Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (15/09/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ______________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3, \sin 2x \leq 3\cos^2 x - \cos x\} \cup \{3 + e^{7n-n^2} : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Calcolare il limite per $n \to +\infty$ di $a_n = \left(\frac{\alpha}{2\alpha+1}\right)^n - \left(\frac{n}{2n+1}\right)^\alpha$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

3. Calcolare $\lim\limits_{0,+\infty,-\infty} \dfrac{x\,\log(2-\cos x)}{\sqrt[3]{e^x - x}\; - 1}$ con tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità...).

4. (a) Studiare l'andamento della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^2-3|}-1}{x+2}$, e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi asintotici di $f(x)$ in 0, -2 e $-\infty$ con due termini significativi.

5. Determinare le primitive di $\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ e di $\dfrac{\operatorname{arctg}(3x)}{x^2}$. Dire poi, per ciascuna di esse, su quali intervalli ha senso calcolare l'integrale di Riemann; infine, se ha senso, calcolarlo su $[0,1]$.

6. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $2\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 2 - 3e^{-t}\cos 3t$ e tutte quelle dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(x+1)$ nella legge oraria incognita $x(t)$. Specificare poi, tra le soluzioni trovate, quelle che all'istante iniziale si trovano in quiete nell'origine.

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I – Esame Scritto (15/09/2015) – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3,\ \sin 2x \leq 3\cos^2 x - \cos x\}$ e $A_2 = \{3 + e^{7n-n^2} : n \in \mathbb{N}\}$. Poiché $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ la disequazione $\sin 2x \leq 3\cos^2 x - \cos x$ equivale a $\cos x\,(2\sin x - 3\cos x + 1) \leq 0$, che (vista la limitazione richiesta in $]-1, 3[$) possiamo risolvere nel periodo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: lì si ha $\cos x \geq 0$ per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, mentre la disequazione lineare $2\sin x - 3\cos x + 1 \geq 0$, risolta con metodo grafico posto $Y = \sin x$ e $X = \cos x$ (le intersezioni della retta $Y = \frac{3}{2}X - \frac{1}{2}$ con la circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$ sono $(X, Y) = (\frac{4\sqrt{3}+3}{13}, \frac{6\sqrt{3}-2}{13})$ e $(X, Y) = (-\frac{4\sqrt{3}-3}{13}, -\frac{6\sqrt{3}+2}{13})$) dà le soluzioni $\alpha \leq x \leq \beta$ con $\alpha = \arcsin(\frac{6\sqrt{3}-2}{13}) \sim 0{,}7$ e $\beta = \pi + \arcsin(\frac{6\sqrt{3}+2}{13}) \sim 4{,}4$; pertanto, fatto il computo dei segni in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ la disequazione risulta soddisfatta per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \alpha$ e $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \beta$, e tenuta presente la limitazione in $]-1, 3[$ si ottiene infine $A_1 =]-1, \alpha] \cup [\frac{\pi}{2}, 3[$. Quanto a A_2, la successione $a_n = 7n - n^2$ tende a $-\infty$ ma inizia crescendo fino a a_4 (infatti la condizione $a_{n+1} \leq a_n$ equivale a $7(n+1) - (n+1)^2 \leq 7n - n^2$, che dà $n \geq 3$), dunque A_2 è una successione di punti tutti al di sopra di 3 (dunque al di sopra di A_1) con massimo $3 + e^{12}$ e tendente da sopra a 3. Ne risulta che A è un insieme limitato, con $\max A = 3 + e^{12}$ e $\inf A = -1$ che però non è il minimo perché non sta in A; non è aperto (non è intorno del suo punto α) ne' chiuso (è inferiormente limitato ma non ha minimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_1 tranne gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_2; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche -1 e 3; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_2); infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati (quelli di A_2) e gli estremi degli intervalli di A_1.

