Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (15/12/2010)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2010/11

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}\right) < \frac{1}{2}\} \cap \{x \in \mathbb{Q} : 4 \operatorname{arctg}(x + 2\pi) + \pi \geq 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{(n+2)^{3\alpha} - (\alpha+2)^{3n}}{2\sqrt[3]{n} - \sin(n^\alpha - \alpha^n)}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x^2 \sqrt[3]{|\log x|} - \sin \pi x}{x^\alpha |x^2 - 1|^{1-\alpha}}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...), al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \log(e^x + 2\sqrt{|x|}) - |x|$, e tracciarne il grafico.[2]

(b) Sviluppare asintoticamente $f(x)$ in $-\infty$, 0^+ e $+\infty$ con almeno due termini significativi.

5. (a) Calcolare le primitive di $\varphi(x) = \dfrac{x^5}{x^4 - 8}$. Studiato poi brevemente l'andamento e disegnato il grafico di φ, disegnare e calcolare l'area di $K = \{(x, y) : |x - 3| \leq \min\{1, y\},\ y \leq \varphi(x)\}$.

(b) Si può parlare di funzione integrale di $(\operatorname{sign} x)|\cos x|$ di punto iniziale π? Se sì, calcolarla.

6. ———— *(Quesito sulle serie numeriche, non nel programma di Analisi 1 2014/15)* ————

7. Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $z_\alpha = \alpha(-1 + i)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}^\times$, e trovarne le radici cubiche. Dire poi per quale $w \in \mathbb{C}$ il polinomio $p(z) = z^3 - iz^2 + iz + w$ ha z_1 tra le sue radici, trovando tutte le altre.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o_0(x^6)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

[2] Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (15/12/2010) – Soluzioni.

1. L'insieme A è ottenuto intersecando $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}) < \frac{1}{2}\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{Q} : 4 \operatorname{arctg}(x+2\pi)+\pi \geq 0\}$. La disequazione $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}) < \frac{1}{2}$ equivale al sistema tra $|\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}| \leq 1$ e $\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} < \sin\frac{1}{2}$; poiché $\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} > 0$ basta considerare la seconda, che equivale a $|x-1| > \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}} = \frac{2}{1-\cos 1}$, ovvero (considerando che $1 \sim \frac{\pi}{3}$ e dunque $\cos 1 \sim \frac{1}{2}$) a $x < x_0 := -\frac{1+\cos 1}{1-\cos 1} \sim -3$ oppure $x > x_1 := \frac{3-\cos 1}{1-\cos 1} \sim 5$. D'altra parte la disequazione $4\operatorname{arctg}(x+2\pi)+\pi > 0$ equivale a $\operatorname{arctg}(x+2\pi) > -\frac{\pi}{4}$ ovvero $x+2\pi > -1$, cioè $x > -2\pi-1 \sim -7{,}3$. Pertanto A è costituito dai punti razionali degli intervalli $[-2\pi-1, x_0[\, \cup\,]x_1, +\infty[$. Si tratta di un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = -2\pi - 1$ (sono evidentemente soddisfatte le due proprietà caratteristiche) ma senza minimo perché $-2\pi-1$ è irrazionale; non è ne' aperto (non è intorno di alcuno dei suoi punti) ne' chiuso (ha punti di accumulazione che non gli appartengono, ad esempio $-2\pi-1$), ne' compatto ne' discreto; è privo di punti interni e di punti isolati; tutti i punti di $[-2\pi-1, x_0] \cup [x_1, +\infty]$ sono di aderenza, di accumulazione e di frontiera per A.

