \in \mathbb{C}$ tale che $\overline{w}^2 = 2w$ e $\mathrm{Im}\, w < 0$, e $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^2 + 28 = 10z$ e $\mathrm{Im}\, z > 0$. Determinare infine le radici quarte di $-w - z$.

8. (a) Determinare le soluzioni per $x > 0$ dell'equazione differenziale $\log(x+1) = 2x\,y' + y$, dicendo quali sono prolungabili come tali anche in $x = 0$. Trovare poi le soluzioni di $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$, vedendo quali di esse appaiono tra le precedenti.

(b) Data l'equazione differenziale $(x+1)\,y' - y^2 = 0$ indagare a priori costanza, crescenza, convessità, eventuali simmetrie delle soluzioni. Trovare poi la soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(0) = \alpha \in \mathbb{R}$.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esercizi in preparazione delle rimanenti prove d'esame (01/07/2015) Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq 1 - x\,,\ 0 < x \leq 4\}$ e $A_2 = \{1 - 3^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Un facile confronto grafico mostra che $A_1 = [1, 4]$, mentre $A_2 = \{\ldots,\ 1-81,\ 1-27,\ 1-9,\ 1-3,\ 1-1,\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{9},\ 1-\frac{1}{27},\ 1-\frac{1}{81},\ \ldots\} = \{\ldots,\ -80,\ -26,\ -8,\ -2,\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{26}{27},\ \frac{80}{81},\ \ldots\}$ (famiglia di punti che da un lato tende a $-\infty$, dall'altro si accumula su 1^-). Dunque A è inferiormente illimitato e superiormente limitato, con $\max A = 4$; i suoi punti interni sono quelli di $]1, 4[$; quelli di chiusura sono tutti i suoi più $-\infty$, e, tra questi, quelli isolati sono quelli di A_2, mentre quelli di accumulazione sono $-\infty$ e quelli di $[1, 4]$. Ne ricaviamo che A non è aperto (ad esempio non è intorno del suo punto 4) e che A è chiuso in $\mathbb{R}$ (contiene tutte le sue accumulazioni in $\mathbb{R}$) ma non in $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non contiene la sua accumulazione $-\infty$); non è ne' compatto ne' discreto. Infine, sono di frontiera i punti $-\infty$, quelli di A_2, 1 e 4.

2. Iniziamo con l'esaminare, nella successione $a_n = \frac{(\alpha-1)^n - 2(n-1)^\alpha}{1+3n^{1-\alpha}}$, il comportamento degli addendi al variare di α. Si ha che $(\alpha-1)^n$ tende a 0 se $-1 < \alpha - 1 < 1$ (ovvero se $0 < \alpha < 2$); vale 1 se $\alpha = 2$; tende a $+\infty$ se $\alpha - 1 > 1$ (ovvero se $\alpha > 2$); è la successione alternante $(-1)^n$ se $\alpha = 0$; ed è una successione alternante che tende a ∞ se $\alpha < 0$. Invece $-2(n-1)^\alpha$ tende 0 se $\alpha < 0$, vale -2 se $\alpha = 0$, e tende a $-\infty$ se $\alpha > 0$. Al denominatore, $3n^{1-\alpha}$ tende a $+\infty$ se $1 - \alpha > 0$ (ovvero se $\alpha < 1$), vale 3 se $\alpha = 1$, e tende a 0 se $1 - \alpha < 0$ (ovvero se $\alpha > 1$). Ricordando che se $\gamma > 1$ allora $\lim \frac{\gamma^n}{n^\delta} = +\infty$ per ogni $\delta \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto per le successioni), possiamo allora concludere che se $\alpha < 0$ la successione a_n è una successione alternante che tende a ∞; se $\alpha = 0$ essa tende a 0; mentre quando $\alpha \geq 1$ essa tende a $-\infty$ (se $1 \leq \alpha \leq 2$) o a $+\infty$ (se $\alpha > 2$). Il caso dubbio è quello in cui $0 < \alpha < 1$, perché sopra e sotto i termini prevalenti sono delle potenze a esponente positivo: confrontando tali esponenti, si ha $\alpha \geq 1 - \alpha$ se e solo se $\alpha \geq \frac{1}{2}$, dunque se $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ la successione a_n tende a 0; se $\alpha = \frac{1}{2}$ tende a $-\frac{2}{3}$; mentre se $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ tende a $-\infty$. • Ricapitolando: la successione a_n è alternante e tendente a ∞ quando $\alpha < 0$; tende a 0 per $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$; tende a $-\frac{2}{3}$ per $\alpha = \frac{1}{2}$; tende a $-\infty$ per $\frac{1}{2} < \alpha \leq 2$; e tende a $+\infty$ per $\alpha > 2$.

