Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (04/02/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 < x^2 + 2x\} \cup \{5 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. (a) Determinare il dominio di $g(x) = \arccos(2\sqrt{x} - x)$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se g è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva.

(b) Calcolare $g^{-1}([\frac{\pi}{3}, +\infty[)$ e $g([2, 4[)$.

3. (a) Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x\cos(\pi x) + \sqrt{|2x - x^3|}}{x^\alpha - \sqrt{x}}$ per $\alpha = 1$, usando tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) .

(b) Discutere i precedenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, sempre con tecniche di analisi locale.

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{x}{2x + \log|x - 1|}$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0^+, 1 e $+\infty$ con due termini significativi.

5. (a) Dato il numero $z_\alpha = \alpha + 2i$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) risolvere l'equazione $z^3 + (2 - 3i)z + 3 + i = 0$ sapendo che z_1 ne è soluzione. Esprimere poi in forma algebrica le radici cubiche di z_0.

(b) Scrivere z_α in forma trigonometrica/esponenziale, ed esprimerne le potenze intere $(z_\alpha)^n$.

6. (a) Si consideri l'equazione differenziale $\alpha y'' + (\alpha - 1)y' - y = e^{-x}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$. Cosa significa in questo caso assegnare un problema di Cauchy, e che si può dire su esistenza e unicità delle soluzioni $y(x)$? Trovare poi, al variare di α, tutte quelle il cui grafico passa per l'origine.

(b) Data l'equazione differenziale $(x + 1)\, y' \operatorname{tg}(2y) = x^2$ studiarne a priori crescenza ed eventuali simmetrie. Determinarne poi tutte le soluzioni, e in particolare quella tale che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$.

---

[1] $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (04/02/2015) – $\boxed{\textbf{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 < x^2 + 2x\}$ e $A_2 = \{5 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. La disequazione $e^x - 1 < x^2 + 2x$ si può studiare in modo qualitativo con un confronto grafico tra le funzioni $\varphi(x) = e^x - 1$ e $\psi(x) = x^2 + 2x$: tracciando accuratamente i grafici (l'esponenziale abbassato di 1 e la parabola $y = x^2 + 2x$) si vede che $\varphi(x) = \psi(x)$ in tre punti $x = x_0 < 0$, $x = 0$ e $x = x_1 > 0$, con $-2 < x_0 < -1$ e $2 < x_1 < 3$ (si noti che $\varphi(-2) < 0 = \psi(-2)$, $\varphi(-1) = \frac{1}{e} - 1 \sim -0{,}6 > \psi(-1) = -1$, $\varphi(0) = 0 = \psi(0)$, $\varphi(1) = e - 1 \sim 1{,}7 < \psi(1) = 3$, $\varphi(2) = e^2 - 1 \sim 6{,}4 < \psi(2) = 8$ e $\varphi(3) = e^3 - 1 \sim 19{,}1 > \psi(3) = 15$), e che $\varphi(x) < \psi(x)$ per $x < x_0$ oppure $0 < x < x_1$. Pertanto $A_1 =]-\infty, x_0[\, \cup\,]0, x_1[$. Si ha poi $A_2 = \{4, \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}, \frac{14}{3} = 5 - \frac{1}{3}, \dots\}$, una famiglia numerabile di punti isolati compresa tra il minimo 4 e il massimo $\frac{11}{2}$ che converge a 5 oscillandovi attorno a sinistra e a destra a seconda della parità di n: e, poiché $x_1 < 4$, nessun punto di A_2 appartiene ad A_1 (in altre parole, A è l'unione disgiunta di A_1 e A_2). Dunque A è un insieme solo superiormente limitato, con $\sup A = \max A = \frac{11}{2}$ (sono evidentemente soddisfatte le proprietà caratteristiche); non è aperto (non è intorno del suo punto $\frac{11}{2}$) ne' chiuso (non contiene il punto di accumulazione 0), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_1 (e, volendo, anche $-\infty$); i punti isolati sono quelli di A_2; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche 0, x_0, x_1, 5 e $-\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati; infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati e gli estremi degli intervalli di A_1.

2. (a) (Figura 2) Il dominio di $g(x) = \arccos(2\sqrt{x} - x)$ è dato da $x \geq 0$ (per la radice) e $-1 \leq 2\sqrt{x} - x \leq 1$ (per l'arco-coseno): la prima disequazione $2\sqrt{x} - x \geq -1$ equivale a $x - 2\sqrt{x} - 1 \leq 0$, ovvero $\sqrt{x} \geq -\sqrt{2} + 1$ (sempre) e $\sqrt{x} \leq \sqrt{2} + 1$, che per $x \geq 0$ dà $x \leq (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \sim 5{,}8$; la seconda $2\sqrt{x} - x \leq 1$ equivale a $x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$, sempre vera. Ne concludiamo che il dominio di g è $[0, 3 + 2\sqrt{2}]$. • Passiamo al calcolo della fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Per iniziare, poiché l'arco-coseno assume valori tra 0 e π, già possiamo concludere che $g^{-1}(y) = \varnothing$ per ogni $y < 0$ e ogni $y > \pi$ (in particolare, g non è suriettiva). Pensando invece a $y \in [0, \pi]$, da $g(x) = y$ si ricava $2\sqrt{x} - x = \cos y$, ovvero $x - 2\sqrt{x} + \cos y = 0$, da cui $\sqrt{x} = 1 \mp \sqrt{1 - \cos y}$, il che richiede che il II membro sia ≥ 0: la soluzione con "+" lo è sempre, mentre quella col "$-$" lo è solo quando $\cos y \geq 0$, ovvero quando $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ciò appurato, per ogni $y \in [0, \pi]$ si ricava $x = x_+(y) := (1 + \sqrt{1 - \cos y})^2 = 2 - \cos y + 2\sqrt{1 - \cos y}$; mentre per i soli $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si ricava in più anche $x = x_-(y) := (1 - \sqrt{1 - \cos y})^2 = 2 - \cos y - 2\sqrt{1 - \cos y}$. Notiamo inoltre che per $y = 0$ si annulla la radice $\sqrt{1 - \cos y}$, e così si ha $x_-(0) = 1 = x_+(0)$. Pertanto, ricapitolando:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \varnothing & \text{per } y < 0 \text{ oppure } y > \pi \\ \{1\} & \text{per } y = 0 \\ \{x_-(y),\, x_+(y)\} & \text{per } 0 < y \leq \frac{\pi}{2} \\ \{x_+(y)\} & \text{per } \frac{\pi}{2} < y \leq \pi\,. \end{cases}$$

La funzione non è dunque nemmeno iniettiva (ci sono fibre con più di un punto); essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $[1, 3 + 2\sqrt{2}]$ (in questo modo si elimina $x_-(y)$, che per ogni $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$ è sempre < 1) e restringendola alla sua immagine $[0, \pi]$, con inversa $g^{-1}(y) = x_+(y) = 2 - \cos y + 2\sqrt{1 - \cos y}$.

