Cenni di logica matematica

Diamo alcuni rapidi cenni di *logica matematica*, al fine di fissare un linguaggio ed alcune norme basilari nelle deduzioni matematiche.

Proposizioni logiche Una *proposizione* è un'affermazione, come ad esempio P = "Il Veneto è una regione dell'Italia", Q = "Tutte le auto che circolano in Italia sono di marca Fiat", R = "Rovigo è lontana da Padova", S = "Carlo Magno era di sesso maschile", T = "Rovigo è più lontana da Padova che da Tokyo", U = "Il cioccolato è buonissimo", V = "Il cioccolato non provoca mai i brufoli", W = "7 è un numero dispari". Nella logica matematica ci si occupa però esclusivamente delle *proposizioni logiche*, ovvero di quelle che portano in sè il valore di *verità* o di *falsità*: ad esempio, tutte le suddette proposizioni sono logiche tranne R (non è chiaro nella frase cosa debba significare "lontano") e U (giudizio individuale, sul quale non ha alcun senso pronunciarsi in termini di "vero" o "falso"). Può accadere (ed è in realtà quello che servirà di più a noi) che una proposizione contenga, al suo interno, delle *variabili* $x, y, ...$ una volta fissate le quali essa diventi una proposizione logica: in tal caso si parlerà di *proposizione logica aperta* o *predicato*, e si indicherà con una scrittura del tipo $\mathrm{P}(x, y, \dots)$. Ad esempio, le proposizioni $\mathrm{P}(x, y)$ = "$x^2 + y^2 - 1 > 0$" e $\mathrm{Q}(x)$ = "x è stato un re di Roma" sono proposizioni logiche aperte, perché una volta che si sia precisato chi sono x e y si può dire con chiarezza se esse siano vere o false : così ad esempio $\mathrm{P}(1, 1)$ e Q(Anco Marzio) sono vere, mentre $\mathrm{P}(1, 0)$ e Q(Cicerone) sono false.

Verità e falsità, assiomi e postulati Torniamo sulle nozioni di "vero" e "falso" (cioè "non vero") che, come abbiamo detto, le proposizioni logiche si portano dentro come attributo imprescindibile. Si tratta naturalmente delle usuali nozioni di verità e falsità del senso comune: pertanto, negli esempi dati precedentemente, tra le proposizioni logiche P, Q, S, T, V e W è chiaro e noto a tutti che le proposizioni vere sono P, S, W e le false sono Q, T, V. Per mostrare questo loro carattere si dà una *dimostrazione*, ovvero si adducono argomenti che manifestano in modo inconfutabile la loro verità o falsità, solitamente usando un processo *deduttivo*[(5)]: ad esempio, per dimostrare che V è falsa basta dire "Infatti la settimana scorsa ho mangiato in un baleno un'intera confezione familiare di cioccolato al latte e dopo tre minuti già mi erano spuntati sette brufoli" (dunque è bastato mostrare un solo caso in cui il cioccolato ha avuto il malefico effetto), mentre per dimostrare che W è vera si può dire "infatti, dividendo 7 per 2 si ha quoziente 3 con resto 1, ed i numeri dispari sono proprio quelli che, divisi per 2, danno resto 1: dunque 7 è dispari". Queste dimostrazioni sono evidenti per tutti; talvolta, però, può capitare di avere bisogno di sapere che una certa importante proposizione logica è vera,

[(5)] senza entrare nei dettagli, la *deduzione* è il procedimento in base al quale da alcune premesse si fanno seguire necessariamente delle conclusioni, in base a regole logiche accettate in partenza.