2. La successione a_n è la differenza tra le successioni $a'_n = (\frac{\alpha}{2\alpha+1})^n$ e $a''_n = (\frac{n}{2n+1})^\alpha$. Tra le due la più semplice è a''_n (potenza): poiché per $n \to +\infty$ la base $\frac{n}{2n+1}$ tende a $\frac{1}{2}$, a''_n tende al valore finito $(\frac{1}{2})^\alpha = 2^{-\alpha}$. Quanto a a'_n (esponenziale), l'andamento della base è come la funzione omografica $\phi(\alpha) = \frac{\alpha}{2\alpha+1}$, di facile studio: in particolare quello che interessa a noi è che $\phi(\alpha) < -1$ per $-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{3}$, $\phi(\alpha) = -1$ per $\alpha = -\frac{1}{3}$, $|\phi(\alpha)| < 1$ per $\alpha < -1$ oppure $\alpha > -\frac{1}{3}$, $\phi(\alpha) = 1$ per $\alpha = -1$ e $\phi(\alpha) > 1$ per $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$, il che ci porta a concludere come segue:

	$\alpha < -1$	$\alpha = -1$	$-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \alpha < -\frac{1}{3}$	$\alpha = -\frac{1}{3}$	$\alpha > -\frac{1}{3}$
a'_n	0	1	$+\infty$	∞	indet.	0
a''_n	$2^{-\alpha}$	2	$2^{-\alpha}$	$2^{-\alpha}$	$2^{\frac{1}{3}}$.	$2^{-\alpha}$
a_n	$-2^{-\alpha}$	-1	$+\infty$	∞	indet.	$-2^{-\alpha}$

3. Si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x\log(2-\cos x)}{\sqrt[3]{e^x - x}\ -1}$. • In $x \sim 0$ il limite è in forma 0/0. Si ha $\log(2 - \cos x) = \log(1 + t)$ con $t = 1 - \cos x$ infinitesimo, dunque $N(x) \sim_0 x(1 - \cos x) = x(\frac{1}{2}x^2) =\sim_0 \frac{1}{2}x^3$; d'altra parte $\sqrt[3]{e^x - x} - 1 = \sqrt[3]{1 + t} - 1$ con $t = e^x - x - 1$ infinitesimo, dunque $D(x) \sim_0 \frac{1}{3}(e^x - x - 1) = \frac{1}{3}(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) - x - 1) \sim_0 \frac{1}{6}x^2$, perciò $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^2} = 0$. • In $x \sim +\infty$ si ha $D(x) \sim_{+\infty} e^{\frac{x}{3}}$ (esponenziale), dunque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\log(2-\cos x)}{e^{\frac{x}{3}}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{3}}} \log(2 - \cos x) = 0$ (infinitesima per limitata dà infinitesima). • In $x \sim -\infty$ si ha $D(x) \sim_{+\infty} |x|^{\frac{1}{3}}$, dunque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\log(2-\cos x)}{|x|^{\frac{1}{3}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-|x|^{\frac{2}{3}} \log(2 - \cos x))$: stavolta si ha il prodotto tra la funzione infinita $-|x|^{\frac{2}{3}}$ e la funzione periodica $\log(2 - \cos x)$ che oscilla tra $\log 1 = 0$ e $\log 3 \sim 1{,}1$, dunque il limite non esiste (per $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(-2n\pi) = 0$ mentre $\lim_{n\to+\infty} f(\pi - 2n\pi) = \lim_{n\to+\infty}(-n^{\frac{2}{3}} \log 3) = -\infty$).