(b) Per il calcolo di $g^{-1}([\frac{\pi}{3}, +\infty[)$ va risolta la disequazione $g(x) \geq \frac{\pi}{3}$, ovvero (essendo l'arco-coseno decrescente) $2\sqrt{x} - x \leq \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, ovvero $2x - 4\sqrt{x} + 1 \geq 0$, che dà $\sqrt{x} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ oppure $\sqrt{x} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero (tenuto conto del dominio) $0 \leq x \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ oppure $\frac{3}{2} + \sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$: pertanto $g^{-1}([\frac{\pi}{3}, +\infty[) = [0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}] \cup [\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$. (unione disgiunta di due intervalli chiusi). • Per il calcolo di $g([2, 4[)$ (che, essendo g continua, sarà un intervallo) vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $2 \leq x_-(y) < 4$ e $2 \leq x_+(y) < 4$, ma la prima è impossibile perché come detto vale $0 \leq x_-(y) \leq 1$: resta allora solo $2 \leq 2 - \cos y + 2\sqrt{1 - \cos y} < 4$, ovvero $\cos y \leq 2\sqrt{1 - \cos y} < 2 + \cos y$. La prima disequazione $2\sqrt{1 - \cos y} \geq \cos y$ è sempre soddisfatta quando $\cos y < 0$ (ovvero quando $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$), mentre quando $\cos y \geq 0$ (ovvero quando $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$) equivale a $4(1 - \cos y) \geq \cos^2 y$, ovvero $\cos^2 y + 4\cos y - 4 \leq 0$, con soluzioni $\theta \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ove $\theta := \arccos(2(\sqrt{2} - 1))$: dunque la prima disequazione ha soluzioni $\theta \leq y \leq \pi$. La seconda disequazione $2\sqrt{1 - \cos y} \leq 2 + \cos y$ equivale a $4(1 - \cos y) \leq (2 + \cos y)^2$, ovvero $\cos y(\cos y + 8) \geq 0$, ovvero $\cos y \geq 0$, con soluzioni $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Ne segue che $g([2, 4[) = [\theta, \pi] \cap [0, \frac{\pi}{2}] = [\theta, \frac{\pi}{2}]$.

3. (a) Per $\alpha = 1$ si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x\cos(\pi x) + \sqrt{|2x - x^3|}}{x - \sqrt{x}}$. • In $x \sim 0^+$ si è in forma indeterminata 0/0; tuttavia ha $N(x) \sim_{0^+} \sqrt{2x}$ (infatti $x^3 = o_0(2x)$ e $x\cos(\pi x) = o_0(\sqrt{2x})$) e $D(x) \sim_{0^+} -\sqrt{x}$, da cui $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{-\sqrt{x}} = -\sqrt{2}$. • Anche in $x \sim 1$ si è in forma 0/0, solo che stavolta non sono evidenti termini prevalenti. Posto $x = 1 + t$ con $t \sim 0$ si ha $N(t) = (1 + t)\cos(\pi + \pi t) + \sqrt{2 + 2t - (1 + t)^3} = -(1 + t)\cos(\pi t) + \sqrt{1 - t - 3t^2 - t^3} = -(1 + t)(1 - \frac{\pi^2}{2}t^2 + o_0(t^3)) + 1 + \frac{1}{2}(-t) + o_0(t) = -1 + \frac{\pi^2}{2}t^2 + o_0(t^3) - t + \frac{\pi^2}{2}t^3 + o_0(t^3) + 1 - \frac{1}{2}t + o_0(t) \sim_0 -\frac{3}{2}t$ e $D(t) = 1 + t - \sqrt{1 + t} = 1 + t - (1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)) \sim_0 \frac{1}{2}t$, da cui $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{3}{2}t}{\frac{1}{2}t} = -3$. • In $x \sim +\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ e $D(x) \sim_{+\infty} x$, perciò $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = +\infty$.

(b) Discutiamo ora i limiti per $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x\cos(\pi x) + \sqrt{|2x - x^3|}}{x^\alpha - \sqrt{x}}$ con $\alpha \neq 1$. • In $x \sim 0^+$ si ha $N(x) \sim_{0^+} \sqrt{2x}$ e $D(x) \sim_{0^+} -\sqrt{x}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure $D(x) \sim_{0^+} x^\alpha$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ vale $-\sqrt{2}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure 0^+ (se

$\alpha < \frac{1}{2}$). • In $x \sim 1$ si ha $N(t) \sim_0 -\frac{3}{2}t$ e $D(t) = (1+t)^\alpha - \sqrt{1+t} = 1 + \alpha t + o_0(t) - (1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)) \sim_0 (\alpha - \frac{1}{2})t$, dunque $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{3}{2}t}{(\alpha-\frac{1}{2})t} = \frac{3}{1-2\alpha}$. • Infine, in $x \sim +\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} x^{\frac{3}{2}}$ e $D(x) \sim_{+\infty} x^\alpha$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure $D(x) \sim_{+\infty} -\sqrt{x}$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), perciò $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ vale 0^+ (se $\alpha > \frac{3}{2}$), vale 1 (se $\alpha = \frac{3}{2}$), vale $+\infty$ (se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$) e vale $-\infty$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$).

4. (a) (Figura 3) Il dominio di $f(x) = \frac{x}{2x+\log|x-1|}$ è dato da $x \neq 1$ (per il logaritmo) e da $\log|x-1| \neq -2x$ (per il quoziente), e un confronto grafico tra $\log|x-1|$ (il logaritmo simmetrizzato e traslato a destra di 1) e $-2x$ (retta) dà $x \neq 0$, $x \neq x_0$ e $x \neq x_1$ per certi $x_0 \in]0,1[$ e $x_1 \in]1,2[$ (vale $x \sim 0{,}8$ e $x_1 \sim 1{,}1$). Pertanto il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0, x_0, 1, x_1\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio, senza simmetrie ne' periodi. Non vi sono zeri, perché $x \neq 0$. Quanto al segno: il numeratore è > 0 per $x > 0$, il denominatore lo è quando $\log|x-1| > -2x$ ovvero (sempre per confronto grafico) per $0 < x < x_0$ e $x > x_1$, pertanto vale $f(x) > 0$ quando $x < 0$, $0 < x < x_0$ e $x > x_1$. I limiti interessanti sono in $-\infty$, 0, x_0, 1, x_1 e $+\infty$. Poiché come sappiamo $\log|x-1| = o_\infty(x)$, si ha $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$, ovvero $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale bilatero, con intersezioni al grafico date da $f(x) = \frac{1}{2}$, ovvero $\log|x-1| = 0$, ovvero $|x-1| = 1$, ovvero $x = 0$ (escluso) oppure $x = 2$ (accettabile). Si ha poi $\lim_{x\to x_0^\mp} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to 1^\mp} f(x) = 0^-$ e $\lim_{x\to x_1^\mp} f(x) = \mp\infty$ (sono limiti determinati); in particolare $x = 1$ è una discontinuità eliminabile, e volendo si può definire $f(1) = 0$. Invece $\lim_{x\to 0} f(x)$ è in forma indeterminata 0/0, e con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2+\frac{1}{x-1}} = 1$ (alternativamente, con gli sviluppi asintotici: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x+\log(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x+(-x)+o_0(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$). Pertanto anche $x = 0$ è discontinuità eliminabile, e si può definire $f(0) = 1$. Derivando (per $x \neq 0, x_0, 1, x_1$) si ha $f'(x) = \frac{1(2x+\log|x-1|)-x(2+\frac{1}{x-1})}{(2x+\log|x-1|)^2} = \frac{\log|x-1|-\frac{x}{x-1}}{(2x+\log|x-1|)^2}$; si ha dunque $f'(x) \geq 0$ quando $\log|x-1| \geq \frac{x}{x-1}$, e un confronto grafico (piuttosto delicato vicino a $x = 0$) mostra che $f'(x) = 0$ per $x = 0$ (escluso) e $x = x_2$ per un certo $x_2 \in]4,5[$ (vale $x_2 \sim 4{,}6$), e $f'(x) > 0$ per $x < 0$, $0 < x < 1$ (con $x \neq x_0$) e $x > x_2$: ne ricaviamo che $x = x_2$ è un punto di minimo locale, con valore $f(x_2) = \frac{x_2}{2x_2+\log(x_2-1)} = \frac{x_2}{2x_2+\frac{x_2}{x_2-1}} = \frac{x_2-1}{2x_2-1} \sim 0{,}44$. Notiamo inoltre che $\lim_{x\to 1^\mp} f'(x) = \lim_{x\to 1^\mp} \frac{-\frac{x}{x-1}}{\log^2|x-1|} = -\lim_{x\to 1^\mp} \frac{1}{(x-1)\log^2|x-1|} = \pm\infty$ (dunque in $x = 1$ il grafico ha un punto di cuspide verticale) mentre $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)-\frac{x}{x-1}}{(2x+\log(1-x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x-\frac{1}{2}(-x)^2+o_0(x^2))+x\frac{1}{1-x}}{(2x+(-x+o_0(x)))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-x-\frac{1}{2}(-x)^2+o_0(x^2))+x(1+x+x^2+o_0(x^2))}{(2x+(-x+o_0(x)))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$: pertanto in $x = 0$ la funzione può essere estesa addirittura per derivabilità, con $f'(0) = \frac{1}{2}$. Infine, con un po' di pazienza si può derivare ulteriormente ottenendo $f''(x) = -\frac{(4x^2-7x+2)\log|x-1|-2x(3x-1)}{(x-1)^2(2x+\log|x-1|)^3}$, e un confronto grafico tra $\log|x-1|$ e la funzione razionale $\frac{2x(3x-1)}{4x^2-7x+2}$ mostra l'esistenza degli attesi flessi obliqui: uno tra x_0 e 1, un altro tra 1 e x_1 e un terzo tra 7 e 8.