3. (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 1 + \log(1 + \sin x)$ è dato da $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; da $g(x) = y$ si ricava $\log(1 + \sin x) = y - 1$, da cui $1 + \sin x = e^{y-1}$, da cui $\sin x = e^{y-1} - 1$ (nell'ipotesi che $|e^{y-1} - 1| \leq 1$, ovvero $y \leq 1 + \log 2$). Dunque se $y > 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \varnothing$; se $y = 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; mentre se $y < 1 + \log 2$ allora $g^{-1}(y) = \{\arcsin(e^{y-1} - 1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin(e^{y-1} - 1) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. La funzione non è dunque ne' iniettiva ne' suriettiva; vista la struttura delle sue fibre (in cui appaiono degli arco-seni e i loro supplementari), essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e corestringendola alla sua immagine $]-\infty, 1 + \log 2]$, con inversa $g^{-1}(y) = \arcsin(e^{y-1} - 1)$. Per il calcolo di $g([0, \frac{2\pi}{3}[)$, vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $0 \leq \arcsin(e^{y-1} - 1)\ (< \frac{2\pi}{3})$ e $(0 \leq)\ \pi - \arcsin(e^{y-1} - 1) < \frac{2\pi}{3}$, ovvero $y \geq 1$ (senza scordare però che deve essere $y \leq 1 + \log 2$). Pertanto $g([0, \frac{2\pi}{3}[) = [1, 1 + \log 2]$.

4. • In $-\infty$ e $+\infty$ si ha chiaramente $1 + 2e^{-x^2} - 3\cos 2x - 4x^2 = o_{\mp\infty}(3x^3)$ e $2\sin^3 x - 3\,\mathrm{arctg}\,(x^3) = o_{\mp\infty}(x^4)$, dunque il limite vale $\lim_{\mp\infty} \frac{3x^3}{x^4} = 0^\mp$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$: essendo $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + o_0(x^3) = 1 - x^2 + o_0(x^3)$, $\cos 2x = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^3) = 1 - 2x^2 + o(x^3)$, $\sin^3 x = (x + o_0(x^2))^3 = x^3 + o_0(x^3)$ e $\mathrm{arctg}\,(x^3) = x^3 + o_0(x^3)$, si ottiene $\lim_0 \frac{1 + 2e^{-x^2} - 3\cos 2x - 4x^2 + 3x^3}{x^4 + 2\sin^3 x - 3\,\mathrm{arctg}\,(x^3)} = \lim_0 \frac{1 + 2(1 - x^2 + o_0(x^3)) - 3(1 - 2x^2 + o(x^3)) - 4x^2 + 3x^3}{x^4 + 2(x^3 + o_0(x^3)) - 3(x^3 + o_0(x^3))} = \lim_0 \frac{3x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o_0(x^3)} = -3$.