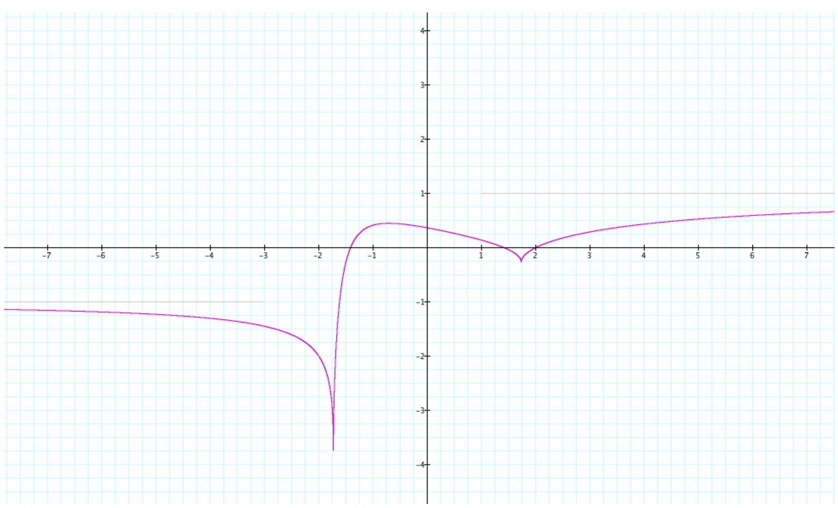
4. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-3|}-1}{x+2}$ è dato da $x \neq -2$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio tranne che in $x = \mp\sqrt{3}$ ove, a causa della radice, è continua (con valori $f(\mp\sqrt{3}) = -\frac{1}{2\mp\sqrt{3}}$) ma probabilmente a tangenza verticale (grafico con punto cuspidale). Non vi sono simmetrie, ne' periodi. Gli zeri sono dati da $\sqrt{|x^2 - 3|} = 1$, ovvero $|x^2 - 3| = 1$, che dà $x^2 - 3 = 1$ (dunque $x = 2$) oppure $x^2 - 3 = -1$ (dunque $x = \mp\sqrt{2}$). Per il segno, il numeratore è > 0 quando $|x^2 - 3| > 1$, ovvero per $x^2 - 3 > 1$ (cioè $x < -2$ o $x > 2$) oppure $x^2 - 3 < -1$ (cioè $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$), mentre il denominatore è > 0 per $x > -2$: ne segue che $f(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ oppure per $x > 2$. I limiti interessanti sono in $-2^\mp$ e in $\pm\infty$, entrambi in forma indeterminata, e valgono rispettivamente $\lim_{x\to-2} f(x) = -2$ e $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp 1$ come si può verificare subito con de l'Hôpital o, in alternativa, con gli sviluppi asintotici: per $x \sim -2$, posto $x = -2 + t$ (con $t \sim 0$) si ha $f(x) = \frac{\sqrt{t^2-4t+4-3}-1}{t} = \frac{\sqrt{1-4t+t^2}-1}{t} = \frac{\frac{1}{2}(-4t+t^2)-\frac{1}{8}(-4t+t^2)^2+o_0(t^2)}{t} = -2 - \frac{3}{2}t + o_0(t) = -2 - \frac{3}{2}(x+2) + o_{-2}(x+2)$ (il che dimostra anche che f è estendibile in $x = -2$ come funzione derivabile ponendo $f(-2) = -2$ e $f'(-2) = -\frac{3}{2}$), mentre per $x \sim \mp\infty$ si ha $f(x) = \frac{\mp\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{1}{1-(-\frac{2}{x})}(\mp\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x}) = (1 - \frac{2}{x} + o_{\mp\infty}(\frac{1}{x}))(\mp 1 - \frac{1}{x} + o_{\mp\infty}(\frac{1}{x}))$, che per $+\infty$ dà $1 - \frac{3}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$ mentre per $-\infty$ dà $-1 + \frac{1}{x} + o_{-\infty}(\frac{1}{x})$, il che evidenzia i due asintoti orizzontali $y = \pm 1$ a $\pm\infty$ (in entrambi i casi con tendenza da sotto). • Derivando (con $x \neq -2$ e $x \neq \mp\sqrt{3}$), posto $\sigma = \text{sign}\,(x^2 - 3)$ (dunque $\sigma = \pm 1$ a seconda che $|x| \gtrless \sqrt{3}$) si ha $f'(x) = \frac{\sigma\frac{x}{\sqrt{|x^2-3|}}(x+2)-(\sqrt{|x^2-3|}-1)}{(x+2)^2} = \frac{\sigma x(x+2)-|x^2-3|+\sqrt{|x^2-3|}}{(x+2)^2\sqrt{|x^2-3|}} = \frac{\sigma x(x+2)-\sigma(x^2-3)+\sqrt{|x^2-3|}}{(x+2)^2\sqrt{|x^2-3|}} = \frac{\sqrt{|x^2-3|}+\sigma(2x+3)}{(x+2)^2\sqrt{|x^2-3|}}$ (notiamo che $\lim_{x\to\mp\sqrt{3}} f'(x) = \infty$, dunque in effetti si tratta di punti a tangenza verticale come preventivato).