(b) In 0 come visto f è estendibile per derivabilità, con $f(0) = 1$ e $f'(0) = \frac{1}{2}$: pertanto $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o_0(x)$. • In 1 la funzione è estendibile per continuità con $f(1) = 0$. D'altra parte, posto $x = 1 + t$ con $t \sim 0$ si ha $f(x) = f(1+t) = \frac{1+t}{\log|t|+2+2t} \sim_0 \frac{1}{\log|t|} = \log^{-1}|t|$, primo termine dello sviluppo (nella scala potenze-logaritmi); per un altro termine, si ha $f(1+t) - \frac{1}{\log|t|} = \frac{-2+t\log|t|-2t}{\log|t|(\log|t|+2+2t)} \sim_0 -\frac{2}{\log^2|t|}$, pertanto $f(x) = \frac{1}{\log|x-1|} - \frac{2}{\log^2|x-1|} + o_1(\log^{-2}|x-1|)$. • Infine, in $+\infty$ si ha l'asintoto orizzontale $y = \frac{1}{2}$, ovvero $f(x) = \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$; e poi $f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{\log|x-1|}{2(2x+\log|x-1|)} \sim_{+\infty} -\frac{\log|x|}{4x} = -\frac{1}{4}x^{-1}\log|x|$, da cui $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^{-1}\log|x| + o_{+\infty}(x^{-1}\log|x|)$ (sempre nella scala potenze-logaritmi).

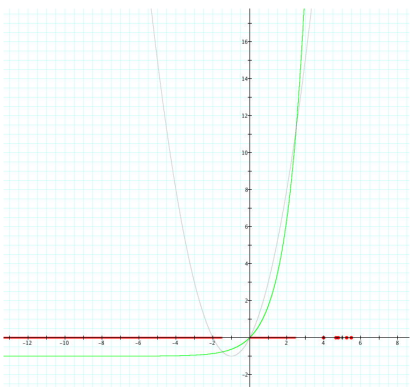
5. (a) Per il teorema Fondamentale dell'Algebra sappiamo che $p(z) = z^3 + (2-3i)z + 3 + i = 0$ ha tre soluzioni in $\mathbb{C}$, e dal testo sappiamo anche che una di esse è $z_1 = 1 + 2i$: dunque per Ruffini $p(z)$ è fattorizzabile con $z - (1+2i)$, e dividendo si trova in effetti $p(z) = (z - (1+2i))(z^2 + (1+2i)z - 1 + i)$. Ne segue che le altre due soluzioni di $p(z) = 0$ sono quelle di $z^2 + (1+2i)z - 1 + i = 0$, ovvero $z = \frac{-(1+2i)\pm\sqrt{(1+2i)^2-4(-1+i)}}{2} = \frac{-(1+2i)\pm 1}{2}$, ovvero $z = -i$ oppure $z = -1-i$. • Si ha $z_0 = 2i = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, dunque le radici cubiche sono $w_0 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $w_1 = \sqrt[3]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$ e $w_2 = \sqrt[3]{2}\,e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{2}} = -\sqrt[3]{2}\,i$.

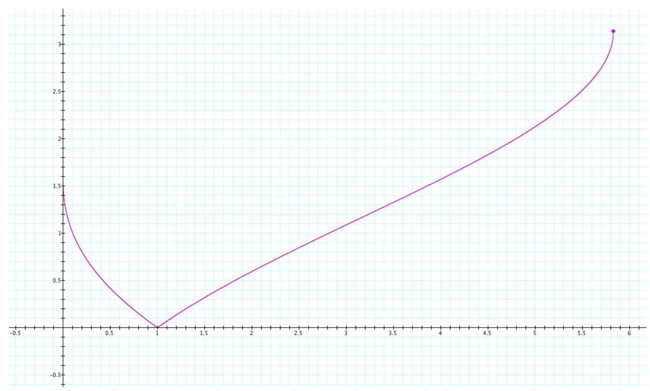
(b) Il numero $z_\alpha = \alpha + 2i$ ha modulo $|z_\alpha| = \sqrt{\alpha^2+4}$, da cui la forma polare $z_\alpha = \sqrt{\alpha^2+4}\,(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}}\,i)$; ed avendo parte immaginaria positiva il suo argomento principale θ_α (che dovrà avere coseno $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}$ e seno $\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}}$) sta in $[0,\pi]$ e può dunque essere espresso come $\arccos(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}})$. Pertanto la forma esponenziale è $z_\alpha = \sqrt{\alpha^2+4}\,e^{i\theta_\alpha}$, con $\theta_\alpha := \arccos(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}})$, e l'espressione della potenza intera n-esima (per $n \in \mathbb{Z}$) è $(z_\alpha)^n = (\alpha^2+4)^{\frac{n}{2}}\,e^{in\theta_\alpha}$.