ma che non sia possibile fornire una dimostrazione evidente né della sua verità né della sua falsità. Quando di essa viene comunque accettata la verità in modo "fideistico", si dice che questa proposizione è un *assioma* o *postulato*. Il termine "assioma" si usa di preferenza per certi fondamenti irrinunciabili della logica, mentre il termine "postulato", invece, è dato piuttosto ai fondamenti di una scienza che, se non dati da subito per veri, non permettono di ottenere ulteriori risultati (esempi classici sono l'assioma logico di "non contraddizione", per il quale una proposizione e la sua negazione non possono mai essere entrambe vere, ed il postulato geometrico delle rette parallele di Euclide, per il quale "Due rette parallele nello spazio non si incontrano mai").[6] Rifiutare un assioma o un postulato comporta il prezzo di rinunciare a tutte le cose che da questi discendono: così, ad esempio, rifiutando l'assioma di non contraddizione si rinuncia praticamente a tutta la logica (con conseguenze drammatiche, come è intuibile), mentre rifiutando il postulato delle rette parallele, accettato di buon grado da tutti per due millenni prima di essere messo in discussione, accanto alla vecchia e nota geometria euclidea si dà spazio anche alle geometrie "non euclidee' (come la geometria proiettiva o la geometria iperbolica) in cui rette parallele hanno punti di intersezione.

I connettivi logici Per mettere in relazione tra loro le proposizioni si usano i "connettivi logici", che sono sostanzialmente quattro: la *negazione* (che si indica con "non" o col simbolo "$\neg$"), la *disgiunzione* ("o", "oppure", "vel" "$\vee$"), la *congiunzione* ("e", "et", "$\wedge$") e l'*implicazione* ("implica", "se... allora...", "$\Rightarrow$"). A partire da proposizioni P e Q preesistenti, i connettivi logici ne creano di nuove: "non P", "non Q", "P o Q", "P e Q", "se P allora Q". Più precisamente:

(1) La proposizione "non P" afferma l'esatto contrario di P; in termini di verità, per il succitato assioma di non contraddizione, "non P" è vera se e solo se P è falsa.

(2) La proposizione "P o Q" afferma *almeno una* tra P e Q, senza pretendere di affermare entrambe. Pertanto, "P o Q" è vera se e solo se almeno una tra P e Q è vera, ed è falsa se e solo se sia P che Q sono false.

(3) La proposizione "P e Q", invece, afferma *entrambe* P e Q. Dunque, "P e Q" è vera se e solo se sia P che Q sono vere, ed è falsa se e solo se almeno una delle due è falsa.

(4) La proposizione "se P allora Q" afferma che se P è vera allora anche Q è vera: pertanto essa è sempre vera, tranne il caso in cui P è vera e Q è falsa (ciò traduce il ben noto detto *Ex vero sequitur verum, ex falso sequitur quodlibet*, cioè: da una cosa vera conseguono solo cose vere, mentre da una cosa falsa segue tutto ciò che si vuole). Nell'implicazione "se P allora Q", la proposizione P si chiama *antecedente* (o anche *ipotesi*), mentre Q è detta *conseguente* (o *tesi*).

[6] Nel dizionario Garzanti, "assioma" è definito come *verità di per sè evidente ed indiscutibile, che sta alla base di ogni dimostrazione; nella matematica e nella logica contemporanee, proposizione primitiva (priva del requisito di evidenza) di un sistema formale, dalla quale si deducono teoremi mediante regole di inferenza; per estensione, nell'uso corrente, verità, principio che per la sua evidenza non ammette discussioni*, mentre "postulato" è definito come *in matematica e in filosofia, proposizione non dimostrata e non dimostrabile che viene ammessa come vera, in quanto necessaria ai fini di una dimostrazione filosofica o scientifica.*

Esempi. Siano P = "ieri sono andato a Roma" e Q = "ieri sono andato a Viterbo": allora "non P" = "ieri non sono andato a Roma", "P e Q" = "ieri sono andato sia a Roma che a Viterbo", "P o Q" = "ieri sono andato a Roma oppure a Viterbo" (potrei anche essere andato in una sola di queste città oppure in entrambe: l'importante è che sia andato in almeno una delle due), e "P $\Rightarrow$ Q" = "se ieri sono andato a Roma allora sono andato anche a Viterbo" (che esclude la sola possibilità che io possa essere stato a Roma senza essere andato anche a Viterbo).

