Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (16/02/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\, 3\cos 2x + \cos x + 2 \le 0\} \cup \{\mathrm{arctg}\,(2n - n^2) : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{e^{n\alpha} - 3n\alpha}{(\alpha+2)^n + 3}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. (a) Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{0,-1,+\infty} \frac{(x^2+x)(3e^{-\alpha x}-2)}{(x+1-\log|2x^2-\alpha|)\sin x}$ per $\alpha = 1$, usando tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) .

(b) Discutere i precedenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sempre con tecniche di analisi locale.

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{2|x| - e^x}$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0, 1 e $-\infty$ con due termini significativi.

5. (a) Determinare le primitive delle funzioni $\dfrac{x}{x+\sqrt{x}-2}$ e $\dfrac{x\log|x|}{(x^2+2)^2}$.

(b) Dire per ciascuna di tali funzioni se ha senso l'integrale sull'intervallo $[0,1]$ e, se sì, calcolarlo.

6. Data l'equazione differenziale $x^3 y' = 2(y+4)^2$ studiarne a priori soluzioni costanti, parità, crescenza, convessità; e dire, sempre a priori, per quali $c \in \mathbb{R}$ la condizione $y(c) = 0$ individua localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$. Determinare poi $\varphi_c(x)$, specificando per quali c il dominio è $\mathbb{R}$. Determinare inoltre tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $2y'' + y = x^2 + \sin(\alpha x)$ al variare di $\alpha \ge 0$, verificando se, per qualche α, tra esse vi sia anche $\varphi_c(x)$ per qualche c.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (16/02/2015) – $\boxed{\text{Tema A}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ 3\cos 2x + \cos x + 2 \le 0\}$ e $A_2 = \{\operatorname{arctg}(2n - n^2) : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ la disequazione $3\cos 2x + \cos x + 2 \le 0$ equivale a $6\cos^2 x + \cos x - 1 \le 0$ che, posto $t = \cos x$, è soddisfatta per $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{3}$, ovvero $-\frac{1}{2} \le \cos x \le \frac{1}{3}$; tenuto presente che $x > 0$, posto $\theta := \arccos\frac{1}{3} \sim 1{,}2$ le soluzioni sono $[\theta, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, 2\pi - \theta] \cup [\theta + 2\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\pi] \cup [\frac{4\pi}{3} + 2\pi, (2\pi - \theta) + 2\pi] \cup \cdots$ (unione numerabile degli intervalli compatti di tipo $[\theta + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$ e $[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, (2\pi - \theta) + 2k\pi]$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$). D'altra parte la successione $a_n = 2n - n^2$ è strettamente decrescente, parte da $a_1 = 1$ e tende a $-\infty$: pertanto, essendo l'arco-tangente continua e strettamente crescente, la successione $\operatorname{arctg}(a_n)$ partirà da $\operatorname{arctg}(a_1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ e tenderà decrescendo a $-\frac{\pi}{2}$. Essendo $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{1}{3} = \cos\theta$ si ha $\frac{\pi}{4} < \theta$: dunque A è l'unione disgiunta degli intervalli compatti di A_1 e dei punti isolati di A_2. Ne risulta che A è un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = -\frac{\pi}{2}$ che però non è il minimo perché non sta in A; non è aperto (non è intorno dei punti di A_2) ne' chiuso (è inferiormente limitato ma non ha minimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_1 tranne gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_2; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $-\frac{\pi}{2}$ e $+\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_2); infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati (quelli di A_2), gli estremi degli intervalli di A_1, $-\frac{\pi}{2}$ e $+\infty$.

2. La successione $a_n = \frac{e^{n\alpha} - 3n\alpha}{(\alpha+2)^n + 3}$ è il rapporto tra le successioni $a_n' = e^{n\alpha} - 3n\alpha$ e $a_n'' = (\alpha + 2)^n + 3$. Nel seguito useremo il noto fatto che $\lim \frac{\beta^n}{n^a} = +\infty$ per ogni $\beta > 1$ e ogni $a \in \mathbb{R}$, facilmente verificabile col criterio del rapporto. • Per a_n', se $\alpha > 0$ il limite è $+\infty$ (come $e^{n\alpha} = (e^\alpha)^n$); se $\alpha = 0$ vale $a_n' \equiv 1$; e se $\alpha < 0$ l'addendo esponenziale è infinitesimo e dunque a_n' tende a $+\infty$ (come $-3n\alpha = (-3\alpha)n$). • Per a_n'', se $\alpha + 2 > 1$ (ovvero $\alpha > -1$) il limite è $+\infty$ (come $(\alpha+2)^n$); se $\alpha + 2 = 1$ (ovvero $\alpha = -1$) vale $a_n'' \equiv 4$; se $-1 < \alpha + 2 < 1$ (ovvero $-3 < \alpha < -1$) l'addendo esponenziale è infinitesimo e dunque a_n'' tende a 3^+; se $\alpha + 2 = -1$ (ovvero $\alpha = -3$), a_n'' oscilla tra i valori 2 e 4; e se $\alpha + 2 < -1$ (ovvero $\alpha < -3$), a_n'' diverge a ∞ senza segno. • Ricapitolando:

	$\alpha < -3$	$\alpha = -3$	$-3 < \alpha < -1$	$\alpha = -1$	$-1 < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
a_n'	$+\infty \quad [-3\alpha n]$	$+\infty \quad [-3\alpha n]$	$+\infty \quad [-3\alpha n]$	$+\infty \quad [-3\alpha n]$	$+\infty \quad [-3\alpha n]$	1	$+\infty \quad [(e^\alpha)^n]$
a_n''	$\infty \quad [(\alpha+2)^n]$	$2 \sim 4$	3^+	4	$+\infty \quad [(\alpha+2)^n]$	$+\infty \quad [2^n]$	$+\infty \quad [(\alpha+2)^n]$
a_n	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0^+	0^+	???

Nell'ultima riga sono già stati scritti i limiti di $a_n = a_n'/a_n''$ nel caso in cui siano determinati (ad esempio, per $-3 < \alpha < -1$ si ha $+\infty/3^+ = +\infty$) oppure indeterminati ma risolvibili con la conoscenza del fatto che $\lim \frac{\beta^n}{n^a} = +\infty$ per ogni $\beta > 1$ e ogni $a \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $\alpha < -3$ l'infinito di $(\alpha+2)^n$ al denominatore prevale su quello di $-3\alpha n$ al numeratore). Resta il solo caso dubbio di $\alpha > 0$ in cui si confrontano sopra e sotto due infiniti di tipo esponenziale: il punto è capire quale dei due abbia la base maggiore. Al numeratore si ha $e^{\alpha n} = (e^\alpha)^n$, e al denominatore $(\alpha+2)^n$, dunque la questione è: per quali $\alpha > 0$ si ha $e^\alpha \ge \alpha + 2$? Un confronto grafico mostra chiaramente l'esistenza di un $\alpha_0 \in]1, 2[$ tale che $e^{\alpha_0} = \alpha_0 + 2$ (vale $\alpha_0 \sim 1{,}15$), e per $\alpha > 0$ si ha $e^\alpha > \alpha + 2$ quando $\alpha > \alpha_0$: pertanto $\lim a_n$ vale 0^+ per $0 < \alpha < \alpha_0$, vale 1 per $\alpha = \alpha_0$ e vale $+\infty$ per $\alpha > \alpha_0$. Lo specchietto finale è perciò il seguente:

	$\alpha < -3$	$-3 \le \alpha \le -1$	$-1 < \alpha < \alpha_0$	$\alpha = \alpha_0$	$\alpha > \alpha_0$
a_n	0	$+\infty$	0^+	1	$+\infty$

3. (a) Per $\alpha = 1$ si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(x^2+x)(3e^{-x}-2)}{(x+1-\log|2x^2-1|)\sin x}$. • Vale $N(x) \sim_0 x$ e $D(x) \sim_0 \sin x \sim_0 x$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$. • Anche in $x \sim -1$ c'è forma indeterminata $0/0$: posto $t = x + 1 \sim 0$ (ovvero $x = -1 + t$) si ha $N(t) = t(t-1)(3e^{1-t} - 2) \sim_0 t(-1)(3e - 2) = -(3e - 2)t$ e $D(t) = (t - \log|2(1 - 2t + t^2) - 1|)\sin(-1 + t) = (t - \log(1 - 4t + 2t^2))\sin(-1 + t) = (t - (-4t + o_0(t))\sin(-1 + t) \sim -(5\sin 1)t$, da cui $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-(3e-2)t}{-(5\sin 1)t} = \frac{3e-2}{5\sin 1} \sim 1{,}5$. • Vale $N(x) \sim_{+\infty} -2x^2$ e $D(x) \sim_{+\infty} x\sin x$, così $f(x) \sim_{+\infty} \frac{-2x^2}{x\sin x} = -\frac{2x}{\sin x}$ che tende a ∞ senza segno (infatti se $x > 0$ si ha $|-\frac{2x}{\sin x}| = \frac{2x}{|\sin x|} \ge 2x \to +\infty$).

(b) Vediamo ora il caso generale $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(x^2+x)(3e^{-\alpha x}-2)}{(x+1-\log|2x^2-\alpha|)\sin x}$. • In $x \sim 0$ si ha ancora $N(x) \sim_0 x$ mentre per $D(x) \sim_0 (x + 1 - \log|2x^2 - \alpha|)x$ serve più attenzione: se $\alpha = 0$ si ottiene $D(x) \sim_0 (x + 1 - \log|2x^2|)x = (x + 1 - \log 2 - 2\log|x|)x \sim_0 -2x\log|x|$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{-2x\log|x|} = 0^+$; se $\alpha = \mp e$ si ha $D(x) \sim_0 (x + 1 - \log|2x^2 \pm e|)x = (x + 1 - \log(e \mp 2x^2))x = (x + 1 - \log(e(1 \mp \frac{2x^2}{e}))x = (x + 1 - (1 + \log(1 \mp \frac{2x^2}{e})))x = (x - (\mp\frac{2}{e}x^2 + o_0(x^2)))x \sim_0 x^2$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0\mp} \frac{x}{x^2} = \mp\infty$; e negli altri casi si ha $D(x) \sim_0 (x + 1 - \log|\alpha - 2x^2|)x \sim_0 (1 - \log|\alpha|)x$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(1 - \log|\alpha|)x} = \frac{1}{1 - \log|\alpha|}$. • In $x \sim -1$, se $\alpha \ne 1,\ 3$ non siamo più in forma indeterminata perché $D(x)$ tende a $(\sin 1)\log|2 - \alpha| \in \mathbb{R}$ se $\alpha \ne 2$ oppure a $-\infty$ se $\alpha = 2$, dunque $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$. Il caso $\alpha = 1$ è già stato trattato in precedenza; quanto al caso $\alpha = 3$, in modo simile si ottiene $N(t) = (-t + t^2)(3e^{3-3t} - 2) \sim_0 -(3e^3 - 2)t$ e $D(t) = (t - \log(1 + 4t - 2t^2))\sin(-1 + t) = (t - (4t + o_0(t)))\sin(-1 + t) \sim (3\sin 1)t$, da cui $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-(3e^3-2)t}{(3\sin 1)t} = -\frac{3e^3-2}{3\sin 1} \sim -23{,}1$. • Infine, per $x \sim +\infty$, rispetto al caso $\alpha = 1$ non cambia nulla se $\alpha \ge 0$, mentre se $\alpha < 0$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} 3x^2 e^{-\alpha x}$ che tende a $+\infty$ in modo esponenziale; in entrambi i casi il limite di $f(x)$ resta ∞ senza segno.

4. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x)=\frac{x^2}{2|x|-e^x}$ è dato da $2|x|\neq e^x$, e un confronto grafico mostra chiaramente che deve essere $x\neq x_0$ per un certo $x_0\in]-1,0[$ (vale $x_0\sim -0{,}35$) La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio tranne che in $x=0$ ove, a causa del modulo, è continua (con valore $f(0)=0$) ma ci potrebbe essere un punto angoloso. Non vi sono simmetrie, ne' periodi. L'unico zero è $x=0$; per il segno, si ha $f(x)>0$ quando $2|x|>e^x$, il che accade (sempre dal confronto grafico) quando $x<x_0$. I limiti interessanti sono in $x_0^\mp$ e in $\pm\infty$; quelli determinati sono $\lim_{x\to x_0^\mp} f(x)=\pm\infty$; essendo poi $f(x)\sim_{-\infty}\frac{x^2}{2|x|}=\frac{x^2}{-2x}=-\frac{1}{2}x$ e $f(x)\sim_{+\infty}\frac{x^2}{-e^x}=-x^2e^{-x}$ si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (con probabile asintoto obliquo) e $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^-$ (con tendenza rapida da sotto all'asintoto orizzontale $y=0$). Vediamo allora se c'è davvero l'asintoto obliquo a $-\infty$: come detto vale $f(x)\sim_{-\infty}-\frac{1}{2}x$, poi $f(x)-(-\frac{1}{2}x)=\frac{x^2}{-2x-e^x}+\frac{1}{2}x=\frac{-2x^2+x(2x+e^x)}{2(2x+e^x)}\sim_{-\infty}\frac{xe^x}{4x}=\frac{1}{4}e^x$ tende a 0^+, pertanto l'asintoto obliquo a $-\infty$ è $y=-\frac{1}{2}x$ e il grafico di f vi tende da sopra. • Derivando (per il momento con $x\neq 0$), posto $\sigma=\operatorname{sign} x$ e ricordando che $\sigma x=|x|$ si ha $f'(x)=\frac{2x(2|x|-e^x)-x^2(2\sigma-e^x)}{(2|x|-e^x)^2}=\frac{x(2|x|+(x-2)e^x)}{(2|x|-e^x)^2}$. Si ha dunque $f'(x)=0$ quando $e^x=-\frac{2|x|}{x-2}$, e un confronto grafico tra l'esponenziale e $-\frac{2|x|}{x-2}$ (funzione omografica con segno invertito per $x<0$, vedi nel riquadro della Figura 1) mostra che ciò accade in due punti $x_1\in]-1,0[$ e $x_2\in]1,2[$ (vale $x_1\sim-0{,}7$ e $x_2\sim 1{,}3$). Inoltre si ha evidentemente $\lim_{x\to0} f'(x)=0$, perciò f è estendibile a $x=0$ anche come funzione derivabile e si tratta allora di un punto stazionario (niente punto angoloso dunque, ma la cosa non è sorprendente visto che $f(x)\sim_0 -x^2$). Quanto al segno, il fattore $2|x|+(x-2)e^x$ è >0 per $x=2$, oppure per $x>2$ quando $e^x>-\frac{2|x|}{x-2}$, oppure per $x<2$ quando $e^x<-\frac{2|x|}{x-2}$; tenuto conto anche del fattore x, ne segue che $f'(x)>0$ quando $x_1<x<x_0$ oppure $x_0<x<0$ oppure $x>x_2$, così che $x=x_1$ e $x=x_2$ sono punti di minimo locale (con valori $f(x_1)\sim 0{,}5$ e $f(x_2)\sim -1{,}6$) e $x=0$ è punto di massimo locale (con valore $f(0)=0$). Infine, derivando ancora, con un po' di pazienza si ottiene $f''(x)=\frac{(2\sigma x^3+(x^2-4x+2)e^x)e^x}{(2|x|-e^x)^3}$, e un confronto grafico tra e^x e $-\sigma\frac{2x^3}{x^2-4x+2}$ (o, meglio ancora, tra $2\sigma x^3e^{-x}$ e $-x^2+4x-2$) mostra l'esistenza degli attesi punti di flesso, uno in $]0,1[$ e l'altro in $]1,2[$.