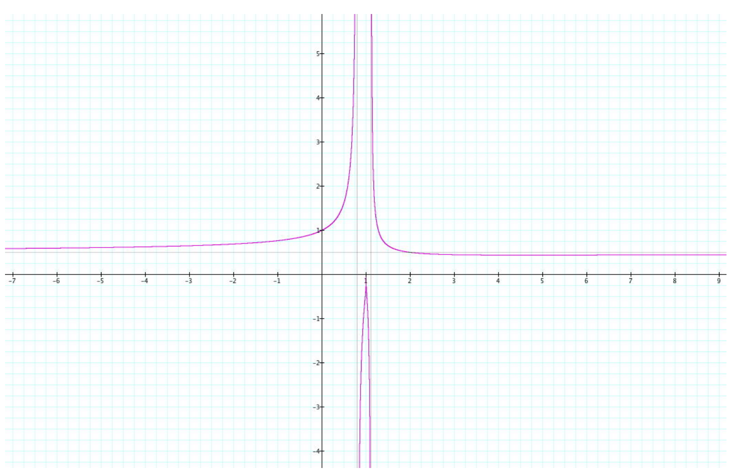
6. (a) Se $\alpha \neq 0$ l'equazione differenziale $\alpha y'' + (\alpha-1)y' - y = e^{-x}$ è del 2o ordine lineare a coefficienti costanti: assegnare un problema di Cauchy significa assegnare i valori di una soluzione $y(x)$ e della sua derivata $y'(x)$ in un certo x_0, ed essendo $y'' = f(x,y,y') = \frac{1}{\alpha}(e^{-x} - (\alpha-1)y' + y)$ con f di classe $\mathcal{C}^1$ sono garantite esistenza e unicità locale della soluzione all'intorno di $x = x_0$ (anzi, trattandosi come detto di un'equazione lineare a coefficienti costanti, è stato detto che tutte le soluzioni avranno dominio come $b(x) = e^{-x}$, ovvero tutto $\mathbb{R}$). Se invece $\alpha = 0$ si ha l'equazione differenziale $y' + y = -e^{-x}$, lineare del 1o ordine; in questo caso assegnare un problema di Cauchy significa assegnare il valore di una soluzione $y(x)$ in un certo x_0, e come in precedenza si avrà esistenza e unicità e dominio $\mathbb{R}$.

Passiamo ora alla ricerca delle soluzioni desiderate. • Se $\alpha \neq 0$, come detto si ha un'equazione del 2o ordine lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\alpha z^2 + (\alpha - 1)z - 1 = 0$ ha radici $\frac{1}{\alpha}$ e -1, che quando $\alpha = -1$ coincidono. Pertanto se $\alpha \neq -1$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y} = kxe^{-x}$ con k da determinare: essendo $\tilde{y}' = k(1-x)e^{-x}$ e $\tilde{y}'' = k(x-2)e^{-x}$, da $\alpha\tilde{y}'' + (\alpha - 1)\tilde{y}' - \tilde{y} = e^{-x}$ si ricava $k = -\frac{1}{\alpha+1}$, da cui le soluzioni generali $y(x) = A\, e^{\frac{1}{\alpha}x} + (B - \frac{1}{\alpha+1}x)\, e^{-x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $A + B = 0$, ovvero $y(x) = A\, e^{\frac{1}{\alpha}x} - (A + \frac{1}{\alpha+1}x)\, e^{-x}$ con $A \in \mathbb{C}$. • Nel caso $\alpha = -1$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y} = kx^2e^{-x}$ con k da determinare: essendo $\tilde{y}' = k(2x - x^2)e^{-x}$ e $\tilde{y}'' = k(2 - 4x + x^2)e^{-x}$, da $-\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' - \tilde{y} = e^{-x}$ si ricava $k = -\frac{1}{2}$, da cui le soluzioni generali $y(x) = (A + Bx - \frac{1}{2}x^2)\, e^{-x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $A = 0$, ovvero $y(x) = x(B - \frac{1}{2}x)\, e^{-x}$ con $B \in \mathbb{C}$. • Infine, per $\alpha = 0$ si ha l'equazione lineare del 1o ordine $y' + y = -e^{-x}$. Pensando alla forma $y' + p(x)\, y = q(x)$, una primitiva di $p(x) = 1$ è $P(x) = x$, e $\int e^{P(x)}q(x)\, dx = \int e^{x}(-e^{-x})\, dx = -x$, da cui le soluzioni sono $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)}q(x)\, dx\ + k) = (k - x)e^{-x}$ con $k \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $k = 0$, ovvero l'unica soluzione $y(x) = -x\, e^{-x}$ (che, si noti, è il limite per $\alpha \to 0$ di quella con $A = 0$ del caso del 2o ordine).

(b) Nell'equazione differenziale $(x + 1)\, y' \operatorname{tg}(2y) = x^2$, per una soluzione definita in $x = -1$ si dovrebbe avere $0 = 1$, assurdo: dunque nessuna soluzione sarà definita in $x = -1$. Se poi in un certo x_0 una soluzione $y(x)$ è tale che $\operatorname{tg}(2y(x_0)) = 0$, ovvero $y(x_0) = k\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$, si dovrebbe avere $0 = x_0^2$, perciò una soluzione può eventualmente assumere tali valori solo in $x_0 = 0$. Ciò detto, si può porre in forma normale ottenendo $y' = \frac{x^2}{(x+1)\operatorname{tg}(2y)}$, da cui si ricava che $x = 0$ è un punto stazionario e che le soluzioni crescono per $x > -1$ (se $\operatorname{tg}(2y) > 0$, ovvero se $k\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$) oppure per $x < -1$ (se $\operatorname{tg}(2y) < 0$, ovvero se $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < y < (k+1)\frac{\pi}{2}$); questo dice anche che $x = 0$ è un punto stazionario in cui non cambia la crescenza, in altre parole è un punto di flesso orizzontale. Vista la crescenza, l'unica simmetria che appare possibile è quella rispetto al segno: in altre parole, se $\varphi(x)$ è soluzione lo sarà anche la sua opposta $\psi(x) = -\varphi(x)$? Si ha $(x+1)\psi'(x)\operatorname{tg}(2\psi(x)) = (x+1)(-\varphi'(x))\operatorname{tg}(-2\varphi(x)) = (x+1)\varphi'(x)\operatorname{tg}(2\varphi(x)) = x^2$, perciò è vero: la famiglia delle soluzioni è simmetrica rispetto al segno. • Separando le variabili si ha $\operatorname{tg}(2y)\, dy = \frac{x^2}{x+1}\, dx = (x - 1 + \frac{1}{x+1})\, dx$, da cui integrando $-\frac{1}{2}\log|\cos(2y)| = \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1| + k$, ovvero $\log|\cos(2y)| = 2x - x^2 - 2\log|x+1| + k$, da cui esponenziando $\cos(2y) = h\frac{e^{2x-x^2}}{(x+1)^2}$ con $h \in \mathbb{R}$, ed imponendo che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$ si ottiene $h = -\frac{1}{2}$: dunque $\cos(2y) = -\frac{e^{2x-x^2}}{2(x+1)^2}$. Da qui si ricava $2y = \pm\arccos(-\frac{e^{2x-x^2}}{2(x+1)^2}) + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: e imponendo ancora una volta che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$ si ottiene $\frac{4\pi}{3} = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, il che forza la scelta del segno "$-$" e di $k = 1$: otteniamo così $2y = 2\pi - \arccos(-\frac{e^{2x-x^2}}{2(x+1)^2})$, ovvero la soluzione cercata $y(x) = \pi - \frac{1}{2}\arccos(-\frac{e^{2x-x^2}}{2(x+1)^2})$.







1. Ex. 1: l'insieme A (in ascissa). **2.** Ex. 2: grafico di $g(x)$. **3.** Ex. 4: grafico di $f(x)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (04/02/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema B

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{-6 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > e^{-x}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. (a) Determinare il dominio di $g(x) = \arcsin(x - 2\sqrt{x})$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se g è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva.

