Analisi Matematica I

Corrado Marastoni

Indice

Nozioni preliminari **3**
Prerequisiti del corso . . . 3
Cenni di logica matematica . . . 20
L'induzione matematica . . . 24

1 Insiemi e numeri **27**
1.1 Insiemi; relazioni, funzioni . . . 27
1.2 Strutture algebriche fondamentali: gruppi, anelli, corpi, spazi vettoriali . . . 37
1.3 I numeri reali . . . 44
1.4 I numeri complessi . . . 50

2 Topologia e convergenza in $\mathbb{R}$ **62**
2.1 La topologia della retta reale e della retta reale estesa . . . 62
2.2 Successioni di numeri reali, funzione esponenziale reale . . . 69
2.3 Serie numeriche . . . 79

3 Funzioni di una variabile reale **86**
3.1 Generalità . . . 86
3.2 Limiti, continuità e confronto locale . . . 92
3.2.1 Limiti . . . 92
3.2.2 Funzioni continue . . . 98
3.2.3 Limiti (ripresa), forme indeterminate e limiti notevoli . . . 106
3.2.4 Funzioni iperboliche . . . 108
3.2.5 Comportamento locale delle funzioni . . . 110
3.3 Derivazione . . . 120
3.3.1 Derivate . . . 120
3.3.2 Derivabilità, crescenza ed estremi locali . . . 127
3.3.3 Derivate successive, funzioni di classe $\mathcal{C}^k$ e $\mathcal{C}^\infty$ . . . 134
3.4 Studio dell'andamento di una funzione . . . 140
3.5 Integrazione . . . 155
3.5.1 Integrazione indefinita (calcolo delle antiderivate) . . . 155
3.5.2 Integrazione definita alla Riemann (calcolo delle aree) . . . 163

4 Equazioni differenziali: primi elementi **181**
4.1 Nozioni generali . . . 181
4.2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili . . . 183
4.3 Equazioni differenziali lineari . . . 185
- Equazioni differenziali lineari del primo ordine . . . 188
- Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti . . . 189
4.4 La meccanica newtoniana . . . 190

Anche se non fanno parte del programma del corso 2014/15 di Analisi I per Fisica/Astronomia, per completezza di raccolta metto a disposizione qui nel seguito anche le pagine 79-85 delle mie note, relative alle serie numeriche reali. (C.M.)

2.3 Serie numeriche

Una *serie* (numerica reale) è una coppia di successioni reali $(a_n, s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ legate da **Serie**

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n \ ;$$

a_n si dirà *termine n-esimo* della serie, s_n la *somma parziale* (o *ridotta*) *n-esima.* La notazione standard per una serie è $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, o semplicemente $\sum a_n$ se è chiaro da dove parte l'indice di somma n (a volte conviene farlo partire da 0, altre da un naturale > 1).

Una serie $\sum a_n$ si dirà *convergente* (risp. divergente a $\pm\infty$, indeterminata) se tale è la successione delle ridotte s_n; capire quale delle tre eventualità si verifica è detto comunemente "determinare il carattere della serie". Se la serie converge, il limite $s = \lim s_n$ si dirà *somma della serie*, e si scriverà $s = \sum a_n$.

Serie convergente, divergente, indeterminata

Somma della serie

Esempi. **(1)** La serie $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$ (cioè tutti gli a_n sono uguali a 1) chiaramente diverge a $+\infty$: infatti $s_n = 1 + \cdots + 1$ (n volte) $= n \to +\infty$. **(2)** La serie $\sum(-1)^n = (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ è indeterminata: infatti $s_n = -1$ (per n dispari) o $s_n = 0$ (per n pari), dunque s_n è indeterminata. **(3)** La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ converge a 2: infatti è facile rendersi conto che $s_n = 2 - \frac{1}{2^n} \to 2$. **(4)** La *serie aritmetica* $\sum x_n$ con $x_n = na$ (per un certo $a \in \mathbb{R}$) ha ridotta $s_n = (1 + 2 + \cdots + n)a = \frac{n(n+1)}{2}a$, dunque converge se e solo se $a = 0$ (con somma 0), e diverge a $(\operatorname{sign} a)\infty$ negli altri casi. **(5)** La *serie armonica* $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ converge o no? E, più generalmente, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$? E la stessa cosa col segno alterno, ovvero $\sum(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$? Visto che non siamo (ne' saremo) in grado di calcolare s_n, per ora restiamo nell'incertezza, nell'attesa di conoscere altri metodi per determinare il carattere di una serie. **(6)** La *serie di Mengoli* $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots$ converge a 1: infatti, essendo $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si ottiene $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$.

Già da alcuni esempi riportati qui sopra emerge che *non sempre si riesce a calcolare la ridotta* s_n, dunque bisognerà elaborare qualche metodo per capire il carattere di una serie senza essere costretti a calcolarne (cosa in realtà piuttosto rara) la ridotta, e di conseguenza senza ambire (nel caso la serie converga) di trovarne la somma esatta.

