

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Prove d'esame scritto - A. A. 2013/14

TESTI

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (04/02/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2013/14

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x > 0 : 3 \cos^2 x \leq 1 + \sin x\} \cup \{2^{-n} \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone $\sup/\inf$ (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e $\max/\min$ in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = (2n - 1)^\alpha - (2\alpha - 1)^n$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. (a) Calcolare i limiti $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x \log x - (x - 1)(e^x - 1)^\alpha}{x^\alpha (e^x - e)}$ per $\alpha = 1$, usando tecniche di analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...) .
(b) Discutere i precedenti limiti al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, sempre con tecniche di analisi locale.
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{|x| - 1}{e^x - 2} \right)$, e tracciarne il grafico.⁽²⁾
(b) Determinare le parti principali di $f(x)$ in 0^+ , 1 e $+\infty$.
5. È data la funzione $f(z) = \frac{z^2}{2z - 3}$ di variabile complessa z (ovvero $f : \mathbb{C} \setminus \{\frac{3}{2}\} \rightarrow \mathbb{C}$).
(a) Risolvere le equazioni $z f(z) + 1 = 0$ e $f(z) = \bar{z}$.
(b) La funzione è iniettiva? Suriettiva? Trovare immagine e antiimmagine dell'asse immaginario.
6. Si consideri l'equazione differenziale $(x + 1)yy' = x(1 - y^2)$.
(a) Fare l'analisi a priori su eventuali soluzioni costanti, crescita, eventuali simmetrie. Determinare poi tutte le soluzioni, in particolare quelle tali che $y(0) = 1$, oppure $y(0) = -2$.
(b) Spiegare cosa si può dire a priori su esistenza e unicità locale delle soluzioni. Quindi, dopo aver trovato tutte le soluzioni, dire se ve ne sono con dominio tutto $\mathbb{R}$.

⁽¹⁾ $\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1 + x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

⁽²⁾Non è richiesto lo studio della convessità. Per lo studio della crescita potrebbero essere utili dei confronti grafici.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (17/02/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2013/14

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+2|} \geq 2(x-1), 5e^x \geq 1\} \cup \{(1 + \frac{1}{2n})^{3n} - \frac{n}{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. (a) Data $g(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ calcolarne il dominio e le fibre $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$, e usare quanto trovato per dire qual è l'immagine di g ; se ha estremi assoluti; se è iniettiva, suriettiva e come si possono modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva, esibendone l'inversa.
(b) Calcolare l'antiimmagine $g^{-1}([\frac{1}{4}, 4])$ e l'immagine $g([\frac{5}{4}, +\infty[)$.
3. Calcolare $\lim_{-\infty, 0, +\infty} \frac{2 \sin x - x(1 + \cosh x)}{x(e^x - 1)}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = x + \log |e^x - 2|$, e tracciarne il grafico.
(b) Determinare gli sviluppi di $f(x)$ in $-\infty, 0$ e $+\infty$ con due termini significativi.
5. (a) Calcolare gli integrali $\int_0^1 \left(x + \frac{4}{2 - e^{-x}}\right) e^{2x} dx$ e $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 + 2 \sin 2x} dx$.
(b) Data la funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = 1 + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1})$ (se $x \neq 1$) e $h(1) = 2$, dire se ha senso considerare la funzione integrale di h di punto iniziale 0, e calcolarla.
6. (a) Calcolare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + \alpha^2 y = x - 2 \cos x$ al variare di $\alpha \geq 0$.
(b) Se $\alpha = 1$, quali sono le soluzioni reali che in $x = 0$ valgono -1 e assumono un massimo locale?

□

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (07/07/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2013/14

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \pi, \sin x + 3 \cos x > 1\} \cup \{\log n - n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = \frac{2^{\alpha n} - 2\alpha n}{(n!)^{\alpha-1} - 2n}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare $\lim_{-\infty, 0, +\infty} \frac{x + \sin x + \sqrt{|1-2x|} - e^x}{x \arctg x}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \sqrt{|x^2 + x - e^{-x}|} - 1$, e tracciarne il grafico.
(b) Determinare le parti principali di $f(x)$ in $-\infty$, 0 e $+\infty$.
5. È data l'equazione $2z^3 - z^2 + z + \alpha = 0$, ove $\alpha \in \mathbb{C}$.
(a) Dire quante sono in generale le soluzioni $z \in \mathbb{C}$. Posto poi $\alpha = 1$, scriverle sia in forma algebrica che trigonometrica, sapendo che una di esse è $-\frac{1}{2}$.
(b) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, numero e segno delle soluzioni reali, e quante stanno in $[-1, 2]$.
6. (a) Data l'equazione differenziale $(x-1)y' = (y-1)x$ fare l'analisi a priori su eventuali soluzioni costanti, crescita, convessità, eventuali simmetrie. Determinare poi tutte le soluzioni $y(x)$, in particolare quelle tali che $y(0) = 1$, oppure $y(0) = 0$.
(b) Trovare le soluzioni di $y'' - 2y' + y = 1$, precisando quali sono in comune con quelle di (a).