2. Nella successione $a_n = \frac{(n+2)^{3\alpha}-(\alpha+2)^{3n}}{2\sqrt[3]{n}-\sin(n^\alpha-\alpha^n)}$ il denominatore tende a $+\infty$ con andamento dato dall'addendo $2\sqrt[3]{n}$ (infatti $\frac{\sin(n^\alpha-\alpha^n)}{2\sqrt[3]{n}}$, limitata su infinita, è infinitesima). Al numeratore, se $|\alpha+2|^3 > 1$, ovvero se $\alpha < -3$ oppure $\alpha > -1$, si tende a ∞ come l'esponenziale $(\alpha+2)^{3n}$ (infatti $\frac{(n+2)^{3\alpha}}{|\alpha+2|^{3n}}$ è infinitesima per il criterio del rapporto); quando invece $-3 < \alpha < -1$ il numeratore è infinitesimo, mentre per $\alpha = -3$ o $\alpha = -1$ esso diventa rispettivamente $(-1)^{n+1}$ o -1. Pertanto, ricordando che se $|a| > 1$ allora $\frac{a^n}{n^\beta}$ tende a ∞ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ (criterio del rapporto), possiamo concludere che se $\alpha < -3$ oppure $\alpha > -1$ la successione diverge a ∞ (in particolare diverge a $-\infty$ quando $\alpha > -1$); mentre invece per $-3 \leq \alpha \leq -1$ essa è infinitesima.

3. Sia $f(x) = \frac{x^2\sqrt[3]{|\log x|}-\sin\pi x}{x^\alpha|x^2-1|^{1-\alpha}}$. • In 0^+ si ha $\sin\pi x \sim_0^* x$ e dunque, essendo $\lim_0^+ \frac{x^2\sqrt[3]{|\log x|}}{x} = 0$, si ha $f(x) \sim_0 \frac{-\pi x}{x^\alpha} = -\pi x^{1-\alpha}$, perciò il limite vale $-\infty$ (se $\alpha < 1$), vale $-\pi$ (se $\alpha = 1$) e vale 0^- (se $\alpha < 1$). • In 1, posto $t = x-1$ si ha $\lim_0 \frac{(1+t)^2\sqrt[3]{|\log(1+t)|}+\sin\pi t}{|t|^{1-\alpha}(1+t)^\alpha(2+t)^{1-\alpha}}$. Poiché $\sqrt[3]{|\log(1+t)|} \sim_0 \sqrt[3]{|t|}$ e $\sin\pi t \sim_0^* t$ il numeratore è $\sim_0 \sqrt[3]{|t|}$ mentre il denominatore è $\sim_0 (2|t|)^{1-\alpha}$, pertanto il limite diventa $\lim_0 2^{\alpha-1}|t|^{\alpha-\frac{2}{3}}$, e dunque vale 0^+ (se $\alpha > \frac{2}{3}$), vale $2^{-\frac{1}{3}}$ (se $\alpha = \frac{2}{3}$) e vale $+\infty$ (se $\alpha < \frac{2}{3}$). • Infine, in $+\infty$ si ha $f(x) \sim_{+\infty} \frac{x^2\sqrt[3]{\log x}}{x^\alpha(x^2)^{1-\alpha}} = x^\alpha\sqrt[3]{\log x}$, dunque il limite vale $+\infty$ (se $\alpha \geq 0$) e vale 0^+ (se $\alpha < 0$).