È importante notare che "non(P e Q)" = "(non P) o (non Q)", "non(P o Q)" = "(non P) e (non Q)", e che l'implicazione "P implica Q" è vera se e solo se è vera l'implicazione "(non Q) implica (non P)" (detta familiarmente anche *dimostrazione per assurdo*: ovvero la proposizione "P e (non Q)" è falsa). Non descriveremo tutte le possibili verità o falsità di proposizioni costruite da proposizioni vere o false, anche per un motivo molto semplice: parlando di insiemi, queste verifiche sono formalmente le stesse di quelle che si possono fare rimpiazzando "proposizione" con "insieme", "oppure" con "unione", "e" con "intersezione", "implica" con "è contenuto in" e "non" con "complemento", col vantaggio che con gli insiemi tali verifiche sono molto più visualizzabili (ad esempio, usando i diagrammi di Venn). Diamo solo un esempio: le implicazioni "P $\wedge$ Q $\Rightarrow$ P" e "P $\Rightarrow$ P $\vee$ Q" sono sempre vere (infatti la prima non è vera se e solo se P $\wedge$ Q è vera e P è falsa, e la seconda non è vera se e e solo se P è vera e P $\vee$ Q è falsa, ma queste eventualità sono impossibili in base all'assioma di non contraddizione).

Esempi. **(1)** La negazione della proposizione "Carlo è in Liguria *oppure* in Piemonte" è "Carlo non è in Liguria *e* non è in Piemonte" (ovvero, come si direbbe correntemente, "Carlo non è né in Liguria né in Piemonte"). **(2)** La negazione della proposizione "Ieri ho visitato Vigevano *e* Piacenza" è "Ieri non ho visitato Vigevano *oppure* non ho visitato Piacenza" (cioè, la negazione di "le ho visitate entrambe" non è dire "non ho visitato nessuna delle due" ma dire "una tra le due non l'ho visitata"). **(3)** L'implicazione "Se hai lasciato il rubinetto aperto allora la casa si è allagata" (che ha "Hai lasciato il rubinetto aperto" come antecedente e "la casa si è allagata" come conseguente") è equivalente all'implicazione "Se la casa non si è allagata, allora non hai lasciato il rubinetto aperto". **(4)** La proposizione "7 è un numero pari *oppure* Carlo Magno era di sesso maschile" è vera, perché la seconda è vera; la proposizione "7 è un numero pari *e* Carlo Magno era di sesso maschile" è falsa perché la prima è falsa. **(5)** L'implicazione "se 6 è dispari allora Roma è la capitale d'Italia" e "se Parigi è la capitale della Germania allora il carbone è bianco" sono vere, mentre l'implicazione "se Parigi è la capitale della Francia allora il carbone è bianco" è falsa.

