Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (07/09/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 + \log|x+1|\} \cup \{2^n - \sqrt{n!} : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. (a) Determinare il dominio di $g(x) = 2 - 3e^{-\sin x}$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se g è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva.

(b) Calcolare $g^{-1}(]-1,2])$ e $g([0,3[)$.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{0,\pi,+\infty} \frac{2e^{\sin 2x} - \cos^2 3x - 1}{x(1+\cos x)}$ con tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità...).

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-1}{\log|x|}\right)$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare le parti principali di $f(x)$ in -1, 0, 1 e $+\infty$.

5. (a) Risolvere le equazioni $z^2 = |z|^2 - 2iz$ e $z^3 + 3i = (2-3i)z + 1$ nella variabile $z \in \mathbb{C}$, specificando se vi sono soluzioni comuni (si noti che una soluzione della seconda è $z = -1$).

(b) Data $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $h(z) = 2\overline{z}^6 - 3i$, calcolare in forma algebrica $h(1-i)$ e $h^{-1}(-16-3i)$.

6. (a) Data l'equazione differenziale $(2x-1)y'\sqrt{y+1} = x^2$ in $y(x)$, studiarne a priori soluzioni costanti e crescenza; e dire, sempre a priori, per quali $c \in \mathbb{R}$ la condizione $y(c) = 0$ individua localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$. Determinare poi $\varphi_0(x)$ (quella con $c = 0$).

(b) Calcolare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $3y'' + 2y' - y = 16\,xe^{-x}$ che per $x = 0$ si annullano e hanno un punto critico, determinando poi la natura di quest'ultimo.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (07/09/2015) – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \le 1 + \log|x+1|\}$ e $A_2 = \{2^n - \sqrt{n!} : n \in \mathbb{N}\}$. Un facile confronto grafico tra le funzioni $x^2 - 1$ (parabola) e $\log|x+1|$ (logaritmo simmetrico e traslato a sinistra di 1) mostra che A_1 è un intervallo compatto $[a, b]$ con $a \sim -0{,}5$ e $b \sim 1{,}4$. Quanto a A_2, la successione $a_n = 2^n - \sqrt{n!}$ tende a $-\infty$ (infatti $a_n = -\sqrt{n!}(1 - \frac{2^n}{\sqrt{n!}})$, e $b_n = \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$ tende a 0 perché $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}$ tende a 0) e i primi termini sono $a_1 = 1$ (compreso in A_1), poi i termini da $a_2 = 4 - \sqrt{2} \sim 2{,}6$ a $a_7 = 128 - 12\sqrt{35} \sim 57{,}0$ crescono e stanno sopra A_1, quindi iniziano a decrescere con $a_8 = 256 - 24\sqrt{70} \sim 55{,}2$, per poi decrescere più decisamente con $a_9 = 512 - 72\sqrt{70} \sim -90{,}4$ e così via. Dunque A è un insieme solo superiormente limitato, con $\sup A = \max A = a_7 = 128 - 12\sqrt{35}$; è chiuso in $\mathbb{R}$ (unione di due chiusi) ma ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di $]a, b[$; i punti isolati sono quelli di A_2 tranne $a_1 = 1$; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $-\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati; infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati, a, b e $-\infty$.

2. (a) (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 2 - 3e^{-\sin x}$ è tutto $\mathbb{R}$; la funzione è chiaramente periodica con periodo 2π. • Passiamo al calcolo della fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Da $g(x) = y$ ricaviamo $e^{-\sin x} = \frac{2-y}{3}$, il che richiede necessariamente che $y < 2$: ciò assicurato si deduce $\sin x = -\log(\frac{2-y}{3})$. Per procedere serve allora imporre anche che $|\log(\frac{2-y}{3})| \le 1$, ovvero $\frac{1}{e} \le \frac{2-y}{3} \le e$, ovvero $-(3e-2) \le y \le 2 - \frac{3}{e}$: con questa ulteriore ipotesi ricaviamo $x_{-,k}(y) = -\arcsin(\log(\frac{2-y}{3})) + 2k\pi$ oppure $x_{+,k}(y) = \pi + \arcsin(\log(\frac{2-y}{3})) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, una doppia famiglia discreta di punti; notiamo inoltre che negli estremi $y = -(3e-2)$ e $y = 2 - \frac{3}{e}$ le due famiglie coincidono rispettivamente in $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e in $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Pertanto, ricapitolando:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \varnothing & \text{per } y < -(3e-2) \text{ oppure } y > 2 - \frac{3}{e} \\ \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} & \text{per } y = -(3e-2) \\ \{x_{-,k}(y),\, x_{+,k}(y)\} & \text{per } -(3e-2) < y < 2 - \frac{3}{e} \\ \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\} & \text{per } y = 2 - \frac{3}{e}\,. \end{cases}$$