□

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (08/09/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2013/14

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3, 2 \sin 2x \leq 3 \cos x\} \cup \{4(e^{-n} - 1) : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone $\sup/\inf$ (in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$) e $\max/\min$ in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. (a) Data $g(x) = 1 - e^{-2\sqrt{x}}$ calcolarne il dominio e le fibre $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$, e usare quanto trovato per dire qual è l'immagine di g ; se ha estremi assoluti; se è iniettiva, suriettiva e come si possono modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva, esibendone l'inversa.
(b) Calcolare immagine e antiimmagine dell'intervallo $[0, 2[$ tramite g .
3. Calcolare $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{x \log^2 x - (x-1)^2}{(x^2-1) \operatorname{arctg} x}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x+1}$, e tracciarne il grafico.
(b) Trovare gli sviluppi asintotici al II ordine (o almeno le parti principali) di $f(x)$ in $-\infty, 0, +\infty$.
5. Calcolare $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}} dx$ e $I_a := \int_0^{a>0} \frac{dx}{x^3+1}$, dicendo quanto vale e che significa $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a$.
6. Una pallina metallica di massa 1 Kg può scorrere su e giù in uno stretto tubo verticale contenente dell'olio; oltre che all'attrito viscoso (coefficiente $2 \frac{\text{N}\cdot\text{sec}}{\text{m}}$) e alla gravità (accelerazione $g \sim 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$) essa è soggetta anche a una forza elastica lineare di richiamo di coefficiente $2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e lunghezza a riposo nulla, e a una forzante dipendente sinusoidalmente dal tempo, del tipo $A \sin t$ con $A > 0$ costante (dimensione fisica N). Si determini la dinamica $z(t)$ della pallina rispetto a un sistema di coordinate ascisse z verticale ascendente con l'origine posta nel polo della forza elastica, sapendo che all'istante iniziale la pallina si trova in quiete nell'origine; e dire per quale valore di A la pallina asintoticamente oscilla con quota massima $z = 0$.

□

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Esame Scritto (16/09/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2013/14

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + \sqrt{|x+1|} < 3\} \cup \{2n - 2^n : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone $\sup/\inf$ (in $\mathbb{R}$ e $\widehat{\mathbb{R}}$) e $\max/\min$ in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widehat{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = (n!)^{\alpha-2} - n^\alpha \alpha^{n-1}$ per $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati appresi per le successioni (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare $\lim_{0^+, 1, +\infty} \frac{e^{\sin \pi x} - \pi x \sqrt{|1-x|} - 1}{(x-1)\sqrt{x}}$ con l'analisi locale (trascurabilità, asintoticità, sviluppi...).
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \frac{x \log |x| - 1}{x-2}$, e tracciarne il grafico.
(b) Trovare gli sviluppi asintotici al II ordine (o almeno le parti principali) di $f(x)$ in 0^+ , 1 , $+\infty$.
5. È data la funzione $h(z) = (1+i)\bar{z}^2$ di variabile complessa z , ovvero $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
(a) Risolvere $h(z) = i - 7$ e $h(z) = z$ (ovvero, calcolare la fibra di h su $i - 7$ e i punti fissi di h).
(b) h è iniettiva? Suriettiva? Trovare immagine e antiimmagine di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{U} = \{z : |z| = 1\}$.
6. Data l'equazione differenziale $x^2 y' = (2y - 1)^3 \log x$ fare l'analisi a priori su eventuali soluzioni costanti, crescita, eventuali simmetrie. Determinare poi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y(1) = \alpha$.