Quantificatori Da una proposizione aperta P$(x, y, \cdots)$ si possono costruire nuove proposizioni affermando che P è vera *per tutti* i valori delle sue variabili soddifacenti una certa condizione di partenza, o affermando che *ne esiste qualcuno per cui* essa è vera. A tal fine si introducono i *quantificatori* "$\forall$" (significa: *per ogni, ogni, tutti*) e "$\exists$" (significa: *esiste, esistono*). Ad esempio: dalla proposizione aperta P(x) = "x ama la pastasciutta" possiamo costruire le proposizioni "Esiste qualche tedesco che ama la pastasciutta" (che, da quanto ho visto nei ristoranti turistici, è sicuramente vera) e "Tutte le donne francesi amano la pastasciutta" (che immagino sia falsa, anche se non conosco personalmente donne francesi che non la amano); e dalla proposizione Q(x) = "$x^2 > 5$" possiamo costruire le proposizioni "per ogni numero reale maggiore di 7 si ha $x^2 > 5$" (vera) e "esiste qualche numero reale compreso tra 0 e 1 per cui $x^2 > 5$" (falsa). È fondamentale notare che, negando una proposizione contenente dei quantificatori, essi vanno scambiati l'uno nell'altro: ad esempio, la negazione della proposizione "*Tutti* i bambini si lavano i denti prima di andare a letto" non è "Nessun bambino si lava i denti prima di andare a letto", ma è "*Esistono* bambini che *non* si lavano i denti prima di andare a letto". Inoltre, è importante fare attenzione all'*ordine* in cui i quantificatori appaiono: la proposizione "$\forall x > 0\ \exists y > 0 : x > y$" significa "per ogni $x > 0$ esiste qualche $y > 0$ tale che $x > y$" (vera: basta prendere $y = \frac{x}{2}$), mentre la proposizione "$\exists y > 0\ \forall x > 0 : x > y$" significa "esiste qualche $y > 0$ tale che per ogni $x > 0$ sia $x > y$" (falsa: preso un qualsiasi $y > 0$, si ha che $x = \frac{y}{2} > 0$ ma $x \not> y$).

L'esposizione matematica Nell'esposizione matematica, le proposizioni delle quali va dimostrata la verità constano di un *enunciato* della proposizione stessa, del quale si fornisce poi una *dimostrazione*, o *prova*. Se una proposizione mi dà l'impressione di essere vera ma non sono ancora in grado di dimostrarlo, posso enunciarla come *congettura*, lanciando così una sfida a me stesso e a chiunque altro a capire se sia vera sul serio o no[7]. Le proposizioni matematiche sono usualmente classificate, oltreché semplicemente come *proposizioni* quando non hanno particolari caratteristiche da mettere in evidenza, anche come *teoremi* quando sono di particolare importanza, come *lemmi* quando sono enunciate e dimostrate in vista della dimostrazione di un altro risultato più importante[8], o come *corollari* quando discendono da una proposizione più importante (o generale) provata in precedenza. Le *definizioni*, invece, sono solo delle descrizioni di nuovi oggetti, e naturalmente vanno prese per quello che sono, senza il bisogno di alcuna dimostrazione.

---

[7] Spesso capita che una congettura si riveli poi essere falsa (col rischio di esporre al ridicolo chi l'ha formulata, specie quando lo è stata in modo maldestro o precipitoso): ad esempio, un bambino delle highlands scozzesi potrebbe congetturare che "Tutti gli esseri umani hanno i capelli rossi", ma si accorgerebbe presto che ciò è falso non appena gli capitasse di incontrare, o di vedere alla televisione, un tipico turco o un tipico svedese. Le congetture devono talvolta aspettare anni, se non secoli, prima che qualcuno riesca a darne una dimostrazione (provando che è vera) o un controesempio (provando che è falsa): così è successo alla celebre congettura di Fermat (detta anche *Ultimo Teorema* di Fermat: se n è un numero naturale > 2 non esistono terne (a, b, c) di numeri interi positivi che risolvono l'equazione $a^n + b^n = c^n$), che ha dovuto attendere più di trecento anni prima di essere dimostrata —con grande sforzo e in un modo indiretto assai sofisticato— da una serie di matematici attivi nell'arco di diversi decenni fino al passo finale di Andrew Wiles nel 1994.

[8] Può capitare ad esempio che la dimostrazione di una certa proposizione sia assai lunga ed articolata, perché richiede il raggiungimento di varie conclusioni intermedie (dette anche "passi") prima di affrontare la conclusione dell'enunciato; allora, come si dice, talvolta è conveniente "spezzarla in vari lemmi".

L'induzione matematica

Consideriamo la proposizione *"per ogni numero naturale n il numero n^2+n è pari"*. Per dimostrare che è vera si può ragionare semplicemente così: se n è pari/dispari tale è anche n^2, e dunque la loro somma non può che essere pari. Questo è un classico esempio di procedimento *deduttivo*: da alcuni fatti già dimostrati (in questo caso, che ogni numero naturale è o pari o dispari; che la somma di due numeri pari è pari; ...) se ne fanno discendere necessariamente altri.

