

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (06/07/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : 2\cos(\frac{1}{x-2}) = 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 + \arctg x < 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone $\sup/\inf$ (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e $\max/\min$ in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = (\frac{4\alpha}{\alpha^2+3})^n - 3(n-1)^\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare $\lim_{0,1,+\infty} \frac{e^{\sin x} - x - \log^2 |1 - 2x| - 1}{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x} - 2}$ con tecniche locali (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).
4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \frac{x-3}{x-3\sqrt{|x-2|}}$, e tracciarne il grafico.
(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0, 2 e $+\infty$ con due termini significativi.
5. Spiegare perché ha senso l'integrale $\int_2^3 f(x) dx$ (ove f è quella dell'Ex. 4), e calcolarlo.
6. Determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, tutte le soluzioni reali $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + (1 - \alpha)y = 1 - e^{2x}$ tali che $y(0) = 0$. Stessa domanda per $y' + e^\alpha = y + e^x - e^{2x}$: si può dire a priori quante sono? Qualcuna appare tra le precedenti per qualche α ?

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

- Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 2\cos(\frac{1}{x-2}) = 1\}$ e $A_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x + 3 + \arctg x < 0\}$. L'equazione $2\cos(\frac{1}{x-2}) = 1$, definita per $x \neq 2$, equivale a $\cos(\frac{1}{x-2}) = \frac{1}{2}$, che dà $\frac{1}{x-2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pm 1 + 6k}{3}\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $x = x_k^\pm := 2 + \frac{3}{(6k \pm 1)\pi}$ con $k \in \mathbb{Z}$: si tratta di due successioni bilatere (ovvero con indice intero anziché solo naturale) di numeri positivi che convergono a 2 senza averlo tra i valori, con minimo $x_0^- = 2 - \frac{3}{\pi} \sim 1,05$ e massimo $x_0^+ = 2 + \frac{3}{\pi} \sim 2,95$. D'altra parte la disequazione $x^2 + 4x + 3 + \arctg x < 0$ equivale a $\arctg x < -x^2 - 4x - 3$, e un confronto grafico mostra chiaramente che le soluzioni sono un intervallo aperto negativo $]u, v[$ ove $u \sim -3,5$ e $v \sim -0,7$. Dunque A è l'unione disgiunta dei punti isolati di A_1 e dell'intervallo A_2 . Ne risulta che A è un insieme limitato, con $\inf A = u$ che però non è il minimo perché non sta in A , e $\max A = 2 + \frac{3}{\pi}$; non è aperto (non è intorno dei punti di A_1) ne' chiuso (è inferiormente limitato ma non ha minimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_2 ; i punti isolati sono quelli di A_1 ; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche u, v e 2; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_1); infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati (quelli di A_1), e anche u, v e 2.
- La successione $a_n = (\frac{4\alpha}{\alpha^2+3})^n - 3(n-1)^\alpha$ è la differenza tra la successione esponenziale $a'_n = (\frac{4\alpha}{\alpha^2+3})^n$ e la successione potenza $a''_n = 3(n-1)^\alpha$: converrà dunque iniziare esaminando separatamente il comportamento di a'_n e a''_n . • La funzione $g(\alpha) = \frac{4\alpha}{\alpha^2+3}$ è di facile studio: ha dominio $\mathbb{R}$, è dispari; per $\alpha > 0$ è positiva, cresce da $g(0) = 0$ fino al valore massimo $g(\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ e poi decresce tendendo a 0^+ per $x \rightarrow +\infty$; notiamo inoltre che $1 = g(1) = g(3)$, e che per $1 < x < 3$ si ha $g(\alpha) > 1$. Ne deduciamo che quando $|\alpha| < 1$ o quando $|\alpha| > 3$ la successione a'_n tende a 0; per $-3 < \alpha < -1$ tende a ∞ esponenzialmente (con segno oscillante); quando $\alpha = -3$ o $\alpha = -1$ oscilla tra i valori ∓ 1 ; quando $\alpha = 1$ o $\alpha = 3$ è la costante 1; e per $1 < \alpha < 3$ tende a $+\infty$ esponenzialmente. • La successione potenza a''_n per $\alpha < 0$ tende a 0^+ , quando $\alpha = 0$ è la costante 3, e per $\alpha > 0$ tende a $+\infty$ come una potenza. • Ricapitolando, e ricordando che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta^n}{n^a} = +\infty$ per ogni $\beta > 1$ e ogni $a \in \mathbb{R}$:
 - per $\alpha < -3$ oppure $-1 < \alpha < 0$ il limite è 0;
 - per $\alpha = -3$ oppure $\alpha = -1$ la successione non ha limite (le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari tendono rispettivamente a 1^+ e a -1^+);
 - per $-3 < \alpha < -1$ la successione tende a ∞ (in modo esponenziale, con segno oscillante);
 - per $\alpha = 0$ la successione è la costante -3 ;
 - per $0 < \alpha \leq 1$ oppure $\alpha \geq 3$ il limite è $-\infty$ (come una potenza);
 - per $1 < \alpha < 3$ la successione tende a $+\infty$ (in modo esponenziale).
- Poniamo $h(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{e^{\sin x - x - \log^2 |1-2x|-1}}{\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x}-2}$. • Il limite in $x \sim 0$ è in forma indeterminata $0/0$. Per $N(x)$ si ha $e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + o_0(x^2) = 1 + (x + o_0(x^2)) + \frac{1}{2}(x + o_0(x^2))^2 + o_0(x^2) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$ e $\log^2(1-2x) = ((-2x) - \frac{1}{2}(-2x)^2 + o_0(x^2))^2 = 4x^2 + o_0(x^2)$, da cui $N(x) = -\frac{7}{2}x^2 + o_0(x^2) \sim_0 -\frac{7}{2}x^2$; per $D(x)$ si ha $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x}-2 = 2\sqrt{1 + (\frac{1}{2}x)^2} + \sqrt{x}-2 = 2(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x)^2 + o_0(x^3)) + \sqrt{x}-2 = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^3) \sim_0 \sqrt{x}$; pertanto $h(x) \sim_0 \frac{-\frac{7}{2}x^2}{\sqrt{x}} = -\frac{7}{2}x^{\frac{3}{2}}$, da cui $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0^-$. • In $x \sim 1$, $N(x)$ e $D(x)$ tendono ai valori finiti $e^{\sin 1} - 2 \sim 0,32$ e $\sqrt{5} - 1 \sim 1,2$: dunque $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{e^{\sin 1} - 2}{\sqrt{5} - 1} \sim 0,26$. • Infine, per $x \sim +\infty$ vale $N(x) \sim_{+\infty} -x$ (notare che $e^{\sin x}$ è limitata tra $\frac{1}{e}$ e e) e $D(x) = x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{x} - 2 \sim_{+\infty} x$, dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x} = -1$.
- (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = \frac{x-3}{x-3\sqrt{|x-2|}}$ è dato da $x \neq 3\sqrt{|x-2|}$: risolviamo allora l'equazione $x = 3\sqrt{|x-2|}$, di cui poi escluderemo le soluzioni. Tale equazione, nell'ipotesi necessaria $x \geq 0$, equivale a $x^2 = 9|x-2|$: se $0 \leq x < 2$ essa dà $x^2 = 9(2-x)$ ovvero $x^2 + 9x - 18 = 0$ ovvero $x = \frac{-9 - \sqrt{153}}{2}$ (non accettabile perché negativa) oppure $x = a := \frac{\sqrt{153}-9}{2} \sim 1,7$ (accettabile), mentre se $x \geq 2$ essa dà $x^2 = 9(x-2)$ ovvero $x^2 - 9x + 18 = 0$ ovvero $x = 3$ e $x = 6$ (entrambe accettabili). Pertanto il dominio di f è dato da $\mathbb{R} \setminus \{a, 3, 6\}$. La funzione è di classe C^∞ in tutto il suo dominio tranne che in $x = 2$ ove, a causa della radice, è continua (con valore $f(2) = -\frac{1}{2}$) ma con un probabile punto a cuspidale verticale. Non vi sono simmetrie, ne' periodi. Non vi sono zeri (infatti $x = 3$ è fuori dal dominio). Per il segno, il numeratore è > 0 quando $x > 3$ mentre il denominatore lo è quando $x > 3\sqrt{|x-2|}$, e per questa disequazione si possono fare i conti come in precedenza per l'equazione oppure ricorrere a un confronto grafico (di cui con l'equazione abbiamo già determinato i punti interessanti) che dà $a < x < 3$ oppure $x > 6$: pertanto si ha $f(x) > 0$ quando $x < a$ oppure $x > 6$. I limiti interessanti sono nei punti esclusi dal dominio e in $\pm\infty$; quelli determinati sono $\lim_{x \rightarrow a^\mp} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 6^\mp} f(x) = \mp\infty$. Poiché inoltre in $\mp\infty$ sia numeratore che denominatore sono evidentemente asintotici a x si ha $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = 1$, ovvero $y = 1$ è asintoto orizzontale bilatero; notiamo poi che vale $f(x) = 1$ quando $\sqrt{|x-2|} = 1$ ovvero (nel dominio) per $x = 1$, dunque l'unica intersezione tra il grafico e l'asintoto è in $x = 1$, e visto lo studio del segno e la regolarità di f ne deduciamo che a $-\infty$ il grafico tende all'asintoto da sotto, e a $+\infty$ da sopra. Veniamo infine a $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, in forma $0/0$, che si può risolvere rapidamente con de