□

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

Prove d'esame scritto - A. A. 2013/14

RISOLUZIONI

- (Figura 1) Si ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x > 0 : 3 \cos^2 x \leq 1 + \sin x\}$ e $A_2 = \{2^{-n} \cos(n\pi) : n \in \mathbb{N}\}$. La disequazione $3 \cos^2 x \leq 1 + \sin x$ equivale a $3 \sin^2 x + \sin x - 2 \geq 0$. Posto $t = \sin x$, la disequazione $3t^2 + t - 2 \geq 0$ è soddisfatta per $t \leq -1$ oppure $t \geq \frac{2}{3}$: tenuto presente che è richiesto che $x > 0$, si ha così $\sin x \leq 1$, soddisfatta nei soli punti $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$, oppure $\sin x \geq \frac{2}{3}$, che posto $\theta = \arcsin \frac{2}{3} \sim 0,73$ è soddisfatta per $\theta + 2k\pi \leq x \leq \pi - \theta + 2k\pi$, sempre per $k = 0, 1, 2, \dots$. Pertanto A_1 è l'unione numerabile degli intervalli compatti $[\theta + 2k\pi, \pi - \theta + 2k\pi]$ e dei punti isolati $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, ove $k = 0, 1, 2, \dots$. Si ha poi $A_2 = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\}$, una famiglia numerabile di punti isolati compresa tra il minimo $-\frac{1}{2}$ e il massimo $\frac{1}{4}$ che converge a 0 oscillandovi attorno a sinistra e a destra a seconda della parità di n : e, poiché $\frac{1}{4} < \theta$, nessun punto di A_2 appartiene ad A_1 (in altre parole, A è l'unione disgiunta di A_1 e A_2). Dunque A è un insieme solo inferiormente limitato, con $\inf A = \min A = -\frac{1}{2}$ (sono evidentemente soddisfatte le proprietà caratteristiche); non è aperto (non è intorno del suo punto $\frac{3\pi}{2}$) ne' chiuso (non contiene il punto di accumulazione 0), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli degli intervalli di A_1 tranne gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_2 , e quelli del tipo $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche 0 e $+\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati; infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati, gli estremi degli intervalli di A_1 e anche $+\infty$.
- La successione $a_n = (2n-1)^\alpha - (2\alpha-1)^n$ è la differenza tra la successione di potenze $a'_n = (2n-1)^\alpha$ e la successione di esponenziali $a''_n = (2\alpha-1)^n$. La successione a'_n cambia carattere a seconda che $\alpha \gtrless 0$ (infatti $a'_n = n^\alpha(2 - \frac{1}{n})^\alpha$, col secondo fattore che tende a 2^α , dunque conta solo il segno dell'esponente di n^α). Invece a''_n cambia carattere a seconda che la base $f(\alpha) := 2\alpha - 1$ sia in modulo $\gtrless 1$: si ha $|f(\alpha)| \leq 1$ se e solo se $0 \leq \alpha \leq 1$, $f(\alpha) < -1$ per $\alpha < 0$ e $f(\alpha) > 1$ per $\alpha > 1$. Ricordiamo anche che, in caso di forma indeterminata, tra potenza e esponenziale prevale quest'ultimo, nel senso che se $u > 0$ e $b > 0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^u}{b^n} = 0$ (si vede facilmente col criterio del rapporto, perché $\frac{(n+1)^u}{b^{n+1}} \frac{b^n}{n^u} = (\frac{n+1}{n})^u \frac{1}{b}$ tende a $\frac{1}{b} < 1$). Possiamo allora distinguere i seguenti casi.
 - Se $\alpha < 0$ si ha $a'_n \rightarrow 0^+$, mentre essendo $f(\alpha) < -1$ si ha che a''_n è indeterminata (diverge a ∞ , nel senso che $|a''_n|$ tende a $+\infty$): perciò anche a_n sarà indeterminata (diverge a ∞).
 - Se $\alpha = 0$ si ha $a'_n \equiv 1$, mentre $a''_n = (-1)^n$ oscilla tra -1 e 1 : dunque a_n è indeterminata (oscilla tra 0 e 2).
 - Se $0 < \alpha < 1$ si ha $a'_n \rightarrow +\infty$, ed essendo $|f(\alpha)| < 1$ si ha $a''_n \rightarrow 0^+$: dunque $a_n \rightarrow +\infty$.
 - Se $\alpha = 1$ si ha $a'_n \rightarrow +\infty$, mentre $a''_n \equiv 1$: dunque ancora $a_n \rightarrow +\infty$.
 - Infine, se $\alpha > 1$ si ha $a'_n \rightarrow +\infty$, ed essendo $f(\alpha) > 1$ si ha che anche $a''_n \rightarrow +\infty$: tuttavia, poiché come detto sopra prevarrà quest'ultima, si avrà $a_n \rightarrow -\infty$.
- (a) Per $\alpha = 1$ si ha $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x \log x - (x-1)(e^x-1)}{x(e^x-e)}$. • In $x \sim 0^+$ si ha $(x-1)(e^x-1) \sim -x = o_0+(x \log x)$, da cui $N(x) \sim_{0^+} x \log x$, mentre $D(x) \sim_{0^+} (1-e)x$: pertanto $f(x) \sim_{0^+} \frac{x \log x}{(1-e)x} = \frac{\log x}{1-e}$, da cui $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. • In $x \sim 1$, posto $x = 1+t$ con $t \sim 0$ si ha $N(t) = (1+t) \log(1+t) - t(e^{1+t}-1) = (1+t)(t + o_0(t)) - t(e-1 + o_0(1)) \sim t - (e-1)t = (2-e)t$, mentre $D(t) = (1+t)(e^{1+t}-e) = e(1+t)(e^t-1) \sim et$; pertanto $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2-e)t}{et} = \frac{2}{e} - 1 < 0$. • In $x \sim +\infty$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} -xe^x$ e $D(x) \sim_{+\infty} xe^x$, perciò $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-xe^x}{xe^x} = -1$.
 (b) Discutiamo ora i limiti per $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x \log x - (x-1)(e^x-1)^\alpha}{x^\alpha(e^x-e)}$ con $\alpha \neq 1$. • In $x \sim 0^+$ si ha $(x-1)(e^x-1)^\alpha \sim -x^\alpha$, che per $\alpha > 1$ è $o_0+(x \log x)$ mentre per $\alpha < 1$ vale il viceversa. D'altra parte vale $D(x) \sim_{0^+} (1-e)x^\alpha$, pertanto se $\alpha > 1$ si ha $f(x) \sim_{0^+} \frac{x \log x}{(1-e)x^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha} \log x}{1-e}$, da cui $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; mentre se $\alpha < 1$ si ha $f(x) \sim_{0^+} \frac{-(-x^\alpha)}{(1-e)x^\alpha} = \frac{1}{1-e}$, pertanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{1-e} < 0$. • In $x \sim 1$, posto ancora $x = 1+t$, se $\alpha \neq 0$ procedendo come sopra si ha $N(t) \sim_0 t - (e-1)^\alpha t = (1 - (e-1)^\alpha)t$, mentre se $\alpha = 0$ si ha $N(t) = (1+t) \log(1+t) - t = (1+t)(t - \frac{1}{2}t^2 + o_0(t^2)) - t \sim_0 \frac{1}{2}t^2$; d'altra parte vale sempre $D(t) \sim_0 et$, dunque se $\alpha \neq 0$ si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-(e-1)^\alpha)t}{et} = \frac{1-(e-1)^\alpha}{e}$, mentre se $\alpha = 0$ si ha $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}t^2}{et} = 0$. • Infine, in $x \sim +\infty$, se $\alpha > 0$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} -xe^{\alpha x}$ mentre se $\alpha \leq 0$ si ha $N(x) \sim_{+\infty} x \log x$; d'altra parte $D(x) \sim_{+\infty} x^\alpha e^x$, dunque se $\alpha > 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-xe^{\alpha x}}{x^\alpha e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^{1-\alpha} e^{(\alpha-1)x})$, che vale 0^- se $0 < \alpha < 1$ e vale $-\infty$ se $\alpha > 1$; se invece $\alpha \leq 0$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \log x}{x^\alpha e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{1-\alpha} e^{-x} \log x) = 0^+$.
- (a) (Figura 2) Il dominio di $f(x) = \arctg(\frac{|x|-1}{e^x-2})$ è dato da $e^x \neq 2$, ovvero $x \neq \log 2 \sim 0,7$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio tranne che in $x = 0$ ove, a causa del modulo, è atteso un punto angoloso. Non vi sono simmetrie, ne' periodi; inoltre, essendo l'arco-tangente l'ultima funzione ad agire, possiamo dire che $f(x)$ sarà limitata (strettamente) tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. Gli zeri si hanno quando $|x| - 1 = 0$, ovvero per $x = \pm 1$. Per il segno si ha $f(x) > 0$ se e solo se $\varphi(x) := \frac{|x|-1}{e^x-2} > 0$: il numeratore è > 0 per $x < -1$ oppure $x > 1$, il denominatore lo è per $x > \log 2$, pertanto si ha $f(x) > 0$ per $-1 < x < \log 2$ oppure $x > 1$. Per i limiti, notiamo che $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\log 2)^{\mp}} \varphi(x) = \pm\infty$ (forme determinate) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0^+$ (forma indeterminata, che si risolve subito raccogliendo x sopra e e^x sotto): usando la continuità e la monotonia dell'arco-tangente