Vale dunque $f'(x)=0$ quando $\sqrt{|x^2-3|}=-\sigma(2x+3)$. Per $|x|>\sqrt{3}$ ciò equivale a $\sqrt{x^2-3}=-(2x+3)$, che nell'ipotesi necessaria $-(2x+3)\ge 0$ (ovvero $x\le -\frac{3}{2}$) equivale a $x^2-3=(2x+3)^2$, ovvero $3(x+2)^2=0$, impossibile (perché stiamo assumendo $x\ne -2$). Invece per $|x|<\sqrt{3}$ ciò equivale a $\sqrt{3-x^2}=2x+3$, che nell'ipotesi necessaria $2x+3\ge 0$ (ovvero $x\ge -\frac{3}{2}=-1{,}5$) equivale a $3-x^2=(2x+3)^2$, che dà $x=\frac{-6-\sqrt{6}}{5}\sim -1{,}7$ (non accettabile) oppure $x=x_0:=\frac{-6+\sqrt{6}}{5}\sim -0{,}7$ (accettabile). Procedendo poi similmente con lo studio del segno della derivata si verifica che $x=x_0$ è un punto di massimo locale.

(b) In $x=0$ la funzione è derivabile, dunque per Taylor vale $f(x)=f(0)+f'(0)x+o_0(x)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}-1}{4}x+o_0(x)$. • Gli sviluppi in $x\sim -2$ e $x\sim -\infty$ sono già stati calcolati nel punto (a).

5. Posto $1+2x=t^2$ (con l'ipotesi $x\ge -\frac{1}{2}$) si ha $x=\frac{1}{2}(t^2-1)$ e $dx=t\,dt$, da cui $\int\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\,dx=\int\frac{t-1}{\frac{1}{2}(t^2-1)}\,t\,dt=2\int\frac{t}{t+1}\,dt=2\int(1-\frac{1}{t+1})\,dt=2(t-\log|t+1|)+k$, e poi risostituire $t=\sqrt{1+2x}$. • Integrando per parti (con parte finita $\operatorname{arctg}(3x)$ e differenziale $\frac{1}{x^2}$) si ha $\int\frac{\operatorname{arctg}(3x)}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}(3x)+\int\frac{3}{x(9x^2+1)}\,dx=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}(3x)+3\int(\frac{1}{x}-\frac{9x}{9x^2+1})\,dx=-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}(3x)+3\log(\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}})+k$. • La funzione $\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ è definita e continua per $x\ge -\frac{1}{2}$ e $x\ne 0$, ma può essere estesa per continuità anche in $x=0$ col valore del limite 1. Ha pertanto senso calcolare l'integrale di Riemann su un qualsiasi intervallo $[a,b]$ con $-\frac{1}{2}\le a<b$: in particolare, usando il cambio di variabile usato prima, si ha $\int_0^1\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\,dx=[2(t-\log|t+1|)]_1^{\sqrt{3}}=2(\sqrt{3}-\log(\sqrt{3}+1))-2(1-\log 2)=2(\sqrt{3}-1-\log\frac{\sqrt{3}+1}{2})\sim 0{,}84$. • La funzione $\frac{\operatorname{arctg}(3x)}{x^2}$ è definita e continua per $x\ne 0$, ma in $x=0$ diverge: ha pertanto senso calcolare l'integrale di Riemann su un intervallo $[a,b]$ con $a<b<0$ oppure $0<a<b$, ma non su $[0,1]$.