Iniziamo allora a trattare il problema a partire dagli esempi più semplici, che ne costituiranno i punti di riferimento. In questo senso, le serie più importanti sono la *serie geometrica* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$ (di ragione $q \in \mathbb{R}$) e la *serie armonica* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (di "esponente" $\alpha \in \mathbb{R}$). Iniziamo dalla prima, più facile perché ne sappiamo calcolare la ridotta.

Proposizione 2.3.1. (Serie geometrica) *La serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots$ *converge se* $|q| < 1$*, con somma* $\frac{1}{1-q}$*; se* $q \geq 1$ *diverge a* $+\infty$*; se* $q \leq -1$ *è indeterminata.*

Dimostrazione. È ben noto che se $q \neq 1$ si ha $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, mentre se $q = 1$ si ha $s_n = n$. Il risultando segue dunque cercando il limite di s_n. $\square$

Quanto alla seconda, limitiamoci per il momento a capire qual è il carattere per $\alpha = 1$:

Proposizione 2.3.2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge a* $+\infty$*.*

Dimostrazione. Sia $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ la ridotta n-esima: se $\sum \frac{1}{n}$ fosse convergente, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avrebbe limite finito $s \in \mathbb{R}_{>0}$, e così tutte le sue sottosuccessioni, tra cui quella degli elementi di posto pari $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$: pertanto dovrebbe aversi $\lim(s_{2n} - s_n) = s - s = 0$. Ma ciò non è possibile, in quanto $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. Perciò la successione s_n, monotona crescente, diverge a $+\infty$. $\square$

Le seguenti osservazioni sono importanti.

Proposizione 2.3.3. *Sia* $\sum a_n$ *una serie.*

(1) (Il termine generale di una serie convergente è infinitesimo) *Se* $\sum a_n$ *converge, allora* a_n *tende a* 0*. Il viceversa è invece falso.*

(2) (Definitività del carattere di una serie) *Se* $\sum b_n$ *è una serie di termine generale definitivamente uguale a quello di* $\sum a_n$*,*[66] *le due serie hanno lo stesso carattere.*

(3) (Linearità della somma di una serie convergente) *Se* $\sum a_n$ *converge con somma* s*, dato* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si ha che* $\sum(\alpha a_n)$ *converge con somma* αs*; data poi un'altra serie convergente* $\sum b_n$ *con somma* t *, si ha che* $\sum(a_n + b_n)$ *converge con somma* $s + t$*.*[67]

Dimostrazione. (1) Sia s la somma di $\sum a_n$. Essendo $a_n = s_n - s_{n-1}$ e passando al limite per $n \to +\infty$, poiché le due successioni al secondo membro convergono entrambe a s si ha che $\lim a_n = s - s = 0$. Per far vedere che non è detto che una serie con termine generale infinitesimo sia convergente, basta ricordare $\sum \frac{1}{n}$ (Proposizione 2.3.2). (2) Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = b_n$ per ogni $n > n_0$. Se s_n (risp. t_n) denota la ridotta n-esima di $\sum a_n$ (risp. di $\sum b_n$), per $n > n_0$ si ha $t_n = s_n + (b_1 - a_1) + \cdots + (b_{n_0} - a_{n_0})$, ovvero le due ridotte differiscono della quantità $\sum_{j=1}^{n_0}(b_j - a_j)$, indipendente da n: dunque, passando al limite per $n \to +\infty$ è ovvio che s_n converge (risp. diverge a $\pm\infty$, è indeterminata) se e solo se t_n fa lo stesso. (3) Discende dalla linearità del limite di successioni (Proposizione 2.2.5(c)). $\square$

Esempi. **(1)** Se $\alpha \leq 0$, la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ non può essere convergente: infatti il suo termine generale non è infinitesimo. Idem dicasi per $\sum \operatorname{arctg} n$ e $\sum(-1)^n$: il loro termine generale non è infinitesimo, dunque non possono essere convergenti. **(2)** Se $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x| < 1$ e $|y| < 1$ allora $\sum(x^n - y^n) = \sum(x^n + (-1)y^n) = \sum x^n - \sum y^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-y} = \frac{x-y}{(1-x)(1-y)}$.

Serie a termini positivi Come le successioni monotone per le successioni, le serie a termini positivi (ovvero le $\sum a_n$ con $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$)[68] hanno un comportamento buono, e possono essere studiate in modo particolare.

Proposizione 2.3.4. *Una serie a termini positivi è sempre determinata: o converge (con somma positiva), o diverge a* $+\infty$*.*

---

[66] ovvero, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n = b_n$ per ogni $n > n_0$.

[67] Attenzione: l'enunciato vale solo quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ sono entrambe convergenti.

[68] Come abbiamo già osservato nella Proposizione 2.3.3, ciò che conta è il comportamento definitivo: quello che diremo ora vale, più in generale, per le serie con termini di segno definitivamente costante.