possiamo concludere che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}^+$, $\lim_{x \rightarrow (\log 2)^+} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}^\mp$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$, in particolare notiamo che $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale a $-\infty$ e che $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$. Derivando (per $x \neq 0$), posto $\sigma = \text{sign } x$ si ha $f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi(x)^2} = \frac{\sigma(e^x-2)-e^x(|x|-1)}{(e^x-2)^2} \frac{1}{1+\varphi(x)^2}$. Per $x < 0$ si ha allora $f'(x) = \frac{-(e^x-2)-e^x(-x-1)}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)} = \frac{x e^x + 2}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)}$: perciò vale $f'(x) > 0$ se e solo se $x e^x > -2$, ovvero $x > -2e^{-x}$, e un confronto grafico mostra chiaramente che per $x < 0$ ciò è sempre vero: pertanto f è strettamente crescente su $]-\infty, 0[$. Invece per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{e^x-2-e^x(x-1)}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)} = \frac{(2-x)e^x-2}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)}$: perciò vale $f'(x) \geq 0$ se e solo se $(2-x)e^x - 2 > 0$, ovvero $2-x \geq 2e^{-x}$, e un confronto grafico più attento mostra che per $x > 0$ esiste un punto $\xi \in]1, 2[$ tale che ciò vale per $0 < x \leq \xi$: ne segue che $x = \xi$ è punto di massimo locale (vale in realtà $\xi \sim 1,6$ e $f(\xi) \sim 0,2$). Per finire notiamo che $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x e^x + 2}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)} = \frac{2}{(1+\varphi(0)^2)} = 1$ e $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(2-x)e^x-2}{(e^x-2)^2(1+\varphi(x)^2)} = \frac{(2-0)1-2}{(1-2)^2(1+\varphi(0)^2)} = 0$: ne segue che $x = 0$ è come previsto un punto angoloso, con pendenze 1 a sinistra e 0 a destra.