La funzione non è dunque né suriettiva (ci sono fibre vuote) né iniettiva (le fibre non vuote hanno infiniti punti); per renderla biiettiva basta corestringerla all'immagine $[-(3e-2),\, 2 - \frac{3}{e}]$ e, notato che $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x_{-,k}(y) \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x_{+,k}(y) \le \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ (tutti intervalli del dominio disgiunti tranne gli estremi in cui si sovrappongono due successive antiimmagini di y), restringerla ad esempio a $[-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}]$, con inversa $g^{-1}(y) = x_{-,0}(y) = -\arcsin(\log(\frac{2-y}{3}))$.

(b) Per il calcolo di $g^{-1}(]-1, 2])$ va risolta la disequazione $-1 < g(x) \le 2$, ovvero $-1 < 2 - 3e^{-\sin x} \le 2$, ovvero $0 \le e^{-\sin x} < 1$, che dà $-\sin x < 0$ ovvero $\sin x > 0$, ovvero $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$: pertanto l'antiimmagine $g^{-1}(]-1, 2])$ è l'unione infinita di intervalli aperti disgiunti $]2k\pi,\, \pi + 2k\pi[$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. • Per il calcolo di $g([0, 3[)$ (che, essendo g continua, sarà un intervallo) vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $0 \le x_{-,0}(y) < 3$ e $0 \le x_{+,0}(y) < 3$ (le altre disequazioni con $k \ne 0$ non possono avere soluzione, perché tali punti della fibra di y non possono cadere in $[0, 3[$). La prima dà $0 \le -\arcsin(\log(\frac{2-y}{3}))$ (< 3), ovvero $\arcsin(\log(\frac{2-y}{3})) < 0$, ovvero $-1 \le \log(\frac{2-y}{3})) < 0$, ovvero $-1 < y \le 2 - \frac{3}{e}$ (l'intervallo $]-1,\, 2 - \frac{3}{e}]$); la seconda dà $(0 \le)\, \pi + \arcsin(\log(\frac{2-y}{3})) < 3$, ovvero $\arcsin(\log(\frac{2-y}{3})) < 3 - \pi$, ovvero $-1 \le \log(\frac{2-y}{3}) < -\sin(\pi - 3)$, ovvero $2 - 3e^{-\sin(\pi-3)} < y \le 2 - \frac{3}{e}$ (l'intervallo $]2 - 3e^{-\sin(\pi-3)},\, 2 - \frac{3}{e}]$, contenuto nel precedente perché $2 - 3e^{-\sin(\pi-3)} > -1$). Ne segue che $g([0, 3[) =]-1,\, 2 - \frac{3}{e}] \cup]2 - 3e^{-\sin(\pi-3)},\, 2 - \frac{3}{e}] =]-1,\, 2 - \frac{3}{e}]$.