Dimostrazione. La successione delle ridotte di una serie a termini positivi è monotona crescente e a termini positivi: il risultato segue allora dalla Proposizione 2.2.6. $\square$

Per capire il carattere di una serie a termini positivi, i criteri più usati sono quelli del *confronto* e di *asintoticità*, che ora descriviamo. A tal fine, diremo che due successioni a_n e b_n *sono dello stesso ordine* (scrivendo $a_n \sim^* b_n$) se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $a_n = \lambda(1+\sigma_n)b_n$ per una qualche successione infinitesima σ_n: è facile vedere che, se b_n è definitivamente non nulla, ciò equivale a $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}^\times$. È chiaro che si tratta di una relazione d'equivalenza.[(69)]

Proposizione 2.3.5. *Siano* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *due serie a termini positivi.*

(1) (Criterio del confronto) *Sia* $a_n \leq b_n$ *definitivamente* (ad esempio, sia $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$). *Allora, se* $\sum b_n$ *converge, anche* $\sum a_n$ *converge; se* $\sum a_n$ *diverge, anche* $\sum b_n$ *diverge.*

(2) (Criterio di asintoticità) *Se* $a_n \sim^* b_n$ (ad esempio, se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}_{>0}$) *allora* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione. (1) Poiché il carattere di una serie non dipende da un numero finito di termini iniziali, possiamo supporre che sia $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$: allora, dette s_n e t_n le ridotte di $\sum a_n$ e $\sum b_n$, si ha $s_n \leq t_n$, e basta applicare il teorema del confronto per le successioni. (2) Per definizione di limite, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2}\lambda < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3}{2}\lambda$, ovvero (essendo $b_n > 0$) tale che $\frac{\lambda}{2}\, b_n < a_n < \frac{3\lambda}{2}\, b_n$. Ma allora basta applicare il teorema del confronto appena provato in (1): se $\sum b_n$ converge allora anche $\sum(\frac{3\lambda}{2}\, b_n)$ converge, e per confronto converge pure $\sum a_n$, mentre se $\sum b_n$ diverge allora anche $\sum(\frac{\lambda}{2}\, b_n)$ diverge, e per confronto diverge pure $\sum a_n$. $\square$

Esempi. **(1)** Torniamo a parlare della serie armonica (a termini positivi) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Poiché si è mostrato (Proposizione 2.3.2) che $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, per il criterio del confronto si ha che quando $\alpha < 1$ anche $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge a $+\infty$. Notiamo poi che $a_n = \frac{1}{n^2}$ è asintotico al termine generale della serie di Mengoli $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (infatti $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$), dunque, per il criterio di asintoticità, $\sum \frac{1}{n^2}$ ha lo stesso carattere della serie di Mengoli, ovvero converge. Ancora per confronto possiamo allora risolvere i casi $\alpha > 2$: poiché in quel caso $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$, anche tali serie convergono. Ci resta da capire cosa accade quando $1 < \alpha < 2$, e lo faremo tra breve. **(2)** $\sum a_n$ con $a_n = \frac{2n-37}{3n^2+1}$ è a termini definitivamente positivi; poiché a_n è dello stesso ordine di $\frac{1}{n}$ (ovvero $\lim \frac{a_n}{1/n} = \lim n\, a_n = \frac{2}{3} > 0$) e sappiamo che $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, lo stesso farà $\sum a_n$ per il criterio di asintoticità. **(3)** Sia abbia $\sum(1 - \cos \frac{1}{n^\alpha})$ con $\alpha > 0$. Si tratta di una serie a termini positivi, dunque o converge (in $\mathbb{R}_{\geq 0}$) o diverge a $+\infty$. Poiché $\frac{1}{n^\alpha}$ è infinitesima, il termine generale della serie è infinitesimo: il limite di variabile reale $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0$ ci dice che $1 - \cos \frac{1}{n^\alpha} \sim^* \frac{1}{n^{2\alpha}}$, e perciò la nostra serie ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$. Anticipando quello che mostreremo tra breve, diciamo che la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\beta}$ converge se e solo se $\beta > 1$, e diverge per $\beta \leq 1$: dunque la nostra serie converge per $\alpha > \frac{1}{2}$, e diverge a $+\infty$ per $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. (Due parole sul caso $\alpha \leq 0$: qui si ha $\lim \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$, e –ma è difficile da mostrare– il termine $1 - \cos \frac{1}{n^\alpha}$ non è mai infinitesimo, dunque la serie, non potendo convergere, diverge a $+\infty$.) **(4)** Sia abbia $\sum |\alpha - 2 \operatorname{arctg} n|^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Poiché $\operatorname{arctg} n \to \frac{\pi}{2}$,