(b) In 0^+ la funzione è finita, con valore $f(0) = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}$ che essendo non nullo sarà anche la parte principale. • In 1 la funzione è infinitesima, dunque per Taylor la parte principale sarà $f'(1)(x-1) = \frac{1}{e-2}(x-1)$. • Per $+\infty$, poiché $\varphi(x) = \frac{x-1}{e^x-2} \sim_{+\infty} x e^{-x}$ è infinitesima, e ricordando che $\text{arctg } t \sim_0 t$, possiamo concludere che $f(x) \sim_{+\infty} x e^{-x}$, ovvero $x e^{-x}$ è la parte principale richiesta (nella scala potenze-esponenziali).

Infine, anche se non non era richiesto, diciamo due parole sulla ricerca di uno sviluppo con un secondo termine significativo. • Per un eventuale secondo termine significativo in 0^+ si può usare Taylor (valido separatamente a sinistra e a destra di $x = 0$): essendo però $f'_+(0) = 0$, tale termine sarà $\frac{1}{2} f''_+(0) x^2$, calcolabile se si ha la pazienza di calcolare la derivata seconda. • Anche in 1, come termine ulteriore si può calcolare $\frac{1}{2} f''(1)(x-1)^2$. • Infine, vediamo per $+\infty$: usando la formula $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$ (valida per $|q| < 1$), per $x \sim +\infty$ si ha $\varphi(x) = \frac{x-1}{e^x-2} = x e^{-x} (1 - \frac{1}{x}) \frac{1}{1-2e^{-x}} = (x e^{-x} - e^{-x})(1 + 2e^{-x} + 4e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x})) = x e^{-x} - e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$; ricordando poi che $\text{arctg } t = t - \frac{1}{3} t^3 + o_0(t^4)$ si ricava $f(x) = \text{arctg } \varphi(x) = \varphi(x) - \frac{1}{3} (\varphi(x))^3 + o_0(x^4 e^{-4x}) = (x e^{-x} - e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})) - \frac{1}{3} (x e^{-x} - e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x}))^3 + o_0(x^4 e^{-4x}) = x e^{-x} - e^{-x} + o_{+\infty}(e^{-x})$, che è lo sviluppo cercato (sempre nella scala potenze-esponenziali).

5. (a) L'equazione $z f(z) + 1 = 0$ dà $\frac{z^3}{2z-3} + 1 = 0$, che per $z \neq \frac{3}{2}$ equivale a $z^3 + 2z - 3 = 0$. Una soluzione evidente è $z = 1$; dividendo con Ruffini si ottiene $(z-1)(z^2 + z + 3) = 0$, da cui le altre due radici $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$. • L'equazione $f(z) = \bar{z}$ per $z \neq \frac{3}{2}$ equivale a $z^2 = \bar{z}(2z-3)$, ovvero $z^2 = 2|z|^2 - 3\bar{z}$. Posto $z = x + iy$, ciò dà $x^2 - y^2 + 2ixy = 2(x^2 + y^2) - 3x + 3iy$, che uguagliando parti reali e immaginarie equivale al sistema dato da $x^2 - y^2 = 2(x^2 + y^2) - 3x$ e $2xy = 3y$, ovvero $x^2 + 3y^2 - 3x = 0$ e $y(2x-3) = 0$. Dalla seconda ricaviamo $y = 0$ oppure $x = \frac{3}{2}$: se $y = 0$ si ricava $x(x-3) = 0$, ovvero le soluzioni reali $z = 0$ e $z = 3$, accettabili; se invece $x = \frac{3}{2}$ si ha $\frac{9}{4} + 3y^2 - \frac{9}{2} = 0$, ovvero $y^2 = \frac{3}{4}$, da cui le altre due soluzioni $z = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, pure accettabili.