(b) In 0 si ha $f(x)\sim_0 -x^2$, poi $f(x)-(-x^2)=\frac{x^2}{2|x|-e^x}+x^2=x^2\frac{1+2|x|-e^x}{2|x|-e^x}=\frac{1+2\sigma x-(1+x+o_0(x))}{2|x|-e^x}x^2=\frac{(2\sigma-1)x+o_0(x)}{2|x|-e^x}x^2\sim_0 \frac{(2\sigma-1)x}{-e^x}x^2\sim_0(1-2\sigma)x^3$, dunque $f(x)=-x^2+(1-2\sigma)x^3+o_0(x^3)$ (nel senso che $f(x)=-x^2+3x^3+o_{0^-}(x^3)$ e $f(x)=-x^2-x^3+o_{0^+}(x^3)$). • In 1 la funzione è finita e derivabile, dunque per Taylor vale $f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+o_1(x-1)=-\frac{1}{e-2}-\frac{1}{e-2}(x-1)+o_1(x-1)$. • A $-\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y=-\frac{1}{2}x$, e poi come visto $f(x)-(-\frac{1}{2}x)\sim_{-\infty}\frac{1}{4}e^x$: dunque $f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}e^x+o_{-\infty}(e^x)$ (nella scala potenze-esponenziali).

5. (a) Posto $x=t^2$ si ha $\int\frac{x}{x+\sqrt{x}-2}\,dx=\int\frac{t^2}{t^2+t-2}2t\,dt=2\int\frac{t^3}{t^2+t-2}\,dt=2\int\frac{(t-1)(t^2+t-2)+3t-2}{t^2+t-2}\,dt=2\int(t-1+\frac{3t-2}{t^2+t-2})\,dt=t^2-2t+2\int\frac{3t-2}{t^2+t-2}\,dt=t^2-2t+\frac{2}{3}\int(\frac{1}{t-1}+\frac{8}{t+2})\,dt=t^2-2t+\frac{2}{3}(\log|t-1|+8\log|t+2|)+k=x-2\sqrt{x}+\frac{2}{3}(\log|\sqrt{x}-1|+8\log|\sqrt{x}+2|)+k$. • Usando la formula di integrazione per parti $\int F(x)g(x)\,dx=F(x)G(x)-\int f(x)G(x)\,dx$ (ove $F'=f$ e $G'=g$) con $F(x)=\log|x|$ e $g(x)=\frac{x}{(x^2+2)^2}$ (dunque $f(x)=\frac{1}{x}$ e $G(x)=-\frac{1}{2(x^2+2)}$) si ottiene $\int\frac{x\log|x|}{(x^2+2)^2}\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2+2)}-\int\frac{1}{x}(-\frac{1}{2(x^2+2)})\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2+2)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(x^2+2)})\,dx$. D'altra parte si ha $\frac{1}{x(x^2+2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+2}=\frac{(a+b)x^2+cx+2a}{x(x^2+2)}$, da cui confrontando i coefficienti si ottiene $(a+b,c,2a)=(0,0,1)$, ovvero $(a,b,c)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$, da cui $\frac{1}{x(x^2+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+2})$: ne segue $\int\frac{x\log|x|}{(x^2+2)^2}\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2+2)}+\frac{1}{4}\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+2})+k=-\frac{\log|x|}{2(x^2+2)}+\frac{1}{4}(\log|x|-\frac{1}{2}\log(x^2+2))+k=\frac{1}{8}(\frac{2x^2}{x^2+2}\log|x|-\log(x^2+2))+k$.

(b) Come sappiamo, una condizione necessaria affinché abbia senso l'integrale di Riemann di una funzione su un intervallo compatto (quale è $[0,1]$) è che tale funzione sia limitata sull'intervallo stesso.[(2)] Questo non accade per $\varphi(x)=\frac{x}{x+\sqrt{x}-2}$, per la quale $\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=-\infty$, dunque per essa l'integrale sull'intervallo $[0,1]$ non ha senso. Invece la funzione $\psi(x)=\frac{x\log|x|}{(x^2+2)^2}$ può essere estesa per continuità in $x=0$ col valore 0 (sappiamo infatti che $\lim_{x\to0}x\log|x|=0$): dunque, essendo diventata continua, per essa l'integrale su $[0,1]$ ha senso (e sarà <0, essendo $\psi<0$ su $[0,1]$): considerata la sua primitiva $\Psi(x)=\frac{1}{8}(\frac{2x^2}{x^2+2}\log|x|-\log(x^2+2))$ (anch'essa estesa in $x=0$ col valore del limite $-\frac{1}{8}\log 2$) esso vale $\Psi(1)-\Psi(0)=(-\frac{1}{8}\log 3)-(-\frac{1}{8}\log 2)=-\frac{1}{8}\log\frac{3}{2}\sim-0{,}05$.