---

[(69)] Si abbia $a_n = f(n)$ e $b_n = g(n)$ per due opportune funzioni $f(x)$ e $g(x)$ di variabile reale definite all'intorno di $+\infty$: in tal caso, nelle notazioni dei limiti di variabile reale (vedi pag. 110) è chiaro che se $f(x) \sim^*_{+\infty} g(x)$ allora $a_n \sim^* b_n$. Dunque la conoscenza dei comportamenti asintotici delle funzioni permette un uso più ampio e disinvolto dei criteri che seguono, ed è proprio questo a suggerire l'opportunità di affrontare lo studio delle serie numeriche dopo quello dei limiti di funzioni di variabile reale, anziché subito dopo le successioni.

se $\alpha \neq \pi$ il termine generale della serie non è infinitesimo, dunque la serie (a termini positivi) diverge a $+\infty$; la stessa cosa accade se $\alpha = \pi$ e $\beta \leq 0$. Dunque l'unico caso interessante è quello in cui $\alpha = \pi$ e $\beta > 0$. Notando che $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = 2$ (ad esempio si ricordi che per $x > 0$ si ha $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \equiv \frac{\pi}{2}$, e che $\operatorname{arctg} t \sim_0 t$) si ha che $\pi - 2 \operatorname{arctg} n \sim^* \frac{1}{n}$, ovvero il termine generale della serie ha lo stesso ordine di $\frac{1}{n^\beta}$: la serie converge dunque se e solo se $\beta > 1$ (vedi più sotto per la serie armonica). **(5)** Si abbia la serie $\sum (\frac{\alpha n}{n+1})^n$ con $\alpha > 0$. Se $0 < \alpha < 1$ si ha $\frac{\alpha n}{n+1} < \alpha$, dunque $(\frac{\alpha n}{n+1})^n < \alpha^n$ e la serie converge per il confronto; se invece $\alpha \geq 1$ la serie diverge a $+\infty$ perché il termine generale non è infinitesimo (in particolare, se $\alpha = 1$, il termine generale tende a $\frac{1}{e} > 0$, mentre se $\alpha > 1$ tende a $+\infty$ perché $\frac{\alpha n}{n+1} > 1$ definitivamente). Va comunque osservato che una serie come questa sarà più facilmente comprensibile col criterio della radice, che vedremo tra poco.

Citiamo, senza dimostrarlo, il seguente

Proposizione 2.3.6. (Criterio di condensazione di Cauchy) *Una serie* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *a termini positivi e decrescente ha lo stesso carattere della serie "condensata"* $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k a_{2^k}$.[(70)]

Esempio. Il criterio di condensazione di Cauchy ci permette di chiudere finalmente la questione della serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ nel caso $\alpha > 0$, in cui è rimasto il dubbio per $1 < \alpha < 2$: infatti la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} (2^{1-\alpha})^k$ converge se e solo se $|q| = 2^{1-\alpha} < 1$, ovvero $1 - \alpha < 0$, ovvero $\alpha > 1$. Pertanto la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$, e permette di definire, con la sua somma, una delle più importanti funzioni non elementari, ovvero $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ (la *"zeta di Riemann"*, il cui grafico è in Figura 2.3). Di tale funzione si conoscono solo pochi valori esatti, essenzialmente quelli nei naturali pari, ad esempio si sa che $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (il calcolo della somma di questa serie è dovuto a Eulero).

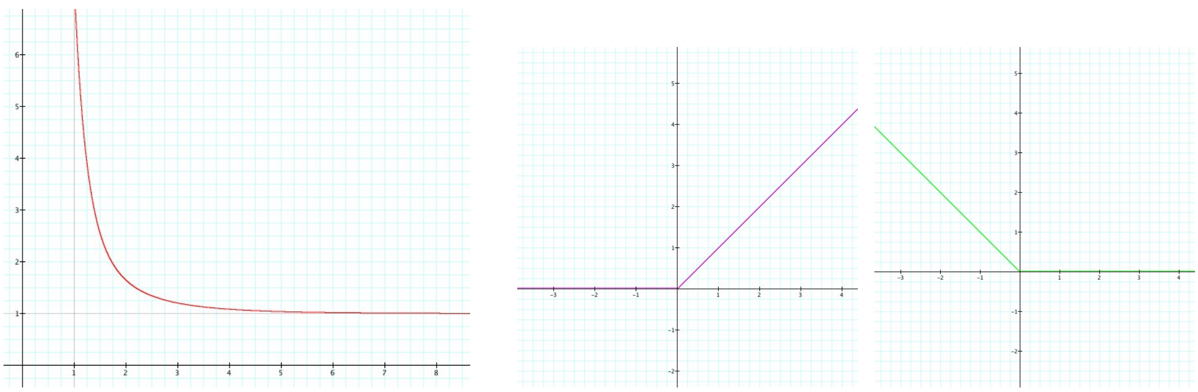

Figura 2.3: Grafici della funzione zeta di Riemann e delle funzioni parte positiva e negativa.

Serie a termini di segno qualunque Dopo la parentesi sulle serie a termini positivi (che riguarda più in generale le serie definitivamente a segno costante), torniamo a occuparci del caso generale.