4. (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = \log(e^x + 2\sqrt{|x|}) - |x|$ ha dominio tutto $\mathbb{R}$ ed è $\mathcal{C}^\infty$ tranne che in 0 dove (a causa della radice del modulo) è continua ma probabilmente con un punto cuspidale. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $e^x + 2\sqrt{|x|} = e^{|x|}$: per $x \geq 0$ ciò equivale a $\sqrt{x} = 0$ che dà $x = 0$, mentre per $x < 0$ dà $e^x + 2\sqrt{|x|} = e^{-x}$, ovvero $\sqrt{|x|} = -\sinh x$, e un facile confronto grafico mostra con chiarezza l'esistenza di un punto $x_0 \in]-1, 0[$ (in realtà si ha $x_0 \sim -0{,}8$) tale che ciò vale per $x = x_0$. In modo analogo si prova che $f(x) > 0$ quando $x_0 < x < 0$ oppure $x > 0$. I limiti interessanti sono in $\mp\infty$: sviluppando in $-\infty$ si ha $f(x) = \log(2\sqrt{|x|}(1+\frac{e^x}{2\sqrt{|x|}})) - (-x) = x + \log 2 + \log(\sqrt{|x|}) + \log(1+\frac{e^x}{2\sqrt{|x|}}) = x + \frac{1}{2}\log|x| + \log 2 + o_{-\infty}(1)$, dunque $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (ma, visto lo sviluppo, senza asintoto lineare); sviluppando invece in $+\infty$ si ha $f(x) = \log(e^x(1+2e^{-x}\sqrt{x}))-x = \log(e^x)+\log(1+2e^{-x}\sqrt{x})-x = x+2e^{-x}\sqrt{x}-\frac{1}{2}(2e^{-x}\sqrt{x})^2+o_{+\infty}((2e^{-x}\sqrt{x})^2)-x = 2\sqrt{x}e^{-x} - 2xe^{-2x} + o_{+\infty}(xe^{-2x})$, da cui $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Derivando per $x \neq 0$, posto $\sigma := \operatorname{sign} x$ si ottiene $f'(x) = \frac{e^x+\sigma\frac{1}{\sqrt{|x|}}}{e^x+2\sqrt{|x|}} - \sigma = \frac{(1-\sigma)\sqrt{|x|}\,e^x-2x+\sigma}{e^x+2\sqrt{|x|}}$: pertanto per $x > 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \frac{1}{2}$ (con massimo locale stretto $f(\frac{1}{2}) = \log(\sqrt{e}+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \sim 0{,}6$), mentre per $x < 0$ si ha $f'(x) = \frac{2\sqrt{|x|}\,e^x-2x-1}{\sqrt{|x|}(e^x+2\sqrt{|x|})}$ da cui $f'(x) \geq 0$ quando $e^x \geq \frac{2x+1}{2\sqrt{|x|}}$, e un altro confronto grafico mostra che esiste un punto $x_1 \in]x_0, 0[$ (in realtà si ha $x_1 \sim -0{,}2$) tale che ciò accade per $x < x_1$. Notiamo anche che, come previsto, $\lim_{x\to0\mp} f'(x) = \mp\infty$.

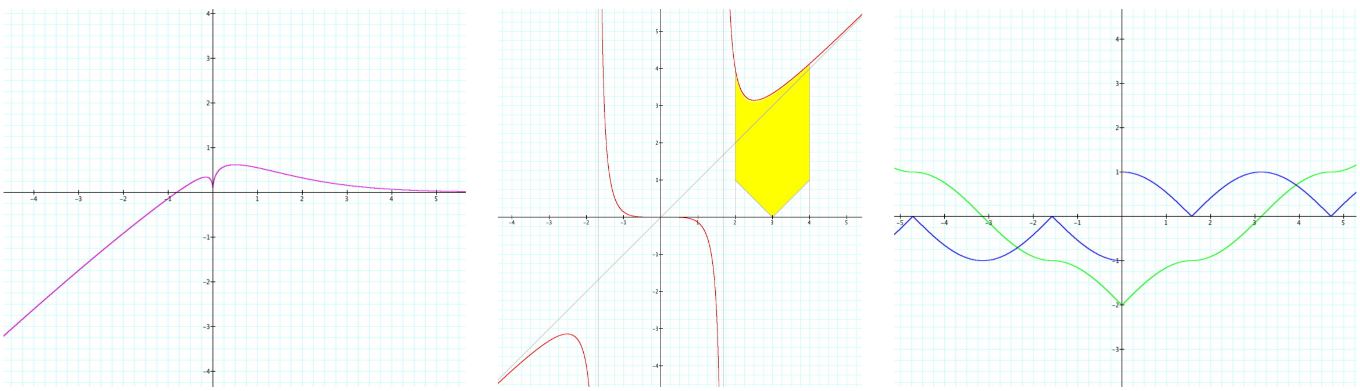
(b) Gli sviluppi di $f(x)$ in $\mp\infty$ sono già stati fatti durante lo studio. Quanto a 0^+, si ha $f(x) = \log(e^x+2\sqrt{x})-x = \log(1+t)-x$ con l'infinitesimo $t = e^x+2\sqrt{x}-1 = 1+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)+2\sqrt{x}-1 = 2\sqrt{x}+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)$, dunque $f(x) = (2\sqrt{x}+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)) - \frac{1}{2}(2\sqrt{x}+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2))^2 + o_0(2\sqrt{x})^2) - x = 2\sqrt{x}+x+\frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) - \frac{1}{2}(4x+x^2+4x\sqrt{x}+o_0(x^2)) + o_0(x) - x = 2\sqrt{x} - 2x + o_0(x)$.