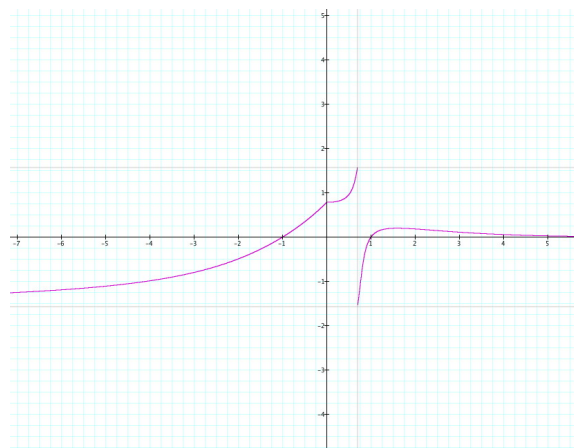
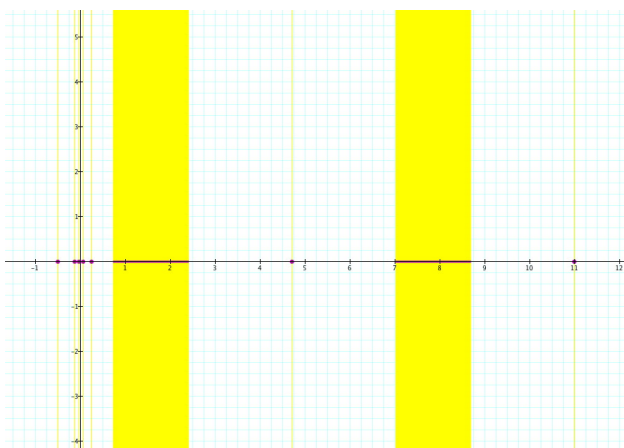
(b) Preso un $w \in \mathbb{C}$ nel codominio di f , la fibra $f^{-1}(w)$ è data dagli z tali che $\frac{z^2}{2z-3} = w$, ovvero $z^2 - 2wz + 3w = 0$: per il Teorema Fondamentale dell'Algebra questa equazione ha sempre due soluzioni, che sono distinte tra loro se il discriminante $4(w^2 - 3w) = 4w(w-3)$ non è nullo, ovvero se $w \neq 0, 3$. In altre parole, se $w \neq 0, 3$ la fibra $f^{-1}(w)$ è composta dai due elementi distinti $z = w \pm \sqrt{w^2 - 3w}$, mentre $f^{-1}(0) = \{0\}$ e $f^{-1}(3) = \{3\}$: pertanto f è suriettiva ma non iniettiva. • (Figura 3) L'immagine dell'asse immaginario è data da $f(i\mathbb{R}) = \{f(it) : t \in \mathbb{R}\} = \{\frac{-t^2}{-3+2it} : t \in \mathbb{R}\} = \{-t^2 \frac{-3-2it}{9+4t^2} : t \in \mathbb{R}\} = \{\frac{3t^2}{9+4t^2} + i \frac{2t^3}{9+4t^2} : t \in \mathbb{R}\}$. Posto allora $w = u + iv = \frac{3t^2}{9+4t^2} + i \frac{2t^3}{9+4t^2}$, cerchiamo di capire che luogo viene descritto nel piano di Gauss di $w = u + iv$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Da $u = \frac{3t^2}{9+4t^2}$ si ricava $t^2 = \frac{9u}{3-4u}$, che dà $t = \pm 3\sqrt{\frac{u}{3-4u}}$ (sotto la condizione $0 \leq u < \frac{3}{4}$); sostituendo in $v = \frac{2t^3}{9+4t^2}$ si ottiene il luogo $v = \pm 2u\sqrt{\frac{u}{3-4u}}$, che in forma cartesiana è dato da $4u(u^2 + v^2) = 3v^2$ o, in coordinate polari $(u, v) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, dall'equazione $\rho(\theta) = \frac{3 \sin^2 \theta}{4 \cos \theta}$ per $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. • (Figura 3) L'antiimmagine dell'asse immaginario è data da $f^{-1}(i\mathbb{R}) = \{z : f(z) \in i\mathbb{R}\} = \{z : \text{Re}(f(z)) = 0\}$. Posto $z = x + iy$, vediamo che luogo viene descritto nel piano di Gauss di $z = x + iy$: si ha $\text{Re}(f(z)) = \text{Re}(\frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{2x + 2iy - 3}) = \text{Re}(\frac{(x^2 - y^2 + 2ixy)(2x - 3 - 2iy)}{(2x - 3)^2 + 4y^2}) = \text{Re}(\frac{(x^2 - y^2)(2x - 3) + 4xy^2}{(2x - 3)^2 + 4y^2} + i \frac{2y(x^2 - y^2) + 2xy(2x - 3)}{(2x - 3)^2 + 4y^2}) = \frac{(x^2 - y^2)(2x - 3) + 4xy^2}{(2x - 3)^2 + 4y^2}$, pertanto la condizione $\text{Re}(f(z)) = 0$ dà il luogo $(x^2 - y^2)(2x - 3) + 4xy^2 = 0$, che in coordinate polari $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ dà l'equazione $\rho(\theta) = \frac{3 \cos 2\theta}{2 \cos \theta}$ per $|\theta| < \frac{\pi}{2}$.