Una serie $\sum a_n$ si dirà *assolutamente convergente* se la serie (a termini positivi) dei suoi **Serie assolutamente convergente**

[(70)] In sostanza, i termini della serie $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = (a_1) + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$ vengono moduli $\sum |a_n|$ converge. Nel caso di serie a termini positivi (o anche a termini definitivamente a segno costante), chiaramente l'assoluta convergenza equivale alla (semplice) convergenza; nel caso generale si ha che

Proposizione 2.3.7. *Una serie assolutamente convergente è anche convergente; invece il viceversa è falso.*

Dimostrazione. Ricordiamo le funzioni $(\cdot)^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*parte positiva*) e $(\cdot)^- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (*parte negativa*) date rispettivamente da $x^+ := \max(x, 0)$ e $x^- := \max(-x, 0)$ (vedi Figura 2.3): si noti che entrambe queste funzioni sono a valori positivi, che $x = x^+ - x^-$ e che $|x| = x^+ + x^-$ (ad esempio $3^+ = 3$ e $3^- = 0$, $(-7)^+ = 0$ e $(-7)^- = 7$). Data una serie $\sum a_n$, consideriamo le serie (a termini positivi) $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$: poiché per ipotesi $\sum |a_n|$ converge, essendo $a_n^-, a_n^+ \leq |a_n|$ si ha che anche le serie $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergono per il criterio del confronto, ma allora (Proposizione 2.3.3) converge anche la serie differenza $\sum(a_n^+ - a_n^-) = \sum a_n$. Invece la serie (di Leibniz) $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ converge semplicemente (lo vedremo tra poco) ma non assolutamente (infatti la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ diverge). □

Esempio. Per $\alpha > 1$ la serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge assolutamente (infatti in questi casi la serie armonica $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge), dunque converge anche semplicemente.

Dunque, in presenza di una serie con termini di segno qualunque, la prima cosa da fare è verificare se sia assolutamente convergente (usando, per la serie dei moduli, le cose studiate per le serie a termini positivi, in particolare i criteri del confronto e di asintoticità): se sì, allora è anche convergente. A tal fine, sono di grande importanza pratica anche i seguenti due criteri.[(71)]

Proposizione 2.3.8. *Sia* $\sum a_n$ *una serie.*

(1) (Criterio del rapporto) *Sia* $a_n \neq 0$ *definitivamente. Se esiste* $0 \leq \alpha < 1$ *tale che* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \alpha$ *definitivamente* (es., se esiste $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$), *allora* $\sum a_n$ *converge assolutamente. Se invece* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *definitivamente* (es., se esiste $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$), *allora* $\sum a_n$ *non converge.*

(2) (Criterio della radice) *Se esiste* $0 \leq \alpha < 1$ *tale che* $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha$ *definitivamente* (es., se esiste $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$), *allora* $\sum a_n$ *converge assolutamente. Se invece* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ *definitivamente* (es., se esiste $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$), *allora* $\sum a_n$ *non converge.*

Dimostrazione. Limitiamoci alla prova del criterio del rapporto, lasciando per esercizio quella (simile) di quello della radice. Se esiste $0 \leq \alpha < 1$ tale che $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \alpha$ definitivamente (diciamo per $n \geq n_0$) allora vale $|a_{n+1}| \leq \alpha\,|a_n| \leq \alpha^2\,|a_{n-1}| \leq \cdots \leq \alpha^{n-n_0+1}|a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{\alpha^{n_0+1}}\alpha^n$, in altre parole $|a_{n+1}|$ è maggiorato da (un multiplo scalare di) una serie geometrica di ragione $\alpha < 1$: dunque $\sum a_n$ converge assolutamente. Se invece $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ definitivamente (diciamo per $n \geq n_0$) si ha $|a_{n+1}| \geq |a_n| \geq \cdots \geq |a_{n_0}|$, dunque (essendo $a_{n_0} \neq 0$) si ha che $\sum a_n$ non può convergere perché il termine generale non è infinitesimo. □

Esempi. **(1)** Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ converge assolutamente (criterio del rapporto: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$ tende a $0 < 1$), in particolare converge. Tale serie si chiama *serie esponenziale* **Serie esponenziale**

"condensati" in quelli di posto la potenza di 2 precedente, ovvero $(a_1) + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots$.

[(71)] Il criterio della radice è leggermente più efficace di quello del rapporto (infatti, come mostra la Proposizione 2.2.12(iv), se funziona il rapporto funziona anche la radice), mentre quello del rapporto è generalmente di uso più facile.