5. (a) (Figura 2) La funzione $f_2(x) = \frac{2x-3}{e^x-3}$ è definita per $x \neq \log 3$, con $f(0) = \frac{3}{2}$; essa è ovunque $\mathcal{C}^\infty$. Vale $f_2(x) = 0$ per $x = \frac{3}{2}$; quanto al segno, il numeratore è > 0 per $x > \frac{3}{2}$, il denominatore per $x > \log 3$, dunque vale $f_2(x) > 0$ per $x > \frac{3}{2}$ oppure $x < \log 3$. I limiti interessanti valgono facilmente $\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\log 3^\mp} f_2(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = 0^+$; dunque $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$ e, essendo $f_2(x) \sim_{-\infty} \frac{2x-3}{-3} = -\frac{2}{3}x + 1$, si ha che $y = -\frac{2}{3}x + 1$ è asintoto obliquo a $-\infty$. Derivando si ottiene $f_2'(x) = \frac{(5-2x)e^x - 6}{(e^x-3)^2}$, dunque $f_2'(x) = 0$ quando $(5 - 2x)e^x = 6$, ovvero $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} = e^{-x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in due punti a e b con $0 < a < 1$ e $2 < b < 3$ (in realtà vale $a \sim 0{,}3$ e $b \sim 2{,}1$); si ha poi $f_2'(x) > 0$ quando $-\frac{1}{3}x + \frac{5}{6} > e^{-x}$ ovvero (confronto grafico) quando $a < x < \log 3$ oppure $\log 3 < x < b$. Dunque a e b sono rispettivamente punti di minimo e massimo locale, con $f(a) \sim 1{,}5$ e $f(b) \sim 0{,}2$. Un'ulteriore derivazione porge $f_2''(x) = e^x \frac{(2x-7)e^x + 3(2x+1)}{(e^x-3)^3}$, dunque $f_2''(x) = 0$ se e solo se $(2x - 7)e^x + 3(2x + 1) = 0$, ovvero $e^x = -3\frac{2x+1}{2x-7}$: e un confronto grafico (tra esponenziale e omografica) mostra che ciò avviene in un solo punto $c \sim 3{,}0$; sempre il confronto grafico mostra che $f_2''(x) > 0$ (ovvero f_2 convessa) quando $x < \log 3$ o quando $x > c$, dunque c è l'atteso punto di flesso (con $f(c) \sim 0{,}2$ e $f'(c) \sim -0{,}1$).

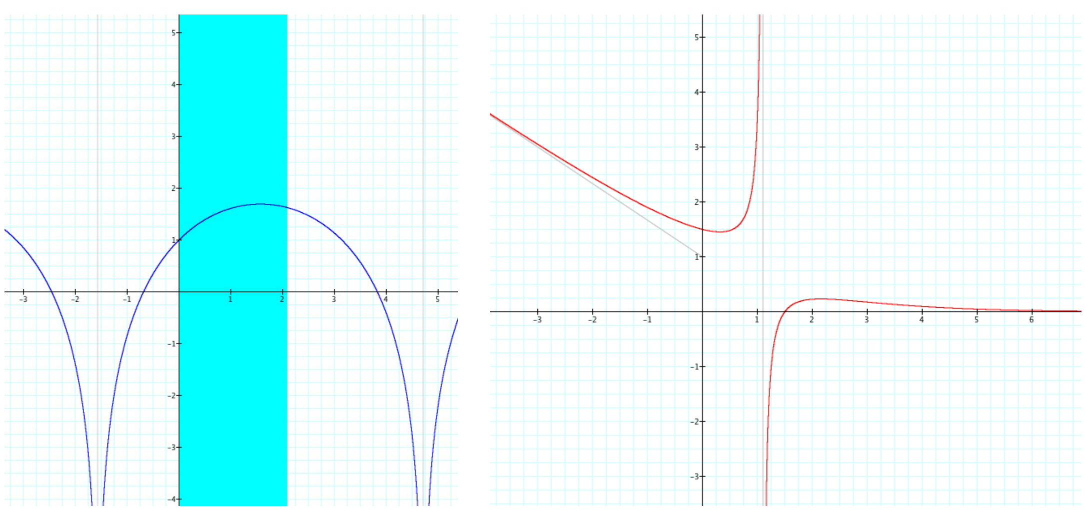
(b) La parte principale di $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x - 3}{e^x - 3}$ in $-\infty$ è $-\frac{\alpha}{3}x$ (se $\alpha \neq 0$) oppure la costante 1 (se $\alpha = 0$); quella in $+\infty$ è $\alpha x e^{-x}$ (se $\alpha \neq 0$) oppure $-3e^{-x}$ (se $\alpha = 0$); quella in $x = 0$ è sempre $f(0) = \frac{3}{2} \neq 0$; e quella in $x = 1$ è $f(1) = \frac{\alpha-3}{e-3}$ (se $\alpha \neq 3$) oppure $\frac{3}{e-3}(x - 1)$ (se $\alpha = 3$). La funzione $f_\alpha(x)$ è prolungabile a una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $\lim_{x\to\log 3} f_\alpha(x) \in \mathbb{R}$, e ciò avviene se e solo se $\alpha = \alpha_\circ := \frac{3}{\log 3} \sim 2{,}7$ con limite $f(\log 3) := \frac{1}{\log 3}$: si tratta dunque solo di vedere tale la funzione sia anche derivabile in $x = \log 3$. Calcoliamo allora $\lim_{x\to\log 3} \frac{\frac{\alpha_\circ x - 3}{e^x - 3} - \frac{1}{\log 3}}{x - \log 3}$: posto $t = x - \log 3$ tale limite diventa $\lim_{t\to 0} \frac{1}{\log 3} \frac{t + 1 - e^t}{t(e^t - 1)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\log 3} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{t^2} = -\frac{1}{2\log 3} \sim -0{,}4$. Pertanto la funzione $f_{\alpha_\circ}(x)$ definita come $\frac{\alpha_\circ x - 3}{e^x - 3}$ per $x \neq \log 3$ e come $\frac{1}{\log 3}$ in $x = \log 3$ è derivabile, con $f'_{\alpha_\circ}(\log 3) = -\frac{1}{2\log 3}$.