(b) Calcolare $g^{-1}([-\frac{\pi}{6}, +\infty[)$ e $g([2, 4[)$.

3. (a) Calcolare i limiti $\lim\limits_{0^+, 1, +\infty} \dfrac{\sqrt{|x^3 - 2x|} + x\cos(\pi x)}{\sqrt{x} - x^\alpha}$ per $\alpha = 1$, usando tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) .

(b) Discutere i precedenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, sempre con tecniche di analisi locale.

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\log|x+1| - 2x}$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0, -1 e $+\infty$ con due termini significativi.

5. (a) Dato il numero $z_\alpha = 2 + \alpha i$ (con $\alpha \in \mathbb{R}$) risolvere l'equazione $z^3 - 3iz - 5 - 5i = 0$ sapendo che z_1 ne è soluzione. Esprimere poi in forma algebrica le radici cubiche di z_0.

(b) Scrivere z_α in forma trigonometrica/esponenziale, ed esprimerne le potenze intere $(z_\alpha)^n$.

6. (a) Si consideri l'equazione differenziale $\alpha y'' - (\alpha + 1)y' + y = e^x$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$. Cosa significa in questo caso assegnare un problema di Cauchy, e che si può dire su esistenza e unicità delle soluzioni $y(x)$? Trovare poi, al variare di α, tutte quelle il cui grafico passa per l'origine.

(b) Data l'equazione differenziale $(1 - x)\, y' \operatorname{tg}(2y) = x^2$ studiarne a priori crescenza ed eventuali simmetrie. Determinarne poi tutte le soluzioni, e in particolare quella tale che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$.

---

[1] $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (04/02/2015) – $\boxed{\text{Tema B}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{-6 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x + 1 > e^{-x}$. Si ha $A_1 = \{-7, -\frac{11}{2} = -6 + \frac{1}{2}, -\frac{19}{3} = -6 - \frac{1}{3}, \dots\}$, una famiglia numerabile di punti isolati compresa tra il minimo -7 e il massimo $-\frac{11}{2}$ che converge a -6 oscillandovi attorno a sinistra e a destra a seconda della parità di n. D'altra parte la disequazione $x^2 - 2x + 1 > e^{-x}$ si può studiare in modo qualitativo con un confronto grafico tra le funzioni $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$ e $\psi(x) = e^{-x}$: tracciando accuratamente i grafici (la parabola $y = x^2 - 2x + 1$ e l'esponenziale simmetrizzato) si vede che $\varphi(x) = \psi(x)$ in tre punti $x = x_0 > 0$, $x = 0$ e $x = x_1 < 0$, con $1 < x_0 < 2$ e $-3 < x_1 < -2$ (si noti che $\varphi(-3) = 16 < \psi(-3) = e^3 \sim 20{,}1$, $\varphi(-2) = 9 > \psi(-2) = e^2 \sim 7{,}4$, $\varphi(-1) = 4 > \psi(-1) = e \sim 2{,}7$, $\varphi(0) = 1 = \psi(0,$ $\varphi(1) = 0 < \psi(1) = \frac{1}{e} \sim 0{,}4$, $\varphi(2) = 1 > \psi(2) = \frac{1}{e^2} \sim 0{,}1$), e che $\varphi(x) > \psi(x)$ per $0 < x < x_1$ oppure $x > x_0$. Pertanto $A_2 =]x_1, 0[\cup]x_0, +\infty[$. Notiamo anche che $x_1 > -3$, pertanto nessun punto di A_1 appartiene ad A_2 (in altre parole, A è l'unione disgiunta di A_1 e A_2). Dunque A è un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = \min A = -7$ (sono evidentemente soddisfatte le proprietà caratteristiche); non è aperto (non è intorno del suo punto -7) ne' chiuso (non contiene il punto di accumulazione 0), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_2 (e, volendo, anche $+\infty$); i punti isolati sono quelli di A_1; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche 0, x_0, x_1, -6 e $+\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati; infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati e gli estremi degli intervalli di A_2.

2. (a) (Figura 2) Il dominio di $g(x) = \arcsin(2\sqrt{x} - x)$ è dato da $x \geq 0$ (per la radice) e $-1 \leq x - 2\sqrt{x} \leq 1$ (per l'arco-coseno): la prima disequazione $x - 2\sqrt{x} \leq 1$ equivale a $x - 2\sqrt{x} - 1 \leq 0$, ovvero $\sqrt{x} \geq -\sqrt{2} + 1$ (sempre) e $\sqrt{x} \leq \sqrt{2} + 1$, che per $x \geq 0$ dà $x \leq (\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} \sim 5{,}8$; la seconda $x - 2\sqrt{x} \geq -1$ equivale a $x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0$, sempre vera. Ne concludiamo che il dominio di g è $[0, 3 + 2\sqrt{2}]$. • Passiamo al calcolo della fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Per iniziare, poiché l'arco-seno assume valori tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, già possiamo concludere che $g^{-1}(y) = \varnothing$ per ogni $y < -\frac{\pi}{2}$ e ogni $y > \frac{\pi}{2}$ (in particolare, g non è suriettiva). Pensando invece a $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, da $g(x) = y$ si ricava $x - 2\sqrt{x} = \sin y$, ovvero $x - 2\sqrt{x} - \sin y = 0$, da cui $\sqrt{x} = 1 \mp \sqrt{1 + \sin y}$, il che richiede che il II membro sia ≥ 0: la soluzione con "+" lo è sempre, mentre quella col "−" lo è solo quando $\sin y \leq 0$, ovvero quando $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Ciò appurato, per ogni $y \in [-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}]$ si ricava $x = x_+(y) := (1 + \sqrt{1 + \sin y})^2 = 2 + \sin y + 2\sqrt{1 + \sin y}$; mentre per i soli $y \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ si ricava in più anche $x = x_-(y) := (1 - \sqrt{1 + \sin y})^2 = 2 + \sin y - 2\sqrt{1 + \sin y}$. Notiamo inoltre che per $y = -\frac{\pi}{2}$ si annulla la radice $\sqrt{1 + \sin y}$, e così si ha $x_-(-\frac{\pi}{2}) = 1 = x_+(-\frac{\pi}{2})$. Pertanto, ricapitolando:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \varnothing & \text{per } y < -\frac{\pi}{2} \text{ oppure } y > \frac{\pi}{2} \\ \{1\} & \text{per } y = -\frac{\pi}{2} \\ \{x_-(y),\, x_+(y)\} & \text{per } -\frac{\pi}{2} < y \leq 0 \\ \{x_+(y)\} & \text{per } 0 < y \leq \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