perché la sua somma è il numero $\exp(x) := \lim(1+\frac{x}{n})^n$, di cui costituisce una definizione alternativa.(72) La successione $e_n(1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ che, crescendo, definisce $e = 2,7182818\cdots$ è $e_1(1) = 2$, $e_2(1) = \frac{9}{4} = 2,25$, $e_3(1) = \frac{64}{27} = 2,370$, $e_4(1) = \frac{625}{256} = 2,441$ e così via; d'altra parte, la successione delle ridotte s_n della serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ cresce ben più rapidamente, essendo $s_0 = 1$, $s_1 = 1+1 = 2$, $s_2 = 1+1+\frac{1}{2} = 2,5$, $s_3 = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6} \sim 2,666$, $s_4 = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} \sim 2,708$ e così via. È interessante anche stimare la differenza tra la ridotta n-esima s_n e la somma finale e:

$$e - s_n = \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!\,n}.$$

Si nota che, effettivamente, la serie esponenziale approssima e in modo estremamente efficace: ad esempio, la ridotta di ordine $m = 7$ approssima e a meno di un errore inferiore a $\frac{1}{7!\,7} \sim 3 \cdot 10^{-5}$. È facile, a questo punto, dimostrare anche che **Irrazionalità di e**

Il numero di Nepero è irrazionale.

Supponiamo infatti che sia $e = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{N}$. Da $e - s_n < \frac{1}{n!\,n}$ si ricava che $0 < n!\,(e - s_n) < \frac{1}{n}$. Poiché sia $n!\,e = n!\,\frac{m}{n} = m(n-1)! \in \mathbb{N}$ che $n!\,s_n = n!\,(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = n! + n! + n(n-1)\cdots 3 + n(n-1)\cdots 4 + \cdots + n + 1 \in \mathbb{N}$, si ha pure $n!\,(e-s_n) \in \mathbb{Z}$: ma ciò è assurdo, perché non vi sono numeri interi tra 0 e $\frac{1}{n} < 1$. **(2)** Dato $x \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$ ha $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \frac{n}{n+1}$ che tende a $|x|$: dunque converge assolutamente per $|x| < 1$, non converge per $|x| > 1$ (in particolare per $x < -1$ diverge a $-\infty$), converge solo semplicemente per $x = 1$ (risulta l'opposto della serie di Leibniz) e non converge per $x = -1$ (risulta l'opposto della serie armonica). Tale serie si chiama *serie logaritmica* **Serie logaritmica** perché si dimostra che per $-1 < x \leq 1$ la sua somma è il numero $f(x) = \log(1+x)$, di cui costituisce una definizione alternativa. **(3)** La serie $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge (criterio del rapporto); invece la serie $\sum \frac{n^n}{n!}$ diverge (il criterio del rapporto dà $e > 1$; oppure il criterio della radice, ricordando che $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$).

Terminiamo esaminando una particolare famiglia di serie a termini di segno alterno.

Proposizione 2.3.9. (Criterio di Leibniz per le serie a termini di segno alterno) *Sia α_n una successione di termini > 0, decrescente e infinitesima. Allora la serie* "di Leibniz" *con termini di segno alterno $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge.*

Dimostrazione. Si dimostra facilmente che: (a) la sottosuccessione delle ridotte di posto pari $s_{2n} = -\alpha_1 + \alpha_2 - \cdots - \alpha_{2n-1} + \alpha_{2n}$ è decrescente (infatti $s_{2(n+1)} - s_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leq 0$); (b) la sottosuccessione delle ridotte di posto dispari $s_{2n+1} = -\alpha_1 + \alpha_2 - \cdots + \alpha_{2n} - \alpha_{2n+1}$ è crescente (infatti $s_{2n+1} - s_{2n-1} = -\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n} \geq 0$); (c) tutti i termini della prima sottosuccessione sono maggiori di tutti i termini della seconda, ovvero $s_{2k} \geq s_{2l+1}$ per ogni $k, l \in \mathbb{N}$ (infatti se $k = l$ si ha $s_{2k} - s_{2k+1} = -(-\alpha_{2k+1}) > 0$, poi se $k > l$ si ha $s_{2k} \geq s_{2k+1} \geq s_{2l+1}$ e se $k < l$ si ha $s_{2k} \geq s_{2l} \geq s_{2l+1}$); (d) la differenza $s_{2n} - s_{2n+1}$ tende a zero (infatti $s_{2n} - s_{2n+1} = -(-\alpha_{2n+1}) \to 0$). Grazie a (a) e (c) (risp. a (b) e (c)) si conclude che la sottosuccessione s_{2n} (risp. s_{2n+1}) è decrescente ed inferiormente limitata (risp. crescente e superiormente limitata) e dunque convergente; grazie a (d), i limiti di s_{2n} e s_{2n+1} saranno lo stesso, che sarà anche il limite di s_n,(73) ovvero per definizione la somma di $\sum (-1)^n \alpha_n$. □

Esempi. **(1)** La serie $\sum \frac{(-1)^n}{n^p}$, ove $p \in \mathbb{R}$, non converge se $p \leq 0$ (perché il termine generale non è infinitesimo), converge solo semplicemente se $0 < p \leq 1$ (non converge assolutamente, ma il criterio di Leibniz assicura almeno la convergenza semplice) e converge assolutamente se $p > 1$. **(2)** Esaminiamo la convergenza della serie $\sum \frac{(1-5\cos x)^n}{\log(1+n)}$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Notiamo innanzitutto che $-4 < 1 - 5\cos x < 6$,

(72) La dimostrazione si basa sul provare che $\lim(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} - (1+\frac{x}{n})^n) = 0$, affermazione che si prova direttamente usando la formula del binomio di Newton (si omettono i calcoli).