6. (a) (Figura 4) Un'eventuale soluzione costante $y \equiv k$ dell'equazione differenziale $(x+1)yy' = x(1-y^2)$ dovrà soddisfare $0 = x(1-k^2)$ per ogni x , e ciò è possibile solo per $k = \pm 1$. Per parlare di crescenza bisogna porre l'equazione in forma normale: prima di farlo, notiamo che un'eventuale soluzione definita in $x = -1$ dovrà soddisfare $0 = -(1-y(-1)^2)$, ovvero $y(-1) = \pm 1$ (in particolare non esiste alcuna soluzione tale che ad esempio $y(1) = 2$: ciò non è una contraddizione, perché in $x = -1$ non si è in forma normale e dunque non si può applicare Cauchy), e che se una soluzione $y(x)$ si annulla in un certo x_0 (ovvero $y(x_0) = 0$), da $(x_0+1)y(0)y'(0) = x_0(1-y(0)^2)$ si ricava che $0 = x_0$, ovvero che una soluzione può eventualmente annullarsi solo in $x = 0$, o equivalentemente che una soluzione $y(x)$ non si annulla mai per $x \neq 0$. Ciò detto, dividendo si ottiene $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = \frac{x(1-y^2)}{(x+1)y}$: analizzando il segno di ciascuno dei quattro fattori si deduce che $f(x, y) > 0$ nelle zone segnate di giallo in Figura 4, che saranno

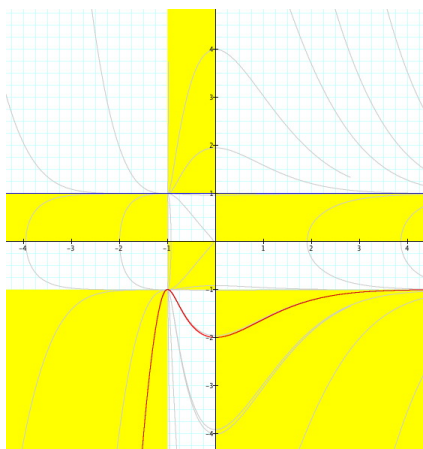
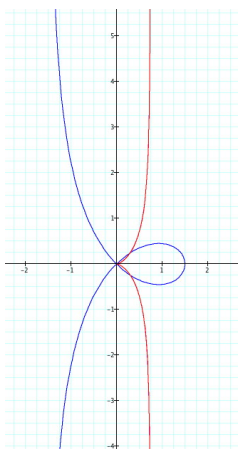
dunque quelle dove le soluzioni sono crescenti. Quanto alle simmetrie, se $\varphi(x)$ è soluzione, posto $\eta(x) := -\eta(x)$ si ha $\eta'(x) = -\varphi'(x) = -\frac{x(1-\varphi(x)^2)}{(x+1)\varphi(x)} = \frac{x(1-(-\varphi(x))^2)}{(x+1)(-\varphi(x))} = \frac{x(1-\eta(x)^2)}{(x+1)\eta(x)}$, dunque anche $\eta(x)$ è soluzione: ne deduciamo che la famiglia delle soluzioni è simmetrica rispetto all'asse x , fatto ben visibile in Figura 4.

Passando ora alla risoluzione, notato che abbiamo un'equazione a variabili separabili e tenute presenti le soluzioni costanti $y \equiv \pm 1$, separando si ha $\frac{y}{1-y^2} dy = \frac{x}{x+1} dx$, e integrando si ha $-\frac{1}{2} \log |1-y^2| = x - \log |x+1| + h$, da cui $\log |1-y^2| = 2 \log |x+1| - 2x - 2h = \log(x+1)^2 - 2x - 2h$, da cui $|1-y^2| = e^{\log(x+1)^2 - 2x - 2h} = e^{-2h}(x+1)^2 e^{-2x}$ con $h \in \mathbb{R}$, da cui (ponendo $k = \pm e^{-2h}$) si ottiene $1-y^2 = k(x+1)^2 e^{-2x}$ con $k \in \mathbb{R}$, da cui infine le soluzioni $y(x) = \pm \sqrt{1 - k(x+1)^2 e^{-2x}}$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ (notiamo che per $k = 0$ riotteniamo le costanti ± 1). In particolare, la soluzione tale che $y(0) = 1$ sarà la costante $y \equiv 1$, mentre quella tale che $y(0) = -2$ richiederà il segno meno e poi dovrà essere $-2 = -\sqrt{1 - k(0+1)^2 e^{-2 \cdot 0}} = -\sqrt{1-k}$, da cui $k = -3$ e perciò $y(x) = -\sqrt{1 + 3(x+1)^2 e^{-2x}}$.