La funzione non è dunque nemmeno iniettiva (ci sono fibre con più di un punto); essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $[1, 3 + 2\sqrt{2}]$ (in questo modo si elimina $x_-(y)$, che per ogni $-\frac{\pi}{2} < y \leq 0$ è sempre < 1) e restringendola alla sua immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, con inversa $g^{-1}(y) = x_+(y) = 2 + \sin y + 2\sqrt{1 + \sin y}$.
(b) Per il calcolo di $g^{-1}([-\frac{\pi}{6}, +\infty[)$ va risolta la disequazione $g(x) \geq -\frac{\pi}{6}$, ovvero (essendo l'arco-seno crescente) $x - 2\sqrt{x} \geq \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, ovvero $2x - 4\sqrt{x} + 1 \geq 0$, che dà $\sqrt{x} \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ oppure $\sqrt{x} \geq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, ovvero (tenuto conto del dominio) $0 \leq x \leq \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ oppure $\frac{3}{2} + \sqrt{2} \leq x \leq 3 + 2\sqrt{2}$: pertanto $g^{-1}([-\frac{\pi}{6}, +\infty[) = [0, \frac{3}{2} - \sqrt{2}] \cup [\frac{3}{2} + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$. (unione disgiunta di due intervalli chiusi). • Per il calcolo di $g([2, 4[)$ (che, essendo g continua, sarà un intervallo) vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $2 \leq x_-(y) < 4$ e $2 \leq x_+(y) < 4$, ma la prima è impossibile perché come detto vale $0 \leq x_-(y) \leq 1$: resta allora solo $2 \leq 2 + \sin y + 2\sqrt{1 + \sin y} < 4$, ovvero $-\sin y \leq 2\sqrt{1 + \sin y} < 2 - \sin y$. La prima disequazione $2\sqrt{1 + \sin y} \geq -\sin y$ è sempre soddisfatta quando $-\sin y < 0$ (ovvero quando $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$), mentre quando $-\sin y \geq 0$ (ovvero quando $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$) equivale a $4(1 + \sin y) \geq \sin^2 y$, ovvero $\sin^2 y - 4\sin y - 4 \leq 0$, con soluzioni $-\theta \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ ove $\theta := \arcsin(2(\sqrt{2} - 1))$: dunque la prima disequazione ha soluzioni $-\theta \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. La seconda disequazione $2\sqrt{1 + \sin y} \leq 2 - \sin y$ equivale a $4(1 + \sin y) \leq (2 - \sin y)^2$, $4\sin y \leq \sin^2 y - 4\sin y$ ovvero $\sin y(8 - \sin y) \leq 0$, ovvero $\sin y \leq 0$, con soluzioni $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq 0$. Ne segue che $g([2, 4[) = [-\theta, \frac{\pi}{2}] \cap [-\frac{\pi}{2}, 0] = [-\theta, 0]$.

3. (a) Per $\alpha = 1$ si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\sqrt{|x^3 - 2x|} + x\cos(\pi x)}{\sqrt{x} - x}$. • In $x \sim 0^+$ si è in forma indeterminata $0/0$; tuttavia si ha $N(x) \sim_{0^+} \sqrt{2x}$ (infatti $x^3 = o_0(2x)$ e $x\cos(\pi x) = o_0(\sqrt{2x})$) e $D(x) \sim_{0^+} \sqrt{x}$, da cui $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$.
• Anche in $x \sim 1$ si è in forma $0/0$, solo che stavolta non sono evidenti termini prevalenti. Posto $x = 1 + t$ con $t \sim 0$ si ha $N(t) = \sqrt{|(1+t)^3 - 2(1+t)|} + (1+t)\cos(\pi + \pi t) = -(1+t)\cos(\pi t) + \sqrt{1 - t - 3t^2 - t^3} = -(1+t)(1 - \frac{\pi^2}{2}t^2 + o_0(t^3)) + 1 + \frac{1}{2}(-t) + o_0(t) = -1 + \frac{\pi^2}{2}t^2 + o_0(t^3) - t + \frac{\pi^2}{2}t^3 + o_0(t^3) + 1 - \frac{1}{2}t + o_0(t) \sim_0 -\frac{3}{2}t$ e $D(t) = \sqrt{1+t} - (1+t) = (1 + \frac{1}{2}t + o_0(t)) - (1+t) \sim_0 -\frac{1}{2}t$, da cui $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{-\frac{3}{2}t}{-\frac{1}{2}t} = 3$. • In $x \sim +\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ e $D(x) \sim_{+\infty} -x$, perciò $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{-x} = -\infty$.
(b) Discutiamo ora i limiti per $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{\sqrt{|x^3 - 2x|} - x\cos(\pi x)}{x^\alpha - \sqrt{x}}$ con $\alpha \neq 1$. • In $x \sim 0^+$ si ha $N(x) \sim_{0^+} \sqrt{2x}$ e

$D(x) \sim_{0^+} \sqrt{x}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure $D(x) \sim_{0^+} -x^{\alpha}$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), pertanto $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ vale $\sqrt{2}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure 0^- (se $\alpha < \frac{1}{2}$). • In $x \sim 1$ si ha $N(t) \sim_0 -\frac{3}{2}t$ e $D(t) = \sqrt{1+t} - (1+t)^{\alpha} = (1+\frac{1}{2}t + o_0(t)) - (1+\alpha t + o_0(t)) \sim_0 (\frac{1}{2}-\alpha)t$, dunque $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{3}{2}t}{(\frac{1}{2}-\alpha)t} = \frac{3}{2\alpha-1}$. • Infine, in $x \sim +\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} x^{\frac{3}{2}}$ e $D(x) \sim_{+\infty} -x^{\alpha}$ (se $\alpha > \frac{1}{2}$) oppure $D(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x}$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$), perciò $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ vale 0^- (se $\alpha > \frac{3}{2}$), vale -1 (se $\alpha = \frac{3}{2}$), vale $-\infty$ (se $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}$) e vale $+\infty$ (se $\alpha < \frac{1}{2}$).