3. Si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{2e^{\sin 2x} - \cos^2 3x - 1}{x(1 + \cos x)}$. • In $x \sim 0$ il limite è in forma 0/0. Si ha $e^{\sin 2x} = 1 + \sin 2x + \frac{1}{2}\sin^2 2x + o_0(x^2) = 1 + (2x + o_0(x^2)) + \frac{1}{2}(4x^2 + o_0(x^2)) + o_0(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o_0(x^2)$ e $\cos^2 3x = (1 - \frac{1}{2}(3x)^2 + o_0(x^2))^2 = 1 - 9x^2 + o_0(x^2)$, perciò $N(x) = 2(1 + 2x + 2x^2 + o_0(x^2)) - (1 - 9x^2 + o_0(x^2)) - 1 = 4x + 13x^2 + o_0(x^2)) \sim_0 4x$; d'altra parte $D(x) \sim_0 2x$, dunque $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{2x} = 2$. • Anche in $x \sim \pi$ il limite è in forma 0/0: posto $t = x - \pi$ esso corrisponde a $\lim_{t\to 0} f(\pi + t) = \lim_{t\to 0} \frac{2e^{\sin 2t} - \cos^2 3t - 1}{(\pi + t)(1 - \cos t)}$, nel quale il numeratore è nella situazione precedente (ovvero $\sim_0 4t$) mentre stavolta il denominatore è $\sim_0 \pi \frac{1}{2} t^2$: dunque il limite vale $\lim_{t\to 0^\mp} \frac{4t}{\frac{\pi}{2} t^2} = \lim_{t\to 0^\mp} \frac{8/\pi}{t} = \mp\infty$. • In $+\infty$, notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ da un lato si ha $f(2n\pi) = 0$, mentre dall'altro $f(x)$ diverge all'intorno dei punti del tipo $\pi + 2n\pi$ (sono tutti nella stessa situazione di π vista poco fa): dunque il limite non esiste.

4. (a) (Figura 2) Il dominio di $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{x-1}{\log|x|})$ è dato da $x \ne -1, 0, 1$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio, ed è limitata a causa dell'arco-tangente (vale $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$); non vi sono simmetrie, ne' periodi. Essendo $x \ne 1$, non vi sono zeri; per il segno, si ha $x - 1 > 0$ per $x > 1$, $\log|x| > 0$ per $|x| > 1$, perciò $f(x) > 0$ quando $x > -1$ (con $x \ne 0$). Posto $\varphi(x) := \frac{x-1}{\log|x|}$, derivando nel dominio si ha $f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi^2(x)} = \frac{\log|x| - \frac{x-1}{x}}{(1 + \varphi^2(x)) \log^2|x|} = \frac{\log|x| - \frac{x-1}{x}}{(x-1)^2 + \log^2|x|}$, dunque vale $f'(x) \ge 0$ quando $\log|x| \ge \frac{x-1}{x}$, e un confronto grafico (un po' delicato per $x > 0$, in cui va notato che vale sempre $\log|x| > \frac{x-1}{x}$ tranne che per $x = 1$ in cui c'è l'uguaglianza) mostra che esiste un punto $x_0 \sim -3{,}6$ in cui $f'(x_0) = 0$ e tale che $f'(x) > 0$ per $x < x_0$ oppure per $x > 0$: pertanto $x = x_0$ è un punto di massimo locale, con $f(x_0) \sim 1{,}3$. Per i limiti interessanti si ha $\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -1^\mp} \varphi(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0^+$, $\lim_{x\to 1} \varphi(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$: pertanto $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}^-$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0^+$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}^-$. Ne deduciamo che $x = 0$ e $x = 1$ sono discontinuità eliminabili, pertanto f può essere estesa per continuità in tali

punti ponendo $f(0)=0$ e $f(1)=\frac{\pi}{4}$; quanto all'eventuale estensione per derivabilità, essendo $\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$ e $\lim_{x\to 1} f'(x)=\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)-\frac{t}{1+t}}{2\log^2(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{1}{2}t^2+o_0(t^2)-t(1-t+o_0(t))}{2t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{2t^2}=\frac{1}{4}$, la funzione estesa non è derivabile in $x=0$ (è a tangenza verticale) ed è almeno di classe $\mathcal{C}^1$ in $x=1$ con $f'(1)=\frac{1}{4}$. Per terminare, notiamo che in $x=-1$ la funzione fa un salto e dunque non è estendibile per continuità ma comunque $\lim_{x\to -1} f'(x)=-\frac{1}{2}$, pertanto sappiamo la pendenza in partenza e in arrivo in $x=-1$.