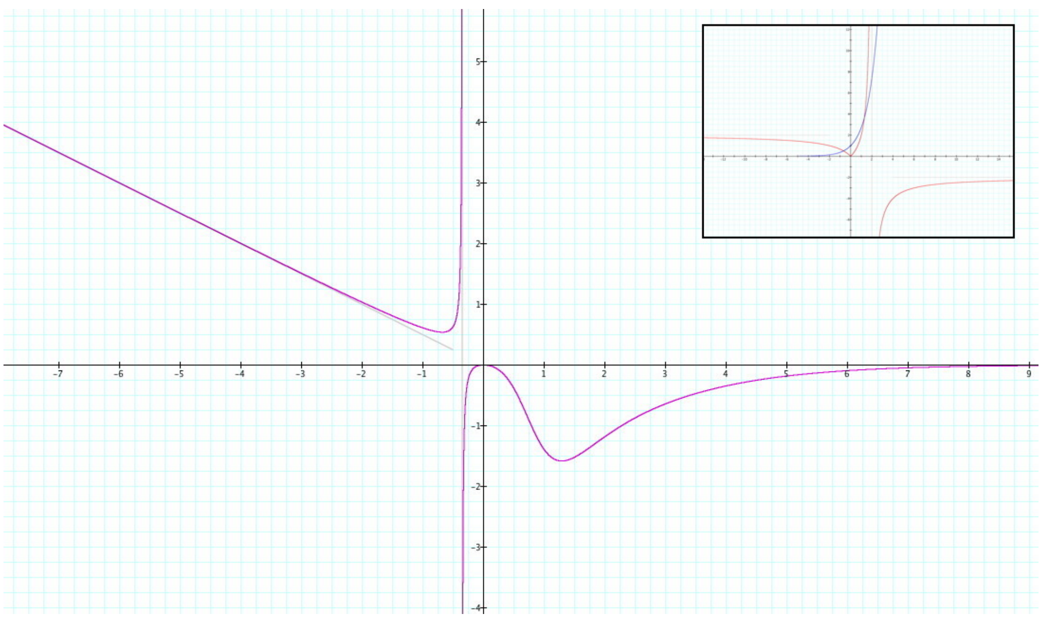
6. Per l'equazione differenziale $x^3y'=2(y+4)^2$, se $y\equiv k$ è soluzione costante si deve avere $0=2(k+4)^2$ per ogni x, il che si verifica solo per $k=-4$: l'unica soluzione costante è dunque $y\equiv-4$. Se $\varphi(x)$ è una soluzione per $x>0$, posto $\psi(x):=\varphi(-x)$ si ha $x^3\psi'(x)=x^3(-\varphi'(-x))=(-x)^3\varphi'(-x)=2(\varphi(-x)+4)^2=2(\psi(x)+4)^2$, dunque $\psi(x)$ è anch'essa soluzione per $x<0$: in altre parole, la famiglia delle soluzioni è pari. Se una soluzione è definita in $x=0$ si deve avere $0=2(y(0)+4)^2$, da cui $y(0)=-4$; invece per $x\neq0$ si può porre in forma normale $y'=f(x,y)=\frac{2(y+4)^2}{x^3}$, che ci dice che le soluzioni saranno crescenti per $x>0$ e decrescenti prima. Derivando ambo i membri si ottiene poi $y''=2\frac{2y'(y+4)x^3-3x^2(y+4)^2}{x^6}=\frac{8(y+4)^2}{x^6}(y-\frac{3}{4}x^2+4)$, dal che si nota che le soluzioni saranno convesse sopra la parabola $y=\frac{3}{4}x^2-4$ e concave sotto. Per il teorema di Cauchy, essendo $f(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^1$ per ogni $x\neq0$ e ogni $y\in\mathbb{R}$, si avrà che per ogni $c\neq0$ la condizione $y(c)=0$ individuerà localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$: separando le

[(2)] Quanto detto riguarda l'integrale di Riemann studiato in Analisi I; invece in Analisi II si studieranno gli *integrali di Riemann generalizzati*, o *impropri*, in cui si cercherà di dare un senso all'integrale anche per funzioni non limitate.

variabili si ottiene in effetti $(y+4)^{-2}\,dy = 2x^{-3}\,dx$, e integrando $-(y+4)^{-1} = -x^{-2}+k$, da cui $y = \frac{x^2}{1-kx^2}-4$; imponendo che $y(c)=0$ si ha $0 = \frac{c^2}{1-kc^2}-4$, da cui $k = \frac{4-c^2}{4c^2}$, ovvero $\varphi_c(x) = \frac{x^2}{1-\frac{4-c^2}{4c^2}x^2}-4 = \frac{16(x^2-c^2)}{c^2x^2-4(x^2-c^2)}$. Infine, le soluzioni $\varphi_c(x)$ con dominio $\mathbb{R}$ sono quelle con $k = \frac{4-c^2}{4c^2} \le 0$, ovvero con $|c| \ge 2$. • L'equazione differenziale $2y''+y = x^2+\sin(\alpha x)$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $2z^2+1=0$ ha soluzioni $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$, dunque le soluzioni dell'omogenea associata sono $A\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+B\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Una soluzione particolare per $b_1(x)=x^2$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax^2+bx+c$, e imponendo che sia soluzione si ha $2(2a)+(ax^2+bx+c) = x^2$ da cui $(a,b,c) = (1,0,-4)$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = x^2-4$. Quanto a $b_2(x) = \sin(\alpha x)$, se $\alpha \ne \frac{1}{\sqrt{2}}$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)$, e imponendo che sia soluzione si ha $2(-a\alpha^2\cos(\alpha x)-b\alpha^2\sin(\alpha x))+(a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)) = \sin(\alpha x)$, ovvero $(1-2\alpha^2)(a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)) = \sin(\alpha x)$, da cui $(a,b) = (0,\frac{1}{1-2\alpha^2})$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{1-2\alpha^2}\sin(\alpha x)$; se invece $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (caso risonante) una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = x(a\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+b\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x))$, e imponendo che sia soluzione si trova $(a,b) = (-\frac{1}{2\sqrt{2}},0)$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$. Le soluzioni generali sono dunque

$$y(x) = \begin{cases} A\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+B\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+x^2-4+\frac{1}{1-2\alpha^2}\sin(\alpha x) & (\text{se } \alpha\ge 0,\ \alpha\ne\frac{1}{\sqrt{2}}); \\ (A-\frac{1}{2\sqrt{2}}x)\cos(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+B\sin(\frac{1}{\sqrt{2}}x)+x^2-4 & (\text{se } \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}). \end{cases}$$

Notiamo che, quando $\alpha=0$, per $A=B=0$ troviamo $y(x)=x^2-4$, che è $\varphi_{\pm 2}(x)$.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (16/02/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____

IN STAMPATELLO SF / SA

Tema B

A pie' pagina[(1)] alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{\operatorname{arctg}(3n - e^n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ 2\sin 2x \geq 3\cos x\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il limite della successione $a_n = \dfrac{2 + (\alpha + 3)^n}{2n\alpha - e^{n\alpha}}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. (a) Calcolare i limiti $\displaystyle\lim_{0,\,1,\,+\infty} \frac{(4e^{-\alpha x} - 3)(x^2 - x)}{(\log|2x^2 - \alpha| + x - 1)\sin x}$ per $\alpha = 1$, usando tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) .