4. (a) (Figura 3) Il dominio di $f(x) = \frac{x}{\log|x+1|-2x}$ è dato da $x \neq -1$ (per il logaritmo) e da $\log|x+1| \neq 2x$ (per il quoziente), e un confronto grafico tra $\log|x+1|$ (il logaritmo simmetrizzato e traslato a sinistra di 1) e $2x$ (retta) dà $x \neq 0$, $x \neq x_0$ e $x \neq x_1$ per certi $x_0 \in]-1,0[$ e $x_1 \in]-2,-1[$ (vale $x \sim -0{,}8$ e $x_1 \sim -1{,}1$). Pertanto il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0,\, x_0,\, -1,\, x_1\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^{\infty}$ in tutto il suo dominio, senza simmetrie ne' periodi. Non vi sono zeri, perché $x \neq 0$. Quanto al segno: il numeratore è > 0 per $x > 0$, il denominatore lo è quando $\log|x+1| > 2x$ ovvero (sempre per confronto grafico) per $x < x_1$ e $x_0 < x < 0$ e, pertanto vale $f(x) > 0$ solo quando $x_1 < x < x_0$. I limiti interessanti sono in $-\infty$, x_1, -1, x_0, 0 e $+\infty$. Poiché come sappiamo $\log|x+1| = o_{\infty}(x)$, si ha $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{x}{-2x} = -\frac{1}{2}$, ovvero $y = -\frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale bilatero, con intersezioni al grafico date da $f(x) = -\frac{1}{2}$, ovvero $\log|x+1| = 0$, ovvero $|x+1| = 1$, ovvero $x = 0$ (escluso) oppure $x = -2$ (accettabile). Si ha poi $\lim_{x\to x_0^{\mp}} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = 0^+$ e $\lim_{x\to x_1^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ (sono limiti determinati); in particolare $x = -1$ è una discontinuità eliminabile, e volendo si può definire $f(-1) = 0$. Invece $\lim_{x\to 0} f(x)$ è in forma indeterminata $0/0$, e con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{1}{x+1}-2} = -1$ (alternativamente, con gli sviluppi asintotici: $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+x)-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+o_0(x)-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-x} = -1$). Pertanto anche $x = 0$ è discontinuità eliminabile, e si può definire $f(0) = -1$. Derivando (per $x \neq 0, x_0, 1, x_1$) si ha $f'(x) = \frac{1(\log|x+1|-2x)-x(\frac{1}{x+1}-2)}{(\log|x+1|-2x)^2} = \frac{\log|x+1|-\frac{x}{x+1}}{(\log|x+1|-2x)^2}$; si ha dunque $f'(x) \geq 0$ quando $\log|x+1| \geq \frac{x}{x+1}$, e un confronto grafico (piuttosto delicato vicino a $x = 0$) mostra che $f'(x) = 0$ per $x = 0$ (escluso) e $x = x_2$ per un certo $x_2 \in]-5,-4[$ (vale $x_2 \sim -4{,}6$), e $f'(x) > 0$ per $x < x_2$, $-1 < x < x_0$, $x_0 < x < 0$ e $x > 0$: ne ricaviamo che $x = x_2$ è un punto di massimo locale, con valore $f(x_2) = \frac{x_2}{\log(x_2+1)-2x_2} = \frac{x_2}{\frac{x_2}{x_2+1}-2x_2} = -\frac{x_2+1}{2x_2+1} \sim -0{,}44$. Notiamo inoltre che $\lim_{x\to -1^{\mp}} f'(x) = \lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{-\frac{x}{x+1}}{\log^2|x+1|} = -\lim_{x\to -1^{\mp}} \frac{1}{(x+1)\log^2|x+1|} = \mp\infty$ (dunque in $x = -1$ il grafico ha un punto di cuspide verticale) mentre $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-\frac{x}{x+1}}{(\log(1-x)-2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2))-x\frac{1}{1+x}}{((x+o_0(x))-2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2))-x(1-x+x^2+o_0(x^2))}{(x+o_0(x))-2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$: pertanto in $x = 0$ la funzione può essere estesa addirittura per derivabilità, con $f'(0) = \frac{1}{2}$. Infine, con un po' di pazienza si può derivare ulteriormente ottenendo $f''(x) = \frac{(4x^2+7x+2)\log|x+1|-2x(3x+1)}{(x+1)^2(\log|x+1|-2x)^3}$, e un confronto grafico tra $\log|x+1|$ e la funzione razionale $\frac{2x(3x+1)}{4x^2+7x+2}$ mostra l'esistenza degli attesi flessi obliqui: uno tra -8 e -7, un altro tra x_1 e -1 e un terzo tra -1 e x_0.

(b) In 0 come visto f è estendibile per derivabilità, con $f(0) = -1$ e $f'(0) = \frac{1}{2}$: pertanto $f(x) = -1 + \frac{1}{2}x + o_0(x)$. • In -1 la funzione è estendibile per continuità con $f(-1) = 0$. D'altra parte, posto $x = -1+t$ con $t \sim 0$ si ha $f(x) = f(-1+t) = \frac{-1+t}{\log|t|-2(-1+t)} \sim_0 -\frac{1}{\log|t|} = -\log^{-1}|t|$, primo termine dello sviluppo (nella scala potenze-logaritmi); per un altro termine, si ha $f(-1+t) - (-\frac{1}{\log|t|}) = \frac{2+t\log|t|-2t}{\log|t|(\log|t|+2-2t)} \sim_0 \frac{2}{\log^2|t|}$, pertanto $f(x) = -\frac{1}{\log|x+1|} + \frac{2}{\log^2|x+1|} + o_1(\log^{-2}|x+1|)$. • Infine, in $+\infty$ si ha l'asintoto orizzontale $y = -\frac{1}{2}$, ovvero $f(x) = -\frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$; e poi $f(x) - (-\frac{1}{2}) = \frac{\log|x+1|}{2(\log|x+1|-2x)} \sim_{+\infty} -\frac{\log|x|}{4x} = -\frac{1}{4}x^{-1}\log|x|$, da cui $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^{-1}\log|x| + o_{+\infty}(x^{-1}\log|x|)$ (sempre nella scala potenze-logaritmi).

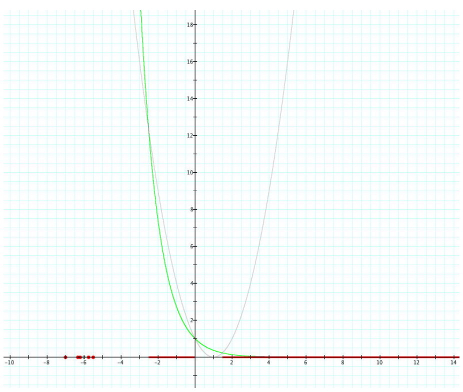
5. (a) Per il teorema Fondamentale dell'Algebra sappiamo che $p(z) = z^3 - 3iz - 5 - 5i = 0$ ha tre soluzioni in $\mathbb{C}$, e dal testo sappiamo anche che una di esse è $z_1 = 2+i$: dunque per Ruffini $p(z)$ è fattorizzabile con $z-(2+i)$, e dividendo si trova in effetti $p(z) = (z-(2+i))(z^2+(2+i)z+3+i)$. Ne segue che le altre due soluzioni di $p(z) = 0$ sono quelle di $z^2+(2+i)z+3+i = 0$, ovvero $z = \frac{-(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-4(3+i)}}{2} = \frac{-(2+i)\pm 3i}{2}$, ovvero $z = -1+i$ oppure $z = -1-2i$. • Si ha $z_0 = 2\,e^{i0}$, dunque le radici cubiche sono $w_0 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{0}{3}} = \sqrt[3]{2}$, $w_1 = \sqrt[3]{2}\,e^{i(0+\frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$ e $w_1 = \sqrt[3]{2}\,e^{i(0+\frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$.

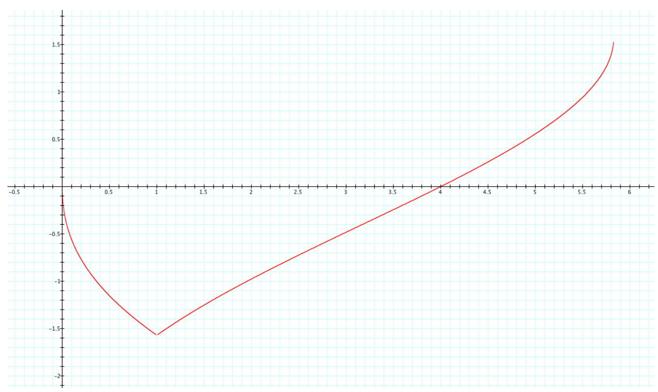
(b) Il numero $z_{\alpha} = 2+\alpha i$ ha modulo $|z_{\alpha}| = \sqrt{\alpha^2+4}$, da cui la forma polare $z_{\alpha} = \sqrt{\alpha^2+4}\,(\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}i)$; ed avendo parte reale positiva il suo argomento principale θ_{α} (che dovrà avere coseno $\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+4}}$ e seno $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}$) sta in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ e può dunque essere espresso come $\arcsin(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}})$. Pertanto la forma esponenziale è $z_{\alpha} = \sqrt{\alpha^2+4}\,e^{i\theta_{\alpha}}$, con $\theta_{\alpha} := \arcsin(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}})$, e l'espressione della potenza intera n-esima (per $n \in \mathbb{Z}$) è $(z_{\alpha})^n = (\alpha^2+4)^{\frac{n}{2}}\,e^{in\theta_{\alpha}}$.