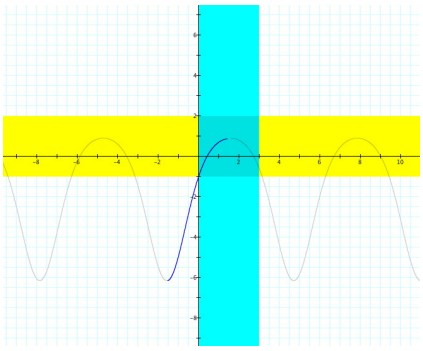
(b) In $x\sim -1^{\mp}$, 1, $+\infty$ le parti principali di $f(x)$ sono i limiti finiti $\mp\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$. • In $x\sim 0$ l'argomento $\varphi(x)=\frac{x-1}{\log|x|}$ è infinitesimo, dunque $f(x)\sim_0 \varphi(x)\sim_0 \frac{-1}{\log|x|}=-\log^{-1}|x|$ (nella scala dei logaritmi).

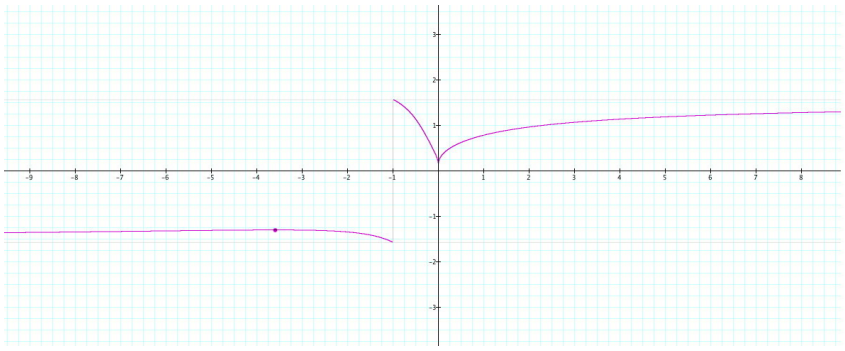
5. (a) Posto $z=x+iy$, l'equazione $z^2=|z|^2-2iz$ corrisponde a $x^2-y^2+2ixy=x^2+y^2-2i(x+iy)=(x^2+y^2+2y)-2ix$, ovvero alla coppia di equazioni reali $x^2-y^2=x^2+y^2+2y$ e $2xy=-2x$, ovvero $y(y+1)=0$ e $x(y+1)=0$: dalla prima ricaviamo $y=0$ (che nella prima dà $x=0$) oppure $y=-1$ (che soddisfa sempre la prima), pertanto le soluzioni sono $z=0$ e $z=\alpha-i$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ (retta orizzontale nel piano di Gauss dei numeri con parte immaginaria -1). • La seconda equazione $z^3+3i=(2-3i)z+1$ corrisponde a $z^3-(2-3i)z-1+3i=0$, algebrica e dunque con tre soluzioni complesse; essendo $z=-1$ soluzione si può dividere per $z+1$ ottenendo il quoziente $z^2-z-1+3i$, i cui zeri sono le altre due soluzioni cercate: $z=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5-12i})=\frac{1}{2}(1\pm(3-2i))$, ovvero $z=2-i$ oppure $z=-1+i$. Notiamo che l'unica soluzione in comune tra le due equazioni è $2-i$.

(b) Data $h:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ con $h(z)=2\overline{z}^6-3i$ si ha $h(1-i)=2(1+i)^6-3i$; essendo $1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ si ha $(1+i)^6=8\,e^{i6\frac{\pi}{4}}=-8i$, dunque $h(1-i)=2(1+i)^6-3i=2(-8i)-3i=-19i$. • Si ha poi $h^{-1}(-16-3i)=\{z: h(z)=2\overline{z}^6-3i=-16-3i\}$, ovvero le soluzioni di $\overline{z}^6=-8$, ovvero $z^6=-8$, le radici seste di $-8=8\,e^{i\pi}$ che sono $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$, e via via tutte le altre ottenute ruotando z_1 di successivi angoli di $\frac{\pi}{3}$, ovvero $z_2=\sqrt{2}\,i$, $z_3=\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}+i)$, $z_4=\sqrt{2}\,e^{i\frac{7\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3}-i)$, $z_5=-\sqrt{2}\,i$ e $z_6=\sqrt{2}\,e^{i\frac{11\pi}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i)$.