(73) Va notato che una successione c_n ha limite ℓ se e solo se entrambe le sottosuccesioni dei termini di posto pari c_{2n} e dispari c_{2n+1} hanno limite ℓ.

e poniamo per brevità $\theta := \arccos \frac{1}{5}$ e $\varphi := \arccos \frac{2}{5}$ (si ha dunque $\frac{\pi}{3} < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$). Se $1 - 5\cos x = 0$ (ovvero se $\cos x = \frac{1}{5}$, ovvero se $x = \pm\theta + 2k\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$) tutti i termini sono nulli, e la serie ovviamente converge (a 0). Supponiamo ora che $1 - 5\cos x \neq 0$, e cerchiamo di applicare il criterio del rapporto: posto $a_n = \frac{(1-5\cos x)^n}{\log(1+n)}$, si ha $\lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim |1 - 5\cos x| \frac{\log(1+n)}{\log(2+n)} = |1 - 5\cos x|$ e dunque, se $|1 - 5\cos x| < 1$ (ovvero se $-1 < 1 - 5\cos x < 1$, cioè se $0 < \cos x < \frac{2}{5}$, cioè se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\varphi + 2k\pi$ oppure $\varphi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) la serie converge assolutamente e dunque converge; se invece $|1-5\cos x| > 1$ (ovvero se $1-5\cos x < -1$ oppure $1-5\cos x > 1$, cioè se $\cos x < 0$ oppure $\cos x > \frac{2}{5}$, cioè se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ oppure $-\varphi + 2k\pi < x < \varphi + 2k\pi$) la serie non converge (si noti anzi che se $\cos x < 0$, ovvero se $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, essendo $1 - 5\cos x > 1$ si ha $a_n > 0$, e dunque la serie diverge a $+\infty$). Resta da chiarire il solo caso in cui $|1 - 5\cos x| = 1$, ovvero in cui $1 - 5\cos x = \pm 1$, ovvero in cui $\cos x = 0$ (cioè $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$) oppure $\cos x = \frac{2}{5}$ (cioè $x = \pm\varphi + 2k\pi$). Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ la serie diventa $\sum \frac{1}{\log(1+n)}$: poiché si ha definitamente $n > \log(1 + n) > 0$ si ricava $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\log(1+n)}$ e dunque, poiché la serie $\sum \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$, anche la serie $\sum \frac{1}{\log(1+n)}$ divergerà a $+\infty$. Se invece $x = \pm\varphi + 2k\pi$ la serie diventa $\sum (-1)^n \frac{1}{\log(1+n)}$, che converge per il criterio di Leibniz (infatti la successione positiva $\frac{1}{\log(1+n)}$ è decrescente e infinitesima) ma non converge assolutamente (per quanto appena visto nel caso in cui $\cos x = 0$). Ricapitolando, la serie converge assolutamente se $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < -\varphi + 2k\pi$ oppure $\varphi + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; converge semplicemente ma non assolutamente per $x = \pm\varphi + 2k\pi$; diverge a $+\infty$ per $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; non converge se $-\varphi + 2k\pi < x < \varphi + 2k\pi$ (i termini sono di segno alterno e non sono infinitesimi, anzi divergono a $+\infty$ in valore assoluto).

Esercizio. *Studiare il carattere delle seguenti serie al variare di $x \in \mathbb{R}$:*

$$(1)\ \sum \frac{2n-37}{n^x}\,; \qquad (2)\ \sum \frac{1}{1+x^n}\,; \qquad (3)\ \sum \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+n^2x}\,; \qquad (4)\ \sum \left(\frac{2nx+3}{n(x^2+1)}\right)^{2n}.$$