Nel caso si debba dimostrare che una proposizione $\mathrm{P}(n)$ (dipendente da una variabile naturale $n \in \mathbb{N}$, come quella appena vista) è vera per ogni $n \geq n_0$ (ove n_0 è un dato numero naturale), al posto dell'usuale procedimento deduttivo si usa spesso il procedimento di *induzione*, o *ricorrenza*, basato sulle proprietà dei numeri naturali. L'induzione funziona così:

- *Base dell'induzione:* si inizia dimostrando che $\mathrm{P}(n_0)$ è vera;
- *Passo induttivo:* preso poi un arbitrario $n \geq n_0$ e supponendo che le proposizioni $\mathrm{P}(n_0)$, $\mathrm{P}(n_0+1)$, ..., $\mathrm{P}(n)$ siano vere (la cosiddetta "ipotesi induttiva", ma spesso basta supporre lo sia la sola $\mathrm{P}(n)$), bisogna dimostrare che allora lo è anche $\mathrm{P}(n+1)$.

In questo modo, dalla verità di $\mathrm{P}(n_0)$ si sale alla verità di $\mathrm{P}(n_0+1)$, poi da quella di $\mathrm{P}(n_0+1)$ si sale a quella di $\mathrm{P}(n_0+2)$... e così via, fino a mostrare la verità di $\mathrm{P}(n)$ per ogni $n \geq n_0$; in sostanza, se il ragionamento deduttivo porta a scendere "dal generale al particolare", quello induttivo segue la via inversa, portando a salire "dal particolare al generale".

Esempi. (1) Ridimostriamo, usando l'induzione, che per ogni numero naturale n il numero n^2+n è pari. Tradotto nel linguaggio di qui sopra, questo diventa: *per ogni $n \geq n_0 = 1$ la proposizione* $\mathrm{P}(n)$ = *"il numero n^2+n è pari" è vera.* In effetti $\mathrm{P}(1)$ è vera (infatti $1^2+1=2$ è pari); preso poi un qualsiasi $n \geq 1$ e supposto che $\mathrm{P}(n)$ sia vera (cioè che n^2+n sia pari), si ha che $(n+1)^2+(n+1) = (n^2+n)+2(n+1)$ è anch'esso pari, in quanto somma di n^2+n (pari per ipotesi induttiva) e di $2(n+1)$ (chiaramente pari). In altre parole, anche $\mathrm{P}(n+1)$ è vera, e ciò dimostra quanto voluto. **(2)** Dimostriamo che la somma dei primi n numeri naturali dà $\frac{n(n+1)}{2}$ (ovvero: *per ogni $n \geq n_0 = 1$ la proposizione* $\mathrm{P}(n)$ = *"la somma dei primi n numeri naturali dà $\frac{n(n+1)}{2}$" è vera*). In effetti $\mathrm{P}(1)$ è vera (infatti $1 = \frac{1(1+1)}{2}$); supponendo poi che $\mathrm{P}(n)$ sia vera (ovvero che $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$) si ha $1+\cdots+n+(n+1) = (1+\cdots+n)+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, ovvero $\mathrm{P}(n+1)$ è vera. **(3)** Dimostriamo per induzione che per ogni numero naturale $n \geq 3$ si ha $n^2 \geq 2n+2$ (ovvero: *per ogni $n \geq n_0 = 3$ la proposizione* $\mathrm{P}(n)$ = *"$n^2 \geq 2n+2$" è vera*). Infatti $\mathrm{P}(3)$ è vera, in quanto $3^2 = 9 \geq 8 = 2\cdot 3+2$; supposto poi che per un $n \geq 3$ si abbia $n^2 \geq 2n+2$ si ha $(n+1)^2 = n^2+2n+1 \geq (2n+2)+2n+1 = 2(n+1)+2n+1 > 2(n+1)+2$, che è quanto si voleva. Anche in questo caso, si noti che si poteva usare il procedimento deduttivo: infatti la disequazione $x^2 \geq 2x+2$ (con variabile reale x), ovvero $x^2-2x-2 \geq 0$, è soddisfatta per ogni