5. (a) Posto $x^2 = t$, da cui $2x\,dx = dt$, si ottiene $\int \frac{x^5}{x^4-8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{t^2-8}\,dt = \frac{1}{2}\int(1+\sqrt{2}(\frac{1}{t-2\sqrt{2}} - \frac{1}{t+2\sqrt{2}}))\,dt) = \frac{1}{2}(t+\sqrt{2}\log|\frac{t-2\sqrt{2}}{t+2\sqrt{2}}|) + k = \frac{1}{2}(x^2+\sqrt{2}\log|\frac{x^2-2\sqrt{2}}{x^2+2\sqrt{2}}|) + k$. L'andamento di $\varphi(x)$ è di facile studio (dispari, definita per $x \neq \mp\sqrt[4]{8}$, si annulla per $x = 0$ ed è positiva per $-\sqrt[4]{8} < x < 0$ e $x > \sqrt[4]{8} \sim 1{,}7$, asintoto lineare bilatero $y = x$, minimo locale in $\sqrt[4]{40} \sim 2{,}5$ che vale $\varphi(\sqrt[4]{40}) = \frac{5\sqrt[4]{40}}{4} \sim 3{,}1$); la condizione $|x-3| \leq \max\{1, y\}$ equivale poi al sistema tra $|x-3| \leq 1$ e $|x-3| \leq y$, dunque l'insieme K è quello rappresentato in Figura 2 e la sua area è $\int_2^4 \varphi(x)\,dx + \int_4^3 (x-3)\,dx + \int_3^2 (3-x)\,dx = 5 + \frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}} \sim 6$.

(b) (Figura 3) Ha certamente senso parlare di funzione integrale $\Psi(x)$ di $\psi(x) := (\operatorname{sign} x)|\cos x|$ di punto iniziale π, perché $\psi(x)$ ha un solo punto di salto in $x = 0$ (con $\psi(0^{\mp}) = \mp 1$) e dunque è localmente integrabile; sappiamo anche che $\Psi(x)$ sarà derivabile per $x \neq 0$ e continua in 0, che sarà pari (infatti $\psi(x)$ è dispari) e che $\Psi(\pi) = 0$. Dovendo essere $\Psi'(x) = \psi(x)$ per $x \neq 0$, di certo su ogni intervallo $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ con $k \geq 1$ si avrà $\Psi(x) = (-1)^k \sin x + c_k$ per una certa costante c_k; il fatto che $\Psi(\pi) = 0$ unito alla continuità di Ψ nei punti di passaggio dà $c_k = 2(k-1)$. Otteniamo dunque che su $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ con $k \geq 1$ vale $\Psi(x) = (-1)^k \sin x + 2(k-1)$; tale definizione in realtà vale anche quando $k = 0$ per $x \geq 0$ — ovvero in $[0, \frac{\pi}{2}]$ — con la precisazione che $\Psi(0) = -2$, ed estendendo poi anche su $]-\infty, 0[$ per parità.

6. ———— *(Quesito sulle serie numeriche, non nel programma di Analisi 1 2014/15)* ————

7. Il numero complesso $z_\alpha = \alpha(-1+i)$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$, ha modulo $|\alpha|\sqrt{2}$ e argomento $\frac{3\pi}{4}$ (se $\alpha > 0$) o $-\frac{\pi}{4}$ (se $\alpha < 0$). Dunque se $\alpha > 0$ si ha $z_\alpha = \alpha\sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{\alpha\sqrt{2}}\, e^{(\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$); mentre se $\alpha < 0$ si ha $z_\alpha = |\alpha|\sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi}{4} i}$ con radici cubiche $\sqrt[3]{|\alpha|\sqrt{2}}\, e^{(-\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3})i}$ (dove $k = 0, 1, 2$). • Dividendo con Ruffini $p(z) = z^3 - iz^2 + iz + w$ per $z - z_1$ si ottiene quoziente $z^2 - z + 1$ e resto $w - 1 + i$, dunque $p(z)$ ha z_1 tra le sue radici se e solo se $w = 1 - i$, e le altre due soluzioni sono date da $z^2 - z + 1 = 0$, ovvero $z = \frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$ (due radici cubiche di -1).



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. **2.** Ex. 5(a): grafico di $\varphi(x)$ e l'insieme K. **3.** Ex. 5(b): grafico di $\psi(x)$ e della funzione integrale $\Psi(x)$.