6. (a) L'equazione $(2x-1)y'\sqrt{y+1}=x^2$ è del primo ordine a variabili separabili. Se la costante $y\equiv k$ fosse soluzione si avrebbe $0=x^2$ per ogni x, chiaramente falso, dunque non vi sono soluzioni costanti; ponendo poi in forma normale $y'=\frac{x^2}{(2x-1)\sqrt{y+1}}$ si nota che $y'\geq 0$ per $x\geq\frac{1}{2}$, dunque le soluzioni $y(x)$ sono decrescenti per $x<\frac{1}{2}$ e crescenti per $x>\frac{1}{2}$; d'altra parte nessuna soluzione può essere definita in $x=\frac{1}{2}$ perché si avrebbe $0=\frac{1}{4}$, assurdo. Sempre la forma normale ci dice, tramite il teorema di Cauchy-Lipschitz, che per ogni $c\neq\frac{1}{2}$ la condizione $y(c)=0$ individua localmente una e una sola soluzione $\varphi_c(x)$. • Per la risoluzione, separando le variabili si ottiene $\sqrt{y+1}\,dy=\frac{x^2}{2x-1}\,dx$; essendo $\int\sqrt{y+1}\,dy=\int(y+1)^{\frac{1}{2}}\,dy=\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}+c$ e $\int\frac{x^2}{2x-1}\,dx=\int\frac{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})(2x-1)+\frac{1}{4}}{2x-1}=\int(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{2x-1})\,dx=\frac{1}{8}(2x^2+2x+\log|2x-1|)+c$, integrando si ottiene $\frac{2}{3}(y+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}(2x^2+2x+\log|2x-1|)+k$; imponendo la condizione $y(0)=0$ si ha poi $k=\frac{2}{3}$, e ricavando y si trova infine $y(x)=(\frac{6x^2+6x+3\log|2x-1|}{16}+1)^{\frac{2}{3}}-1$.

(b) L'equazione differenziale $3y''+2y'-y=16\,xe^{-x}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $3z^2+2z-1=0$ ha soluzioni $z_1=\frac{1}{3}$ e $z_2=-1$, dunque le soluzioni dell'omogenea associata sono $A\,e^{\frac{1}{3}x}+B\,e^{-x}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Una soluzione particolare per $b(x)=16\,xe^{-x}$ sarà del tipo $\tilde{y}(x)=(ax^2+bx)\,e^{-x}$ (si tratta di un caso risonante); essendo $\tilde{y}'(x)=(-ax^2+(2a-b)x+b)\,e^{-x}$ e $\tilde{y}''(x)=(ax^2-(4a-b)x+2a-2b)\,e^{-x}$, imponendo che sia soluzione si ha $(-8ax+6a-4b)\,e^{-x}=16\,xe^{-x}$, da cui $a=-2$ e $b=\frac{3}{2}a=-3$: dunque le soluzioni dell'equazione completa sono $y(x)=A\,e^{\frac{1}{3}x}-(2x^2+3x+B)\,e^{-x}$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Derivando si ottiene $y'(x)=\frac{1}{3}A\,e^{\frac{1}{3}x}+(2x^2-x+B-3)\,e^{-x}$, e imponendo $y(0)=y'(0)=0$ si trova $A-B=\frac{1}{3}A+B-3=0$, da cui $A=B=\frac{9}{4}$: pertanto di soluzioni che per $x=0$ si annullano e hanno un punto critico c'è solo $y(x)=\frac{9}{4}\,e^{\frac{1}{3}x}-(2x^2+3x+\frac{9}{4})\,e^{-x}$. • Per determinare la natura del punto critico $x=0$, a questo punto forse conviene considerare le derivate successive: da $y''(x)=\frac{1}{4}\,e^{\frac{1}{3}x}+(-2x^2+5x-\frac{1}{4})\,e^{-x}$ e $y'''(x)=\frac{1}{12}\,e^{\frac{1}{3}x}+(2x^2-9x+\frac{21}{4})\,e^{-x}$ si ha $y''(0)=0$ e $y'''(0)=\frac{16}{3}\neq 0$, il che dimostra che $x=0$ è un punto di flesso orizzontale.





1. Ex. 2: grafico di $g(x)$. **2.** Ex. 4: grafico di $f(x)$.