(b) Discutere i precedenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sempre con tecniche di analisi locale.

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{-x} - 2|x|}$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0, -1 e $+\infty$ con due termini significativi.

5. (a) Determinare le primitive delle funzioni $\dfrac{x+1}{x - 4\sqrt{x} + 3}$ e $\dfrac{x\,\log|x|}{(x^2 - 4)^2}$.

(b) Dire per ciascuna di tali funzioni se ha senso l'integrale sull'intervallo $[0, 1]$ e, se sì, calcolarlo.

6. Data l'equazione differenziale $x^4 y' = 3y^2$ studiarne a priori soluzioni costanti, parità, crescenza, convessità; e dire, sempre a priori, per quali $c \in \mathbb{R}$ la condizione $y(c) = 1$ individua localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$. Determinare poi $\varphi_c(x)$, specificando per quali c il dominio è $\mathbb{R}$. Determinare inoltre tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $3y'' + y = x^2 + \cos(\alpha x)$ al variare di $\alpha \geq 0$, verificando se, per qualche α, tra esse vi sia anche $\varphi_c(x)$ per qualche c.

[(1)] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (16/02/2015) – $\boxed{\textbf{Tema B}}$ – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{\mathrm{arctg}\,(3n - e^n) : n \in \mathbb{N}\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ 2\sin 2x \geq 3\cos x\}$. La successione $a_n = 3n - e^n$ è strettamente decrescente, parte da $a_1 = 3 - e \sim 0,2$ e tende a $-\infty$: pertanto, essendo l'arcotangente continua e strettamente crescente, la successione $\mathrm{arctg}\,(a_n)$ partirà da $\mathrm{arctg}\,(a_1) = \mathrm{arctg}\,(3 - e) \sim 0{,}27$ e tenderà decrescendo a $-\frac{\pi}{2}$. D'altra parte, poiché $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ la disequazione $2\sin 2x \geq 3\cos x$ equivale a $\cos x(4\sin x - 3) \geq 0$: in $[0, 2\pi]$ il fattore $\cos x$ è > 0 per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$, mentre il fattore $4\sin x - 3$ lo è quando $\sin x > \frac{3}{4}$, ovvero, posto $\theta := \arcsin\frac{3}{4} \sim 0{,}85$, quando $\theta < x < \pi - \theta$: ne segue che $A_2 = [\theta, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi - \theta, \frac{3\pi}{2}] \cup [\theta + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi] \cup [(\pi - \theta) + 2\pi, \frac{3\pi}{2} + 2\pi] \cup \cdots$ (unione numerabile degli intervalli compatti di tipo $[\theta + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ e $[(\pi - \theta) + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$). Essendo $\mathrm{arctg}\,(a_1) < \theta$, A è l'unione disgiunta dei punti isolati di A_1 e degli intervalli compatti di A_2. Ne risulta che A è un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = -\frac{\pi}{2}$ che però non è il minimo perché non sta in A; non è aperto (non è intorno dei punti di A_1) ne' chiuso (è inferiormente limitato ma non ha minimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_2 tranne gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_1; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $-\frac{\pi}{2}$ e $+\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_1); infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati (quelli di A_1), gli estremi degli intervalli di A_2, $-\frac{\pi}{2}$ e $+\infty$.

2. La successione $a_n = \frac{2+(\alpha+3)^n}{2n\alpha - e^{n\alpha}}$ è il rapporto tra le successioni $a'_n = 2 + (\alpha + 3)^n$ e $a''_n = 2n\alpha - e^{n\alpha}$. Nel seguito useremo il noto fatto che $\lim \frac{\beta^n}{n^a} = +\infty$ per ogni $\beta > 1$ e ogni $a \in \mathbb{R}$, facilmente verificabile col criterio del rapporto. • Per a'_n, se $\alpha + 3 > 1$ (ovvero $\alpha > -2$) il limite è $+\infty$ (come $(\alpha+3)^n$); se $\alpha + 3 = 1$ (ovvero $\alpha = -2$) vale $a'_n \equiv 3$; se $-1 < \alpha + 3 < 1$ (ovvero $-4 < \alpha < -2$) l'addendo esponenziale è infinitesimo e dunque a'_n tende a 2^+; se $\alpha + 3 = -1$ (ovvero $\alpha = -4$), a'_n oscilla tra i valori 1 e 3; e se $\alpha + 3 < -1$ (ovvero $\alpha < -4$), a'_n diverge a ∞ senza segno. • Per a''_n, se $\alpha > 0$ il limite è $-\infty$ (come $-e^{n\alpha} = (-e^{\alpha})^n$); se $\alpha = 0$ vale $a''_n \equiv -1$; e se $\alpha < 0$ l'addendo esponenziale è infinitesimo e dunque a'_n tende a $-\infty$ (come $2n\alpha = -(-2\alpha)n$). • Ricapitolando:

	$\alpha < -4$	$\alpha = -4$	$-4 < \alpha < -2$	$\alpha = -2$	$-2 < \alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
a'_n	$\infty\quad[(\alpha+3)^n]$	$1 \sim 3$	2^+	3	$+\infty\quad[(\alpha+3)^n]$	$+\infty\quad[3^n]$	$+\infty\quad[(\alpha+3)^n]$
a'_n	$-\infty\quad[2\alpha n]$	$-\infty\quad[2\alpha n]$	$-\infty\quad[2\alpha n]$	$-\infty\quad[2\alpha n]$	$-\infty\quad[2\alpha n]$	-1	$-\infty\quad[-(e^{\alpha})^n]$
a_n	∞	0^-	0^-	0^-	$-\infty$	$-\infty$	???

Nell'ultima riga sono già stati scritti i limiti di $a_n = a'_n/a''_n$ nel caso in cui siano determinati (ad esempio, per $-4 < \alpha < -2$ si ha $2^+/(-\infty) = 0^-$) oppure indeterminati ma risolvibili con la conoscenza del fatto che $\lim \frac{\beta^n}{n^a} = +\infty$ per ogni $\beta > 1$ e ogni $a \in \mathbb{R}$ (ad esempio, per $\alpha < -4$ l'infinito di $(\alpha + 3)^n$ al numeratore prevale su quello di $2\alpha n$ al denominatore). Resta il solo caso dubbio di $\alpha > 0$ in cui si confrontano due infiniti di tipo esponenziale: il punto è capire quale dei due abbia la base maggiore. Al numeratore si ha $-e^{\alpha n} = -(e^{\alpha})^n$, e al denominatore $(\alpha + 3)^n$, dunque la questione è: per quali $\alpha > 0$ si ha $e^{\alpha} \geq \alpha + 3$? Un confronto grafico mostra chiaramente l'esistenza di un $\alpha_0 \in]1, 2[$ tale che $e^{\alpha_0} = \alpha_0 + 3$ (vale $\alpha_0 \sim 1{,}50$), e per $\alpha > 0$ si ha $e^{\alpha} > \alpha + 3$ quando $\alpha > \alpha_0$: pertanto $\lim a_n$ vale $-\infty$ per $0 < \alpha < \alpha_0$, vale -1 per $\alpha = \alpha_0$ e vale 0^- per $\alpha > \alpha_0$. Lo specchietto finale è perciò il seguente:

	$\alpha < -4$	$-4 \leq \alpha \leq -2$	$-2 < \alpha < \alpha_0$	$\alpha = \alpha_0$	$\alpha > \alpha_0$
a_n	∞	0^-	$-\infty$	-1	0^-

3. (a) Per $\alpha = 1$ si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(4e^{-x}-3)(x^2-x)}{(\log|2x^2-1|+x-1)\sin x}$. • Vale $N(x) \sim_0 -x$ e $D(x) \sim_0 -\sin x \sim_0 -x$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{-x} = 1$. • Anche in $x \sim 1$ c'è forma indeterminata $0/0$: posto $t = x - 1 \sim 0$ (ovvero $x = 1 + t$) si ha $N(t) = (4e^{-1-t} - 3)(t + t^2) \sim_0 -(3 - \frac{4}{e})t$ e $D(t) = (\log|1 + 4t + 2t^2| + t)\sin(1 + t) = ((4t + o_0(t)) + t)\sin(1 + t) \sim (5\sin 1)t$, da cui $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-(3-\frac{4}{e})t}{(5\sin 1)t} = -\frac{3-\frac{4}{e}}{5\sin 1} \sim -0{,}4$. • Vale $N(x) \sim_{+\infty} -3x^2$ e $D(x) \sim_{+\infty} x\sin x$, così $f(x) \sim_{+\infty} \frac{-3x^2}{x\sin x} = -\frac{3x}{\sin x}$ che tende a ∞ senza segno (infatti se $x > 0$ si ha $|-\frac{3x}{\sin x}| = \frac{3x}{|\sin x|} \geq 3x \to +\infty$).

(b) Vediamo ora il caso generale $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{(4e^{-\alpha x}-3)(x^2-x)}{(\log|2x^2-\alpha|+x-1)\sin x}$. • In $x \sim 0$ si ha ancora $N(x) \sim_0 -x$ mentre per $D(x) \sim_0 (\log|2x^2 - \alpha| + x - 1)x$ serve più attenzione: se $\alpha = 0$ si ottiene $D(x) \sim_0 (\log|2x^2| + x - 1)x = (\log 2 + 2\log|x| + x - 1)x \sim_0 2x\log|x|$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{2x\log|x|} = 0^+$; se $\alpha = \mp e$ si ha $D(x) \sim_0 (\log|2x^2 \pm e| + x - 1)x = (\log(e \mp 2x^2) + x - 1)x = (\log(e(1 \mp \frac{2x^2}{e}) + x - 1)x = ((1 + \log(1 \mp \frac{2x^2}{e}) + x - 1))x = ((\mp\frac{2}{e}x^2 + o_0(x^2)) + x)x \sim_0 x^2$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{-x}{x^2} = \pm\infty$; e negli altri casi si ha $D(x) \sim_0 (\log|\alpha - 2x^2| + x - 1)x \sim_0 (\log|\alpha| - 1)x$, e dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{(\log|\alpha|-1)x} = \frac{1}{1-\log|\alpha|}$. • In $x \sim 1$, se $\alpha \neq 1,\ 3$ non siamo più in forma indeterminata perché $D(x)$ tende a $(\sin 1)\log|2 - \alpha| \in \mathbb{R}$ se $\alpha \neq 2$ oppure a $-\infty$ se $\alpha = 2$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Il caso $\alpha = 1$ è già stato trattato in precedenza; quanto al caso $\alpha = 3$, in modo simile si ottiene $N(t) = (4e^{-3-3t} - 3)(t + t^2) \sim_0 -(3 - \frac{4}{e^3})t$ e $D(t) = (\log(1 - 4t - 2t^2) + t)\sin(1 + t) = ((-4t + o_0(t)) + t)\sin(1 + t) \sim (-3\sin 1)t$, da cui $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-(3-\frac{4}{e^3})t}{(-3\sin 1)t} = \frac{3-\frac{4}{e^3}}{3\sin 1} \sim 1{,}1$. • Infine, per $x \sim +\infty$, rispetto al caso $\alpha = 1$ non cambia nulla se $\alpha \geq 0$, mentre se $\alpha < 0$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} 4x^2e^{-\alpha x}$ che tende a $+\infty$ in modo esponenziale; in entrambi i casi il limite di $f(x)$ resta ∞ senza segno.

4. (Figura 1) Il dominio di $f(x)=\frac{x^2}{e^{-x}-2|x|}$ è dato da $e^{-x}\neq 2|x|$, e un confronto grafico mostra chiaramente che deve essere $x\neq x_0$ per un certo $x_0\in]0,1[$ (vale $x_0\sim 0{,}35$) La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio tranne che in $x=0$ ove, a causa del modulo, è continua (con valore $f(0)=0$) ma ci potrebbe essere un punto angoloso. Non vi sono simmetrie, ne' periodi. L'unico zero è $x=0$; per il segno, si ha $f(x)>0$ quando $e^{-x}>2|x|$, il che accade (sempre dal confronto grafico) quando $x<x_0$ con $x\neq 0$. I limiti interessanti sono in $x_0^\mp$ e in $\pm\infty$; quelli determinati sono $\lim_{x\to x_0^\mp} f(x)=\pm\infty$; essendo poi $f(x)\sim_{+\infty}\frac{x^2}{-2|x|}=\frac{x^2}{-2x}=-\frac{1}{2}x$ e $f(x)\sim_{-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=x^2e^x$ si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (con probabile asintoto obliquo) e $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0^+$ (con tendenza rapida da sopra all'asintoto orizzontale $y=0$). Vediamo allora se c'è davvero l'asintoto obliquo a $+\infty$: come detto vale $f(x)\sim_{+\infty}-\frac{1}{2}x$, poi $f(x)-(-\frac{1}{2}x)=\frac{x^2}{e^{-x}-2x}+\frac{1}{2}x=\frac{2x^2+x(e^{-x}-2x)}{2(e^{-x}-2x)}\sim_{+\infty}\frac{xe^{-x}}{-4x}=-\frac{1}{4}e^{-x}$ tende a 0^-, pertanto l'asintoto obliquo a $+\infty$ è $y=-\frac{1}{2}x$ e il grafico di f vi tende da sotto. • Derivando (per ora con $x\neq 0$), posto $\sigma=\operatorname{sign}x$ e ricordando che $\sigma x=|x|$ si ha $f'(x)=\frac{2x(e^{-x}-2|x|)-x^2(-e^{-x}-2\sigma)}{(e^{-x}-2|x|)^2}=\frac{x((x+2)e^{-x}-2|x|)}{(e^{-x}-2|x|)^2}$. Si ha dunque $f'(x)=0$ quando $e^{-x}=\frac{2|x|}{x+2}$, e un confronto grafico tra l'esponenziale e $\frac{2|x|}{x+2}$ (funzione omografica con segno invertito per $x<0$, vedi nel riquadro della Figura 1) mostra che ciò accade in due punti $x_1\in]0,1[$ e $x_2\in]-2,-1[$ (vale $x_1\sim 0{,}7$ e $x_2\sim -1{,}3$). Inoltre si ha evidentemente $\lim_{x\to 0} f'(x)=0$, perciò f è estendibile a $x=0$ anche come funzione derivabile e si tratta allora di un punto stazionario (niente punto angoloso dunque, ma la cosa non è sorprendente visto che $f(x)\sim_0 x^2$). Quanto al segno, il fattore $(x+2)e^{-x}-2|x|$ è >0 per $x>-2$ quando $e^{-x}>\frac{2|x|}{x+2}$, oppure per $x<-2$ quando $e^{-x}<\frac{2|x|}{x+2}$; tenuto conto anche del fattore x, ne segue che $f'(x)>0$ quando $x<x_2$ oppure $0<x<x_0$ oppure $x_0<x<x_1$, così che $x=x_2$ e $x=x_1$ sono punti di massimo locale (con valori $f(x_1)\sim -0{,}5$ e $f(x_2)\sim 1{,}6$) e $x=0$ è punto di minimo locale (con valore $f(0)=0$). Infine, derivando ancora, con un po' di pazienza si trova $f''(x)=-\frac{(2\sigma x^3+(x^2+4x+2)e^{-x})e^{-x}}{(e^{-x}-2|x|)^3}$, e un confronto grafico tra e^{-x} e $-\sigma\frac{2x^3}{x^2+4x+2}$ (o, meglio, tra $2\sigma x^3e^x$ e $-x^2-4x-2$) mostra l'esistenza degli attesi punti di flesso, uno in $]-1,0[$ e l'altro in $]-2,-1[$.