6. L'equazione differenziale $2\ddot{x}+2\dot{x}+5x=2-3e^{-t}\cos 3t$ nella legge oraria incognita $x(t)$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $2z^2+2z+5=0$ ha soluzioni $z=\frac{-1\pm 3i}{2}$, dunque le soluzioni dell'omogenea associata sono $e^{-\frac{1}{2}t}(A\cos(\frac{3}{2}t)+B\sin(\frac{3}{2}t))$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Una soluzione particolare per $b_1\equiv 2$ è evidentemente la costante $\tilde{x}_1\equiv\frac{2}{5}$, mentre invece una per $b_2(t)=-3e^{-t}\cos 3t$ sarà del tipo $\tilde{x}_2(t)=e^{-t}(a\cos 3t+b\sin 3t)$: derivando si ha $\dot{\tilde{x}}_2(t)=e^{-t}((-a+3b)\cos 3t+(-3a-b)\sin 3t)$ e $\ddot{\tilde{x}}_2(t)=e^{-t}((-8a-6b)\cos 3t+(6a-8b)\sin 3t)$, dunque imponendo che sia soluzione si ha $2\ddot{\tilde{x}}_2+2\dot{\tilde{x}}_2+5\tilde{x}_2=e^{-t}((-13a-6b)\cos 3t+(6a-13b)\sin 3t)=-3e^{-t}\cos 3t$, da cui $(-13a-6b,6a-13b)=(-3,0)$ che dà $(a,b)=(-\frac{39}{205},-\frac{18}{205})$, ovvero $\tilde{x}_2(t)=-\frac{3}{205}e^{-t}(13\cos 3t+6\sin 3t)$. Le soluzioni dell'equazione completa sono pertanto $x(t)=e^{-\frac{1}{2}x}(A\cos(\frac{3}{2}x)+B\sin(\frac{3}{2}x))-\frac{3}{205}e^{-t}(13\cos 3t+6\sin 3t)$ al variare di $A,B\in\mathbb{C}$. Imponendo che $x(0)=0$ si ha $A-\frac{39}{205}=0$, ovvero $A=\frac{39}{205}$; derivando si ha poi $\dot{x}(t)=e^{-\frac{1}{2}t}((-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B)\cos(\frac{3}{2}t)+(-\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}B)\sin(\frac{3}{2}t))-\frac{3}{41}e^{-t}(\cos 3t-9\sin 3t)$, e imponendo che $\dot{x}(0)=0$ si ha $-\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}B-\frac{3}{41}=0$, da cui $B=\frac{2}{3}(\frac{1}{2}A+\frac{3}{41})=\frac{23}{205}$, e si trova così $x(t)=\frac{1}{205}\big(e^{-\frac{1}{2}t}(39\cos(\frac{3}{2}t)+23\sin(\frac{3}{2}t))-3e^{-t}(13\cos 3t+6\sin 3t)\big)$. • L'equazione differenziale $\dot{x}=2t(x+1)$ è lineare del primo ordine; nella forma canonica appare come $\dot{x}+p(t)\,x=q(t)$ con $p(t)=-2t$ e $q(t)=2t$. Una primitiva di $p(t)$ è $P(t)=-t^2$, e una di $e^{P(t)}q(t)=2te^{-t^2}$ è $-e^{-t^2}$: dunque le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $x(t)=e^{t^2}(-e^{-t^2}+k)=k\,e^{t^2}-1$ al variare di $k\in\mathbb{C}$ (tra esse anche la costante -1, ottenuta per $k=0$). Imponendo che $x(0)=0$ si ottiene $k-1=0$, ovvero $k=1$, da cui l'unica soluzione $x(t)=e^{t^2}-1$; notiamo anche che $\dot{x}(t)=2t\,e^{t^2}$, pertanto per puro caso la soluzione trovata rispetta anche la condizione di quiete $\dot{x}(0)=0$ richiesta nell'esercizio.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$.