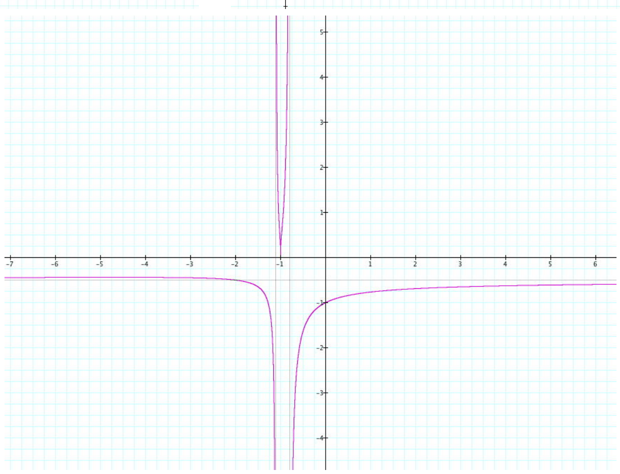
6. (a) Se $\alpha \neq 0$ l'equazione differenziale $\alpha y'' - (\alpha+1)y' + y = e^x$ è del 2o ordine lineare a coefficienti costanti: assegnare un problema di Cauchy significa assegnare i valori di una soluzione $y(x)$ e della sua derivata $y'(x)$ in un certo x_0, ed essendo $y'' = f(x,y,y') = \frac{1}{\alpha}(e^x + (\alpha+1)y' - y)$ con f di classe $\mathcal{C}^1$ sono garantite esistenza e unicità locale della soluzione all'intorno di $x = x_0$ (anzi, trattandosi come detto di un'equazione lineare a coefficienti costanti, è stato detto che tutte le soluzioni avranno dominio come $b(x) = e^x$, ovvero tutto $\mathbb{R}$). Se invece $\alpha = 0$ si ha l'equazione differenziale $y' - y = -e^x$, lineare del 1o ordine; in questo caso assegnare un problema di Cauchy significa assegnare il valore di una soluzione $y(x)$

in un certo x_0, e come in precedenza si avrà esistenza e unicità e dominio $\mathbb{R}$.
Passiamo ora alla ricerca delle soluzioni desiderate. • Se $\alpha \neq 0$, come detto si ha un'equazione del 2o ordine lineare a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\alpha z^2 - (\alpha+1)z + 1 = 0$ ha radici $\frac{1}{\alpha}$ e 1, che quando $\alpha = 1$ coincidono. Pertanto se $\alpha \neq 1$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y} = kxe^x$ con k da determinare: essendo $\tilde{y}' = k(x+1)e^{-x}$ e $\tilde{y}'' = k(x+2)e^x$, da $\alpha\tilde{y}'' - (\alpha+1)\tilde{y}' + \tilde{y} = e^x$ si ricava $k = \frac{1}{\alpha-1}$, da cui le soluzioni generali $y(x) = A\, e^{\frac{1}{\alpha}x} + (B + \frac{1}{\alpha-1}x)\, e^x$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $A + B = 0$, ovvero $y(x) = A\, e^{\frac{1}{\alpha}x} - (A - \frac{1}{\alpha-1}x)\, e^x$ con $A \in \mathbb{C}$. • Nel caso $\alpha = 1$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y} = kx^2e^x$ con k da determinare: essendo $\tilde{y}' = k(2x+x^2)e^x$ e $\tilde{y}'' = k(2+4x+x^2)e^x$, da $\tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = e^x$ si ricava $k = \frac{1}{2}$, da cui le soluzioni generali $y(x) = (A + Bx + \frac{1}{2}x^2)\, e^x$ con $A, B \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $A = 0$, ovvero $y(x) = x(B + \frac{1}{2}x)\, e^x$ con $B \in \mathbb{C}$. • Infine, per $\alpha = 0$ si ha l'equazione lineare del 1o ordine $y' - y = -e^x$. Pensando alla forma $y' + p(x)\, y = q(x)$, una primitiva di $p(x) = -1$ è $P(x) = -x$, e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int e^{-x}(-e^x)\, dx = -x$, da cui le soluzioni sono $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\, dx\ + k) = (k - x)e^x$ con $k \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ha $k = 0$, ovvero l'unica soluzione $y(x) = -x\, e^x$ (che, si noti, è il limite per $\alpha \to 0$ di quella con $A = 0$ del caso del 2o ordine).

(b) Nell'equazione differenziale $(1-x)\, y' \operatorname{tg}(2y) = x^2$, per una soluzione definita in $x = 1$ si dovrebbe avere $0 = 1$, assurdo: dunque nessuna soluzione sarà definita in $x = 1$. Se poi in un certo x_0 una soluzione $y(x)$ è tale che $\operatorname{tg}(2y(x_0)) = 0$, ovvero $y(x_0) = k\frac{\pi}{2}$ per $k \in \mathbb{Z}$, si dovrebbe avere $0 = x_0^2$, perciò una soluzione può eventualmente assumere tali valori solo in $x_0 = 0$. Ciò detto, si può porre in forma normale ottenendo $y' = \frac{x^2}{(1-x)\operatorname{tg}(2y)}$, da cui si ricava che $x = 0$ è un punto stazionario e che le soluzioni crescono per $x < 1$ (se $\operatorname{tg}(2y) > 0$, ovvero se $k\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$) oppure per $x > 1$ (se $\operatorname{tg}(2y) < 0$, ovvero se $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < y < (k+1)\frac{\pi}{2}$); questo dice anche che $x = 0$ è un punto stazionario in cui non cambia la crescenza, in altre parole è un punto di flesso orizzontale. Vista la crescenza, l'unica simmetria che appare possibile è quella rispetto al segno: in altre parole, se $\varphi(x)$ è soluzione lo sarà anche la sua opposta $\psi(x) = -\varphi(x)$? Si ha $(1-x)\psi'(x)\operatorname{tg}(2\psi(x)) = (1-x)(-\varphi'(x))\operatorname{tg}(-2\varphi(x)) = (1-x)\varphi'(x)\operatorname{tg}(2\varphi(x)) = x^2$, perciò è vero: la famiglia delle soluzioni è simmetrica rispetto al segno. • Separando le variabili si ha $\operatorname{tg}(2y)\, dy = \frac{x^2}{1-x}\, dx = -(x + 1 + \frac{1}{x-1})\, dx$, da cui integrando $-\frac{1}{2}\log|\cos(2y)| = -\frac{1}{2}x^2 - x - \log|x-1| + k$, ovvero $\log|\cos(2y)| = 2x + x^2 + 2\log|x-1| + k$, da cui esponenziando $\cos(2y) = h(x-1)^2 e^{2x+x^2}$ con $h \in \mathbb{R}$, ed imponendo che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$ si ottiene $h = -\frac{1}{2}$: dunque $\cos(2y) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x+x^2}$. Da qui si ricava $2y = \pm\arccos(-\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x+x^2}) + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$: e imponendo ancora una volta che $y(0) = \frac{2\pi}{3}$ si ottiene $\frac{4\pi}{3} = \pm\arccos(-\frac{1}{2}) + 2k\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, il che forza la scelta del segno "$-$" e di $k = 1$: otteniamo così $2y = 2\pi - \arccos(-\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x+x^2})$, ovvero la soluzione cercata $y(x) = \pi - \frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{2}(x-1)^2 e^{2x+x^2})$.







1. Ex. 1: l'insieme A (in ascissa). **2.** Ex. 2: grafico di $g(x)$. **3.** Ex. 4: grafico di $f(x)$.