(b) In 0 si ha $f(x)\sim_0 x^2$, poi $f(x)-x^2=\frac{x^2}{e^{-x}-2|x|}-x^2=x^2\frac{1-e^{-x}+2|x|}{e^x-2|x|}=\frac{1-(1-x+o_0(x))+2\sigma x}{e^{-x}-2|x|}x^2=\frac{(2\sigma+1)x+o_0(x)}{e^{-x}-2|x|}x^2\sim_0\frac{(2\sigma+1)x}{e^{-x}}x^2\sim_0(2\sigma+1)x^3$, dunque $f(x)=x^2+(2\sigma+1)x^3+o_0(x^3)$ (nel senso che $f(x)=x^2+3x^3+o_{0^+}(x^3)$ e $f(x)=x^2-x^3+o_{0^-}(x^3)$). • In -1 la funzione è finita e derivabile, dunque per Taylor vale $f(x)=f(-1)+f'(-1)(x+1)+o_{-1}(x+1)=\frac{1}{e-2}+\frac{1}{e-2}(x+1)+o_1(x+1)$. • A $+\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y=-\frac{1}{2}x$, e poi come visto $f(x)-(-\frac{1}{2}x)\sim_{-\infty}-\frac{1}{4}e^{-x}$: dunque $f(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}e^{-x}+o_{+\infty}(e^{-x})$ (nella scala potenze-esponenziali).

5. (a) Posto $x=t^2$ si ha $\int\frac{x+1}{x-4\sqrt{x}+3}\,dx=\int\frac{t^2+1}{t^2-4t+3}\,2t\,dt=2\int\frac{t^3+t}{t^2+t-2}\,dt=2\int\frac{(t+4)(t^2-4t+3)+14t-12}{t^2-4t+3}\,dt=2\int(t+4+4\frac{7t-6}{t^2-4t+3})\,dt=t^2+8t+4\int\frac{7t-6}{t^2-4t+3}\,dt=t^2+8t-2\int(\frac{1}{t-1}-\frac{15}{t-3})\,dt=t^2+8t-2(\log|t-1|-15\log|t-3|)+k=x+8\sqrt{x}-2(\log|\sqrt{x}-1|-15\log|\sqrt{x}-3|)+k$. • Usando la formula di integrazione per parti $\int F(x)g(x)\,dx=F(x)G(x)-\int f(x)G(x)\,dx$ (ove $F'=f$ e $G'=g$) con $F(x)=\log|x|$ e $g(x)=\frac{x}{(x^2-4)^2}$ (dunque $f(x)=\frac{1}{x}$ e $G(x)=-\frac{1}{2(x^2-4)}$) si ottiene $\int\frac{x\,\log|x|}{(x^2-4)^2}\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2-4)}-\int\frac{1}{x}(-\frac{1}{2(x^2-4)})\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2-4)}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(x^2-4)})\,dx$. D'altra parte si ha $\frac{1}{x(x^2-4)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2-4}=\frac{(a+b)x^2+cx-4a}{x(x^2-4)}$, da cui confrontando i coefficienti si ottiene $(a+b,c,-4a)=(0,0,1)$, ovvero $(a,b,c)=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},0)$, da cui $\frac{1}{x(x^2-4)}=\frac{1}{4}(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x})$: ne segue $\int\frac{x\,\log|x|}{(x^2-4)^2}\,dx=-\frac{\log|x|}{2(x^2-4)}+\frac{1}{8}\int(\frac{x}{x^2-4}-\frac{1}{x})+k=-\frac{\log|x|}{2(x^2-4)}+\frac{1}{8}(\frac{1}{2}\log|x^2-4|-\log|x|)+k=\frac{1}{16}(\log|x^2-4|-\frac{2x^2}{x^2-4}\log|x|)+k$.

(b) Come sappiamo, una condizione necessaria affinché abbia senso l'integrale di Riemann di una funzione su un intervallo compatto (quale è $[0,1]$) è che tale funzione sia limitata sull'intervallo stesso.[(2)] Questo non accade per $\varphi(x)=\frac{x+1}{x-4\sqrt{x}+3}$, per la quale $\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=+\infty$, dunque per essa l'integrale sull'intervallo $[0,1]$ non ha senso. Invece la funzione $\psi(x)=\frac{x\,\log|x|}{(x^2-4)^2}$ può essere estesa per continuità in $x=0$ col valore 0 (sappiamo infatti che $\lim_{x\to 0}x\log|x|=0$): dunque, essendo diventata continua, per essa l'integrale su $[0,1]$ ha senso (e sarà <0, essendo $\psi<0$ su $[0,1]$): considerata la sua primitiva $\Psi(x)=\frac{1}{16}(\log|x^2-4|-\frac{2x^2}{x^2-4}\log|x|)$ (anch'essa estesa in $x=0$ col valore del limite $\frac{1}{8}\log 2$) esso vale $\Psi(1)-\Psi(0)=(\frac{1}{16}\log 3)-(\frac{1}{8}\log 2)=-\frac{1}{16}\log\frac{4}{3}\sim -0{,}018$.