Risoluzione. (1) La serie è definitivamente a termini positivi, e il termine $\frac{2n-37}{n^x}$ è dello stesso ordine di $\frac{n}{n^x} = \frac{1}{n^{x-1}}$: dunque, per asintoticità, se $x - 1 > 1$ (ovvero se $x > 2$) la serie converge, mentre se $x - 1 \leq 1$ (ovvero se $x \leq 2$) la serie diverge a $+\infty$. (2) Intanto dovrà essere $x \neq -1$. Se $x > -1$ la serie è a termini positivi: si noti che se $-1 < x \leq 1$ il termine generale non è infinitesimo e dunque la serie diverge a $+\infty$, mentre se $x > 1$ il termine $\frac{1}{1+x^n}$ è dello stesso ordine di $\frac{1}{x^n} = (\frac{1}{x})^n$ (termine della serie geometrica, con $0 < \frac{1}{x} < 1$), dunque la serie converge. Similmente, se invece $x < -1$ si ha che $|\frac{1}{1+x^n}|$ è dello stesso ordine di $|\frac{1}{x^n}| = (\frac{1}{|x|})^n$ (termine della serie geometrica, con $0 < \frac{1}{|x|} < 1$), dunque la serie converge assolutamente. (3) Per $x = 0$ la serie non converge, perché il termine generale non è infinitesimo. Per $x \neq 0$ il criterio del rapporto non dà informazioni (infatti $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$), ma basta notare che in tal caso il termine $|a_n| = \frac{\sqrt{n}}{|1+n^2x|}$ è dello stesso ordine di $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ per concludere che la serie è assolutamente convergente. (4) Il criterio della radice ci dà $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{|2nx+3|}{n(x^2+1)}\right)^2$ che tende a $\left(\frac{|2x|}{x^2+1}\right)^2$ se $x \neq 0$, e a 0 se $x = 0$: dunque per $\frac{|2x|}{x^2+1} < 1$ (ovvero per $x \neq \mp 1$, compreso $x = 0$) la serie converge assolutamente, mentre se $x = \mp 1$ essa diverge a $+\infty$: infatti se $x = 1$ si ha che $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{2n+3}{2n}\right)^2 \geq 1$, mentre se $x = -1$ ciò non si può dire ma il termine generico della serie $\left(\frac{-2n+3}{2n}\right)^{2n} = \left((1 + \frac{-3/2}{n})^n\right)^2$ non è infinitesimo perché tende a $(e^{-\frac{3}{2}})^2 = e^{-3}$.

3 Funzioni di una variabile reale

Il nucleo centrale del corso, che affrontiamo in questo capitolo, consiste nello studio delle funzioni reali di una variabile reale, ovvero le $f : A \to \mathbb{R}$ che ad ogni elemento x del dominio $A \subset \mathbb{R}$ assegnano uno ed un ben precisato valore reale $f(x)$.

3.1 Generalità

Prima di approfondire la conoscenza "locale" delle funzioni tramite la nozione di limite, richiamiamo alcune nozioni "globali", dipendenti dalle sole proprietà di corpo commutativo totalmente ordinato di $\mathbb{R}$.

Operazioni e ordine con le funzioni Le operazioni di somma e prodotto del corpo commutativo $\mathbb{R}$ inducono in modo naturale delle operazioni nell'insieme

Operazioni e ordine

$$\mathbb{R}^A := \{\text{funzioni } A \to \mathbb{R}\}$$

delle funzioni reali di una variabile reale con dominio un certo $A \subset \mathbb{R}$: se f, $g \in \mathbb{R}^A$ sono due funzioni, la loro *somma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ ed il loro *prodotto* $fg : A \to \mathbb{R}$ saranno le funzioni date da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) := f(x)g(x)$ per ogni $x \in A$; se g non si annulla mai si potrà anche considerare la funzione *quoziente* $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni $x \in A$. Tali operazioni fanno di $\mathbb{R}^A$ un anello (vedi pag. 40). In particolare, la funzione *opposta* di f è $-f : A \to \mathbb{R}$ data da $(-f)(x) = -f(x)$ e, se g non si annulla mai, la funzione *reciproca* di g è $\frac{1}{g} : A \to \mathbb{R}$ data da $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$. Inoltre è definita una *moltiplicazione per scalari*: se $f \in \mathbb{R}^A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ si definisce la funzione $\alpha f : A \to \mathbb{R}$ tramite $(\alpha f)(x) := \alpha\, f(x)$. Somma e moltiplicazione per scalari fanno di $\mathbb{R}^A$ anche uno spazio vettoriale —anzi di più: un'algebra— sul corpo $\mathbb{R}$ (vedi pag. 42).
Dal fatto che dominio e codominio sono entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ha anche senso "comporre" due funzioni: se $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $f(A) \subset B$ si definisce la funzione *composta* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ come $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in A$. La composizione è associativa e ha elemento neutro nella funzione identità $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $A, B \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ è una funzione biiettiva, allora come si sa è univocamente definita la funzione *inversa* $f^{-1} : B \to A$ tale che $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$. Dalla relazione d'ordine totale "$\le$" di $\mathbb{R}$ si introduce inoltre una relazione d'ordine (parziale) in $\mathbb{R}^A$ ponendo $f \le g$ se e solo se $f(x) \le g(x)$ per ogni $x \in A$.

Esempi. **(1)** Se $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = \sin x$, allora $(h \circ (f + 3g))(x) = \sin(x^2 + 3|x|)$. **(2)** La funzione $\sqrt{\log(|x| - 4)}$ può essere vista come la composizione $h \circ g \circ f$, ove $f(x) = |x| - 4$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = \sqrt{x}$. **(3)** La funzione $6 \operatorname{arctg}^3(\sin x - 1)$ può essere vista come la composizione $k \circ h \circ g \circ f$, ove $f(x) = \sin x - 1$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$, $h(x) = x^3$ e $k(x) = 6x$. **(4)** La funzione $f : [2, 5[\to [-1, 8[$ è iniettiva (infatti,