$x \geq 1 + \sqrt{3} \sim 2{,}7$, e in particolare per ogni $x \geq 3$. **(4)** Dimostriamo la *disuguaglianza di Bernoulli*, per la quale se x è un numero reale > -1 e n un numero naturale ≥ 1 vale $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Infatti per $n_0 = 1$ la disuguaglianza è ovvia (perché $1 + x \geq 1 + x$); supponendo poi che sia $(1+x)^n \geq 1 + nx$, moltiplicando ambo i membri per $1 + x > 0$ si ottiene $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, come voluto. (Si noti che se $n > 1$ e $x \neq 0$ vale $(n-1)x^2 > 0$ e dunque la disuguaglianza è stretta; se invece $n = 1$ oppure $x = 0$, vale l'uguaglianza.) **(5)** (Esercizio) La *torre di Hanoi* è una pila di n dischi di raggio decrescente infilati dentro un perno verticale, con accanto altri due perni verticali disponibili (vedi Figura 0.7). Il gioco consiste nello spostare tutti gli n dischi in uno dei perni liberi, obbedendo alle seguenti due regole: 1. si può spostare un solo disco alla volta; 2. il disco spostato si può mettere in un perno vuoto o sopra un disco più grande, ed è vietato mettere un disco grande su uno più piccolo. Partendo dai casi più elementari ($n = 1, 2, 3, \dots$) cercare di capire quante mosse sono necessarie per completare l'operazione con n dischi (il numero minimo di tali mosse sarà chiaramente una funzione $N(n)$ del numero n), e dimostrare con un ragionamento induttivo che il numero congetturato $N(n)$ è effettivamente quello giusto.[9]

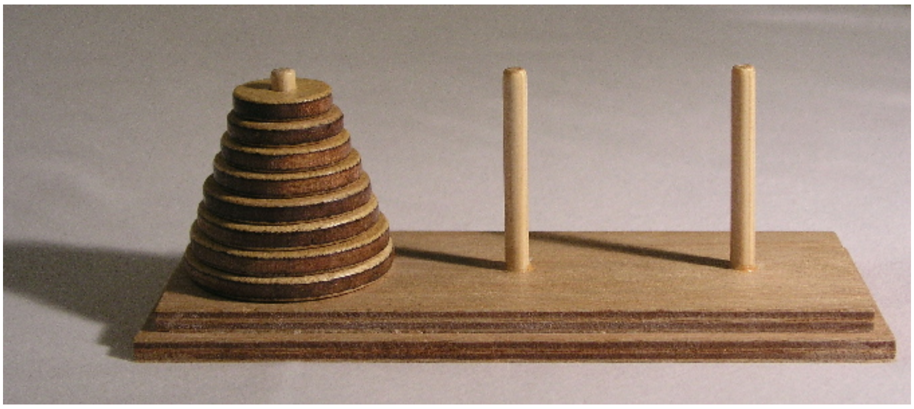

Figura 0.7: La torre di Hanoi.

Elenchiamo altri fatti utili che si dimostrano col principio di induzione.