6. Si ha $\varphi(x) = f_0(x)^2 = \frac{9}{(e^x-3)^2}$; posto $e^x = t$ (dunque $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}\,dt$) si ottiene $\int \varphi(x)\,dx = \int \frac{9}{t(t-3)^2}\,dt$; dalla teoria sappiamo che esistono $A, B, C \in \mathbb{R}$ tali che $\frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} + \frac{C}{(t-3)^2} = \frac{9}{t(t-3)^2}$, e i calcoli danno $(A, B, C) = (1, -1, 3)$, dunque $\int \frac{9}{t(t-3)^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt - \int \frac{1}{t-3} + 3\int \frac{1}{(t-3)^2}\,dt = \log|t| - \log|t-3| - \frac{3}{t-3} + k$. Otteniamo perciò $\int \varphi(x)\,dx = x - \log|e^x - 3| - \frac{3}{e^x-3} + k$.

7. Il numero $w = x + iy$ deve soddisfare $\overline{w}^2 = 2w$ e $\operatorname{Im} w < 0$, ovvero $(x - iy)^2 = 2(x + iy)$ e $y < 0$. La prima equazione diventa $(x^2 - y^2 - 2x) + i(-2xy - y) = 0$, che equivale al sistema reale dato da $x^2 - y^2 - 2x = 0$ e $(x + 1)y = 0$, con soluzioni $(x, y) = (0, 0)$, $(0, 2)$, $(-1, +\sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$: si ha dunque $w = -1 - \sqrt{3}\,i$. • Il numero $z \in \mathbb{C}$ soddisfa $z^2 + 28 = 10z$ e $\operatorname{Im} z > 0$: da $z^2 - 10z + 28 = 0$ si ricava $z = 5 \mp \sqrt{3}i$, dunque si ha $z = 5 + \sqrt{3}\,i$. • Le radici quarte di $-w - z = -(-1 - \sqrt{3}\,i) - (5 + \sqrt{3}\,i) = -4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi)$ sono $z_k = \sqrt[4]{4}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4})$ per $k = 0, 1, 2, 3$, ovvero $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$ e $z_3 = 1 - i$.