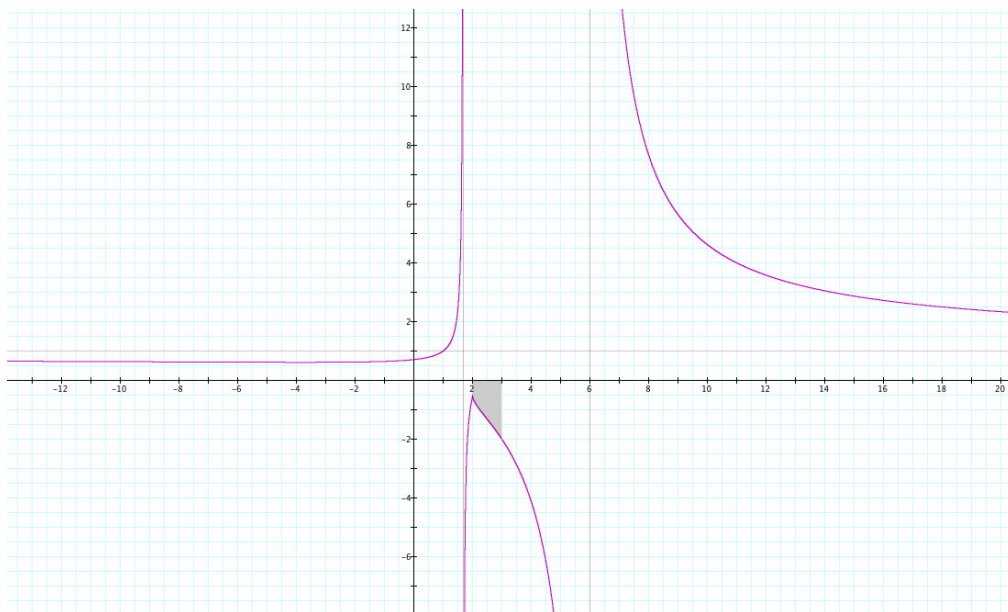
l'Hôpital dando -2 (in alternativa si può optare per un cambio di variabile $t = x - 3$ seguito da sviluppo asintotico, ovvero $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{3+t-3\sqrt{1+t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{3+t-3(1+\frac{1}{2}t+o_0(t))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\frac{1}{2}t+o_0(t)} = -2$): pertanto f può essere estesa per continuità in $x = 3$ col valore $f(3) := -2$. • Derivando nel dominio (con $x \neq 2$), posto $\sigma = \text{sign}(x - 2)$ e ricordando che $\sigma(x - 2) = |x - 2|$ si ha $f'(x) = \frac{1(x-3\sqrt{|x-2|})-(x-3)(1-\frac{3\sigma}{2\sqrt{|x-2|}})}{(x-3\sqrt{|x-2|})^2} = \frac{2\sqrt{|x-2|}(x-3\sqrt{|x-2|})-(x-3)(2\sqrt{|x-2|}-3\sigma)}{2\sqrt{|x-2|}(x-3\sqrt{|x-2|})^2} = \frac{-6|x-2|+3\sigma x+6\sqrt{|x-2|}-9\sigma}{2\sqrt{|x-2|}(x-3\sqrt{|x-2|})^2} = -\frac{3\sigma(x-1-2\sigma\sqrt{|x-2|})}{2\sqrt{|x-2|}(x-3\sqrt{|x-2|})^2}$ (notiamo subito che $\lim_{x \rightarrow 2^\mp} f'(x) = \pm\infty$, dunque in $x = 2$ si ha l'atteso punto cuspidale verticale). D'altra parte, quando $x > 2$ (dunque quando $\sigma = 1$) si ha $f'(x) \geq 0$ per $x - 1 - 2\sqrt{x - 2} < 0$, ovvero $2\sqrt{x - 2} > x - 1$, che per $x > 2$ equivale a $4(x - 2) > (x - 1)^2$ ovvero $x^2 - 6x + 9 \leq 0$, sempre falso (ricordare che $x = 3$ è fuori dal dominio): pertanto per $2 < x < 6$ e $x > 6$ la funzione è strettamente decrescente. Quando invece $x < 2$ (dunque quando $\sigma = -1$) si ha $f'(x) \geq 0$ quando $x - 1 + 2\sqrt{2 - x} \geq 0$, ovvero $2\sqrt{2 - x} \geq 1 - x$: se $1 - x < 0$ (cioè quando $1 < x < 2$) ciò è sempre vero, mentre se $1 - x \leq 0$ (cioè quando $x \leq 1$) equivale a $4(2 - x) \geq (1 - x)^2$ ovvero $x^2 + 2x - 7 \leq 0$, con soluzioni $-2\sqrt{2} - 1 \leq x \leq 1 (\leq 2\sqrt{2} - 1)$ (notiamo che $b := -2\sqrt{2} - 1 \sim -3,8$). Ne segue che per $x < 2$ la funzione cresce per $b < x < a$ oppure $a < x < 2$: così $x = b$ è di minimo relativo (con $f(b) \sim 0,6$). • Il calcolo della derivata seconda è pesante (una possibilità per semplificare i conti sarebbe di cambiare variabile ponendo $t = x - 2$ e derivando rispetto t), comunque per la convessità è naturale attendersi perlomeno tre flessi: uno per $x < b$, un altro tra per $a < x < 2$ e un altro per $2 < x < 6$.