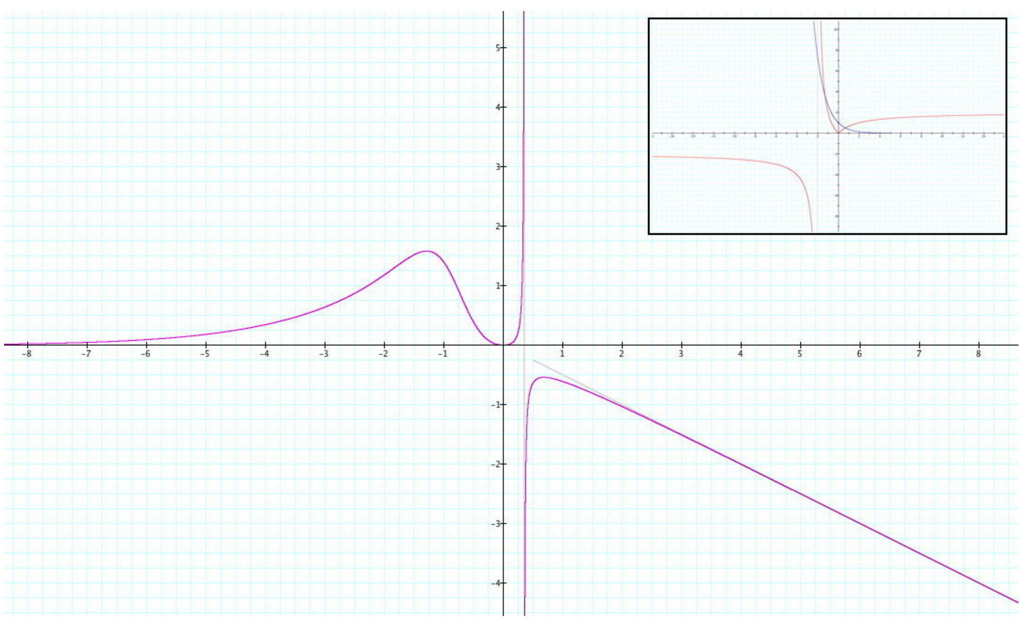
6. Per l'equazione differenziale $x^4y'=3y^2$, se $y\equiv k$ è soluzione costante si deve avere $0=3k^2$ per ogni x, il che si verifica solo per $k=0$: l'unica soluzione costante è dunque $y\equiv 0$. Se $\varphi(x)$ è una soluzione per $x>0$, posto $\psi(x):=-\varphi(-x)$ si ha $\psi'(x):=-(-\varphi'(-x))=\varphi'(-x)$ e perciò $x^4\psi'(x)=x^4(\varphi'(-x))=(-x)^4\varphi'(-x)=3(\varphi(-x))^2=3(\psi(x))^2$, il che mostra che $\psi(x)$ è anch'essa soluzione per $x<0$: in altre parole, la famiglia delle soluzioni è dispari. Se una soluzione è definita in $x=0$ si deve avere $0=3y(0)^2$, da cui $y(0)=0$; invece per $x\neq 0$ si può porre in forma normale $y'=f(x,y)=\frac{3y^2}{x^4}$, che ci dice che le soluzioni saranno crescenti per $x<0$ e per $x>0$. Derivando ambo i membri si ottiene poi $y''=\frac{6yy'(x^4)-3y^2(4x^3)}{x^8}=\frac{6y^2(3y-2x^3)}{x^8}$, dal che si nota che le soluzioni saranno convesse sopra la cubica $y=\frac{2}{3}x^3$ e concave sotto. Per il teorema di Cauchy, essendo $f(x,y)$ di classe $\mathcal{C}^1$ per ogni $x\neq 0$ e ogni $y\in\mathbb{R}$, si avrà che per ogni $c\neq 0$ la condizione $y(c)=1$

[(2)] Quanto detto riguarda l'integrale di Riemann studiato in Analisi I; invece in Analisi II si studieranno gli *integrali di Riemann generalizzati*, o *impropri*, in cui si cercherà di dare un senso all'integrale anche per funzioni non limitate.

individuerà localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$: separando le variabili si ottiene in effetti $y^{-2}\,dy = 3x^{-4}\,dx$, e integrando $-y^{-1} = -x^{-3} + k$, da cui $y = \frac{x^3}{1-kx^3}$; imponendo che $y(c) = 1$ si ha $1 = \frac{c^3}{1-kc^3}$, da cui $k = \frac{1-c^3}{c^3}$, ovvero $\varphi_c(x) = \frac{x^3}{1-\frac{1-c^3}{c^3}x^3} = \frac{c^3x^3}{c^3x^3-(x^3-c^3)}$. Infine, l'unica tra le soluzioni $\varphi_c(x)$ appena trovate che ha dominio $\mathbb{R}$ è $\varphi_1(x) = x^3$, che corrisponde a $k = 0$; tutte le altre hanno un asintoto verticale per $x = k^{-\frac{1}{3}} = \frac{c}{(1-c^3)^{\frac{1}{3}}}$. • L'equazione differenziale $3y'' + y = x^2 + \cos(\alpha x)$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $3z^2 + 1 = 0$ ha soluzioni $z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}i$, dunque le soluzioni dell'omogenea associata sono $A\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + B\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}x)$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. Una soluzione particolare per $b_1(x) = x^2$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax^2+bx+c$, e imponendo che sia soluzione si ha $3(2a)+(ax^2+bx+c) = x^2$ da cui $(a, b, c) = (1, 0, -6)$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = x^2-6$. Quanto a $b_2(x) = \cos(\alpha x)$, se $\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$, e imponendo che sia soluzione si ha $3(-a\alpha^2\cos(\alpha x) - b\alpha^2\sin(\alpha x)) + (a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)) = \cos(\alpha x)$, ovvero $(1-3\alpha^2)(a\cos(\alpha x)+b\sin(\alpha x)) = \cos(\alpha x)$, da cui $(a, b) = (\frac{1}{1-3\alpha^2}, 0)$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{1-3\alpha^2}\cos(\alpha x)$; se invece $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (caso risonante) una soluzione particolare sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = x(a\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + b\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}x))$, e imponendo che sia soluzione si trova $(a, b) = (0, \frac{1}{2\sqrt{3}})$, ovvero $\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}}x\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}x)$. Le soluzioni generali sono dunque

$$y(x) = \begin{cases} A\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + B\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + x^2 - 6 + \frac{1}{1-3\alpha^2}\cos(\alpha x) & (\text{se } \alpha \geq 0,\ \alpha \neq \frac{1}{\sqrt{3}}); \\ A\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + (B + \frac{1}{2\sqrt{3}}x)\sin(\frac{1}{\sqrt{3}}x) + x^2 - 6 & (\text{se } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}). \end{cases}$$

Notiamo infine che nessuna delle $\varphi_c(x)$ appare tra queste soluzioni, per alcun valore di α.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$.