8. (a) L'equazione $2xy' + y = \log(x + 1)$ è lineare del primo ordine, definita per $x > -1$; visto che vengono richieste le soluzioni per $x > 0$, possiamo portarla in forma normale dividendo per x, ottenendo $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{2x}$ e $q(x) = \frac{\log(x+1)}{2x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \frac{1}{2}\log x = \log\sqrt{x}$; posto $u = \sqrt{x}$, si ha poi $\int e^{P(X)}q(x)\,dx = \int \sqrt{x}\frac{\log(x+1)}{2x}\,dx = \int \log(u^2 + 1)\,du = u\log(u^2 + 1) - \int u\frac{2u}{u^2+1}\,du = u\log(u^2 + 1) - 2u + 2\operatorname{arctg} u = \sqrt{x}\log(x + 1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, dunque l'integrale generale per $x > 0$ è $y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\log(x + 1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + k) = \log(x + 1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + k\frac{1}{\sqrt{x}}$ con $k \in \mathbb{C}$. Di queste funzioni, la sola prolungabile per continuità in $x = 0$ è quella con $k = 0$, ovvero $y_0(x) = \log(x + 1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ con valore $y_0(0) = 0$; in realtà, essendo $y_0(x) = 1 + x + o_0(x) - 2 + 2\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o_0(x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x + o_0(x)$ si ha anche prolungabilità come classe $\mathcal{C}^1$, con $y_0'(0) = \frac{1}{3}$; ed essendo $2\cdot 0\cdot y_0'(0) + y_0(0) = \log(0+1) = 0$ si tratta effettivamente di una soluzione su tutto $[0, +\infty[$. • L'equazione $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; scritta $y'' + 2y' + 3y = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = 3e^{-x}$ e $b_2(x) = x + 4$, si trovano rapidamente le soluzioni $y(x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}) + \frac{1}{9}(3x + 10)$ con $A, B \in \mathbb{C}$, nessuna delle quali appare tra le precedenti.

(b) Una costante $y \equiv k$ è soluzione dell'equazione differenziale $(x + 1)\,y' - y^2 = 0$ se e solo se $(x + 1)\cdot 0 - k^2 = 0$ per ogni x in un intervallo, ovvero se e solo se $k = 0$: l'unica soluzione costante è dunque quella nulla. Un'eventuale soluzione $y(x)$ definita all'intorno di $x = -1$ deve soddisfare $0\cdot y'(-1) - y(-1)^2 = 0$, ovvero $y(-1) = 0$; invece sugli intervalli $x < -1$ e $x > -1$ si può portare in forma normale $y' = \frac{y^2}{x+1}$, il che mostra che le soluzioni sono crescenti per $x > -1$ e decrescenti per $x < -1$. Derivando ambo i membri rispetto x e risostituendo y' si ottiene $y'' = \frac{2yy'(x+1) - y^2}{(x+1)^2} = \frac{y^2(2y-1)}{(x+1)^2}$, dunque le soluzioni hanno un punto di flesso a quota $\frac{1}{2}$ e sono convesse sopra e concave sotto. Non vi sono le simmetrie più comuni; c'è tuttavia simmetria della famiglia delle soluzioni rispetto a $x = -1$, come si vede direttamente mostrando che, se $\varphi(x)$ è soluzione, lo è anche $\psi(x) := \varphi(-x - 2)$ • Troviamo ora le soluzioni non costanti dell'equazione. Separando le variabili si ha $\frac{1}{y^2}\,dy = \frac{1}{x+1}\,dx$, da cui integrando si ha $-\frac{1}{y} = \log|x + 1| + k$, ovvero $y(x) = \frac{1}{k - \log|x+1|}$ con $k \in \mathbb{R}$. Quanto alla condizione $y_\alpha(0) = \alpha$, se $\alpha = 0$ si ha $y_0 \equiv 0$, mentre se $\alpha \neq 0$ si ottiene $\alpha = \frac{1}{k}$, da cui $k = \frac{1}{\alpha}$: dunque $y_\alpha(x) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - \log|x+1|} = \frac{\alpha}{1 - \alpha\log|x+1|}$.



1. Ex. 3: grafico di $g(x)$. Ex. 5: grafico di $f_2(x)$.