(b) In $x = 0$ la funzione è C^∞ , dunque possiamo applicare Taylor ottenendo $f(x) = f(0) + f'(0)x + o_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{12\sqrt{2}}x + o_0(x)$. • Quando $x = 2$ il primo termine dello sviluppo è $f(2) = -\frac{1}{2}$, dopo di che $f(x) - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \frac{-\sqrt{|x-2|}+(x-2)}{x-3\sqrt{|x-2|}} \sim \frac{3}{2} \frac{-\sqrt{|x-2|}}{2} = -\frac{3}{4}|x-2|^{\frac{1}{2}}$: pertanto $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}|x-2|^{\frac{1}{2}} + o_2(|x-2|^{\frac{1}{2}})$. • Infine, quando $x \sim +\infty$ il primo termine dello sviluppo è la quota asintotica 1, dopo di che $f(x) - 1 = \frac{3\sqrt{x-2}-3}{x-3\sqrt{|x-2|}} \sim +\infty \frac{3\sqrt{x-2}}{x} \sim +\infty \frac{3\sqrt{x}}{x} = 3x^{-\frac{1}{2}}$: pertanto $x = 1 + 3x^{-\frac{1}{2}} + o_{+\infty}(x^{-\frac{1}{2}})$.

- Nell'intervallo chiuso $[2, 3]$ la funzione $f(x)$ dell'Ex. 4 è continua (ricordare che è stata estesa per continuità anche in $x = 3$), dunque l'integrale $\int_2^3 f(x) dx$ ha senso; e, visto il segno di f , dovrà avere valore negativo. Per il calcolo, tenendo presente che stiamo operando per $x \geq 2$, posto $x - 2 = t^2$ (dunque $dx = 2t dt$) si ha $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 \frac{x-3}{x-3\sqrt{x-2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{t(t^2-1)}{t^2-3t+2} dt = 2 \int_0^1 \frac{t(t+1)}{t-2} dt = 2 \int_0^1 (t+3+\frac{6}{t-2}) dt = (t^2+6t+12 \log |t-2|)|_0^1 = 7-12 \log 2 \sim -1,3$ (valore ragionevole, si veda la Figura 1).
- Cercando tutte le soluzioni reali $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + (1 - \alpha)y = 1 - e^{2x}$ tali che $y(0) = 0$, si nota che le radici caratteristiche sono $1 \mp \sqrt{\alpha}$, e che per il problema non omogeneo sono di interesse i casi in cui tali radici siano 0 (ovvero $\alpha = 1$, in cui 0 è radice caratteristica semplice) oppure 2 (ovvero sempre $\alpha = 1$, in cui 2 è radice caratteristica semplice): ne segue che conviene distinguere i seguenti casi.