(i) (Somma della progressione geometrica) Se q è un qualsiasi numero reale $\neq 1$ e n un numero naturale ≥ 0, la somma dei primi $n+1$ termini della *progressione geometrica di ragione q* è data da

$$\sum_{j=0}^{n} q^j \;=\; 1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n \;=\; \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

[9] **Soluzione.** È facile rendersi conto con tentativi concreti che $N(1) = 1$, $N(2) = 3$ e $N(3) = 7$, dunque viene da pensare che in generale valga $N(n) = 2^n - 1$: dimostriamo che è proprio così usando un ragionamento induttivo. Per iniziare, la base è soddisfatta perché $N(1) = 2^1 - 1 = 1$; poi, se si hanno $n+1$ dischi, bisogna prima portare tutti gli n più piccoli su un perno libero, che deve essere lo stesso altrimenti non si potrà poi spostare il disco più grande (servono dunque $N(n)$ mosse), quindi spostare il disco più grande nell'altro perno libero (1 mossa) e infine riportare gli n dischi più piccoli su quello più grande (altre $N(n)$ mosse), da cui si deduce che $N(n+1) = N(n) + 1 + N(n) = 2\,N(n) + 1$: usando l'ipotesi induttiva si ha allora $N(n+1) = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$, come volevasi dimostrare.

(i) (Binomio di Newton) Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= x^n + nx^{n-1}y + \tfrac{n(n-1)}{2} x^{n-2}y^2 + \cdots + \tfrac{n(n-1)}{2} x^2 y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n\end{aligned}$$

(ad esempio $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, ...).

(iii) (Media aritmetica e media geometrica) La media geometrica di n numeri reali positivi $a_1, \dots, a_n > 0$ non è mai maggiore della loro media aritmetica:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \;\le\; \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

ed inoltre l'uguaglianza vale se e solo se $a_1 = \cdots = a_n$.

Dimostrazione. In queste dimostrazioni, per il passo induttivo anziché mostrare che $\mathrm{P}(n)$ implica $\mathrm{P}(n+1)$ per ogni $n \ge n_0$, mostreremo che $\mathrm{P}(n-1)$ implica $\mathrm{P}(n)$ per ogni $n > n_0$, il che evidentemente è la stessa cosa. (i) Se $n = 0$ l'uguaglianza è ovvia (essendo $1 = 1$); supponendo poi che $1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}$ si ha $1 + q + \cdots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^n-1}{q-1} + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, come voluto. (ii) Per $n = 1$ l'uguaglianza è ovvia; supponendo poi che la formula sia vera fino a $n-1$, vale $(x+y)^n = (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-1-j}y^j = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-j}y^j + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-1-j}y^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{n-j}y^j + \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}x^{n-j}y^j = x^n + \sum_{j=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1}\right)x^{n-j}y^j + y^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j$, ove si è usata la già citata identità $\binom{n-1}{j} + \binom{n-1}{j-1} = \binom{n}{j}$. (iii) Siano $M(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ (media aritmetica) e $m(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$ (media geometrica). Se $n = 1$ si ha banalmente $m(a_1) = M(a_1)$. Supponiamo che l'affermazione sia vera per $n-1$, e mostriamo che essa è vera per n. Sia $A := M(a_1, \dots, a_n)$; se uno degli a_i (supponiamo ad esempio a_n) è uguale a A, dall'ipotesi induttiva $m(a_1, \dots, a_{n-1}) \le M(a_1, \dots, a_{n-1}) = A$ si ricava $a_1 \cdots a_{n-1} \le A^{n-1}$, da cui $m(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)^n = a_1 \cdots a_{n-1}a_n = a_1 \cdots a_{n-1}A \le A^{n-1}A = A^n = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)^n$, da cui $m(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = M(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Il caso generico (in cui nessun a_i è uguale a A) si riconduce a questo: a meno di rimescolare i numeri a_i si può certamente supporre che sia $a_{n-1} > A$ e $a_n < A$; se si sostituiscono allora a_{n-1} e a_n rispettivamente con $a'_{n-1} = a_{n-1} + a_n - A > 0$ e $a'_n = A$, si ha (verifica diretta) $m(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) < m(a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, a'_n)$ e $M(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) = M(a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, a'_n)$, da cui (usando il caso precedente) $m(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) < m(a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, a'_n) \le M(a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}, a'_n)$, che è uguale a $M(a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$. $\square$