- Se $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$ le soluzioni reali dell'equazione omogenea associata sono $Ae^{(1+\sqrt{\alpha})x} + Be^{(1-\sqrt{\alpha})x} = e^x(Ae^{x\sqrt{\alpha}} + Be^{-x\sqrt{\alpha}})$ con $A, B \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per 1 è la costante $\frac{1}{1-\alpha}$, una per $-e^{2x}$ è $\frac{1}{\alpha-1}e^{2x}$, dunque le soluzioni reali dell'equazione completa sono $y(x) = e^x(Ae^{x\sqrt{\alpha}} + Be^{-x\sqrt{\alpha}}) + \frac{1}{\alpha-1}(e^{2x} - 1)$ con $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = A + B = 0$ si ha $B = -A$, ovvero $y(x) = Ae^x(e^{x\sqrt{\alpha}} - e^{-x\sqrt{\alpha}}) + \frac{1}{\alpha-1}(e^{2x} - 1)$ con $A \in \mathbb{R}$.
- Se $\alpha = 1$ le soluzioni reali dell'equazione omogenea associata sono $y(x) = Ae^{2x} + B$ con $A, B \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per 1 è $-\frac{1}{2}x$, una per $-e^{2x}$ è $-\frac{1}{2}xe^{2x}$, dunque le soluzioni reali dell'equazione completa sono $Ae^{2x} + B - \frac{1}{2}x(e^{2x} + 1)$ con $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = A + B = 0$ si ha $B = -A$, ovvero $y(x) = A(e^{2x} - 1) - \frac{1}{2}x(e^{2x} + 1)$ con $A \in \mathbb{R}$.
- Se $\alpha = 0$ le soluzioni reali dell'equazione omogenea associata sono $e^x(A + Bx)$ con $A, B \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per 1 è la costante 1, una per $-e^{2x}$ è $-e^{2x}$, dunque le soluzioni reali dell'equazione completa sono $y(x) = e^x(A + Bx) + 1 - e^{2x}$ con $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = A = 0$ si ha $A = 0$, ovvero $y(x) = Axe^x + 1 - e^{2x}$ con $A \in \mathbb{R}$.
- Se $\alpha < 0$ le soluzioni reali dell'equazione omogenea associata sono $e^x(A \cos(x\sqrt{|\alpha|}) + B \sin(x\sqrt{|\alpha|}))$ con $A, B \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per 1 è $\frac{1}{1-\alpha}$, una per $-e^{2x}$ è $\frac{1}{\alpha-1}e^{2x}$, dunque le soluzioni reali dell'equazione completa sono $y(x) = e^x(A \cos(x\sqrt{|\alpha|}) + B \sin(x\sqrt{|\alpha|})) + \frac{1}{\alpha-1}(e^{2x} - 1)$ con $A, B \in \mathbb{R}$; e imponendo che $y(0) = A = 0$ si ha $A = 0$, ovvero $y(x) = Ae^x \sin(x\sqrt{|\alpha|}) + \frac{1}{\alpha-1}(e^{2x} - 1)$ con $A \in \mathbb{R}$.

• L'equazione $y' + e^\alpha = y + e^x - e^{2x}$ è lineare del primo ordine, con forma canonica $y' + p(x)y = q(x)$ ove $p(x) = -1$ e $q(x) = e^x - e^{2x} - e^\alpha$: da quanto visto sull'esistenza e unicità della soluzione di un problema di Cauchy nel caso lineare, già sappiamo che ci sarà un'unica soluzione reale con dominio $\mathbb{R}$ tale che $y(0) = 0$. In effetti, essendo $P(x) = \int p(x) dx = -x$ e $\int e^{P(x)} q(x) dx = \int e^{-x}(e^x - e^{2x} - e^\alpha) dx = x - e^x + e^\alpha x$ si ha che le soluzioni reali sono tutte e sole quelle del tipo $y(x) = e^x(x - e^x + e^\alpha x + k) = xe^x - e^{2x} + e^\alpha x + ke^x$ con $k \in \mathbb{R}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si ottiene $0 = -1 + e^\alpha + k$, ovvero $y(x) = (x + 1 - e^\alpha)e^x - e^{2x} + e^\alpha$ (è una di quelle dell'equazione del 2o ordine nel caso $\alpha = 0$).



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. Ex. 5: l'integrale richiesto (grigio)