(b) Poiché per $x \neq -1$ e $y \neq 0$ l'equazione differenziale si scrive in forma normale $y' = f(x, y)$ con $f(x, y) = \frac{x(1-y^2)}{(x+1)y}$ che soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy, vi sarà esistenza e unicità locale della soluzione con qualsiasi dato $y(x_0) = y_0$ in cui $x_0 \neq -1$ e $y_0 \neq 0$. Infine, esaminiamo la questione delle soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$: chiaramente lo sono le due costanti $y \equiv \pm 1$ e le soluzioni non costanti con $k < 0$, come quella trovata poco fa per il dato $y(0) = -2$ (si noti che per esse il radicando è sempre > 1 , dunque nessun problema nemmeno per la derivabilità). Invece le soluzioni con $k > 0$ sono definite quando $1 - k(x+1)^2 e^{-2x} \geq 0$, ovvero quando $e^{2x} \geq k(x+1)^2$, condizione che quando $k > 0$ è soddisfatta solo su porzioni dell'asse reale, come mostra con evidenza un semplice confronto grafico; inoltre quando tale soluzione si annulla (ovvero dove vale $e^{2x} = k(x+1)^2$) si perderà la derivabilità a causa dell'annullarsi dell'argomento della radice. In sostanza, non c'è nessuna speranza di estendere le soluzioni con $k > 0$ a soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.



1. Ex. 1: l'insieme A (in ascissa). 2. Ex. 4: grafico di $f(x)$.



3. Ex. 5: immagine (rosso) e antiimmagine (blu) dell'asse immaginario. 4. Ex. 6: soluzioni dell'equazione differenziale.

1. Sia ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x+2|} \geq 2(x-1), 5e^x \geq 1\}$ e $A_2 = \{(1 + \frac{1}{2n})^{3n} - \frac{n}{2n-1} : n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$. La disequazione $\sqrt{|x+2|} \geq 2(x-1)$ è sempre soddisfatta se $2(x-1) < 0$ (ovvero se $x < 1$), mentre se $2(x-1) \geq 0$ (ovvero se $x \geq 1$) essa equivale a $|x+2| = x+2 \geq 4(x-1)^2$, ovvero $4x^2 - 9x + 2 \leq 0$, vero per $1 \leq x \leq 2$; d'altra parte $5e^x \geq 1$ significa $x \geq \log \frac{1}{5} = -\log 5 \sim -1,6$, pertanto $A_1 =]-\infty, 2] \cap [-\log 5, +\infty[= [-\log 5, 2]$. Per quanto riguarda A_2 , la successione $(1 + \frac{1}{2n})^{3n} = ((1 + \frac{1/2}{n})^n)^3$ come noto tende crescendo a $(e^{\frac{1}{2}})^3 = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \sim 4,5$, mentre $\frac{n}{2n-1}$ tende decrescendo a $\frac{1}{2}$: pertanto la loro differenza $a_n = (1 + \frac{1}{2n})^{3n} - \frac{n}{2n-1}$ è una successione di punti che tende crescendo a $e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sim 4,0$, con primi termini $a_1 = (\frac{3}{2})^3 - 1 = \frac{19}{8} = 2,375$ (già sopra A_1 , così come i seguenti). Dunque A è un insieme limitato, con $\inf A = \min A = -\log 5$ e $\sup A = e\sqrt{e} - \frac{1}{2}$ ma senza massimo; non è aperto (non è intorno del suo punto 2) ne' chiuso (è limitato ma non ha massimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_1 tranne gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_2 ; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati; infine, quelli di frontiera sono tutti gli isolati, gli estremi di A_1 e anche $e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}$.

2. (a) (Figura 1) Il dominio di $g(x) = x - 2\sqrt{x-1}$ è $[1, +\infty[$. Passiamo ora al calcolo delle fibre, ovvero gli insiemi $g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$ al variare di $y \in \mathbb{R}$ nel codominio. Da $g(x) = y$ si ricava $2\sqrt{x-1} = x - y$, da cui subito la prima condizione necessaria $x - y \geq 0$: ciò stabilito, quadrando ambo i membri ricaviamo $4(x-1) = x^2 + y^2 - 2xy$, ovvero $x^2 - 2(y+2)x + y^2 + 4 = 0$. A questo punto si tratta di ricavare x : ciò è possibile quando il discriminante è ≥ 0 , ovvero quando $4(y+2)^2 - 4(y^2 + 4) = 8y \geq 0$, ovvero quando $y \geq 0$, e in tal caso otteniamo $x = y + 2 \pm 2\sqrt{y}$. Se $y = 0$ troviamo un solo punto $x = 2$, e la condizione $x - y = 2 \geq 0$ è soddisfatta. Se invece $y > 0$ troviamo in linea di principio due punti $x_-(y) = y + 2 - 2\sqrt{y}$ e $x_+(y) = y + 2 + 2\sqrt{y}$, ma per entrambi non dobbiamo dimenticare di controllare la condizione $x - y \geq 0$: per $x_-(y)$ ciò significa $y + 2 - 2\sqrt{y} - y \geq 0$, ovvero $\sqrt{y} \leq 1$, ovvero $0 \leq y \leq 1$; mentre per $x_+(y)$ ciò significa $y + 2 + 2\sqrt{y} - y \geq 0$, ovvero $\sqrt{y} \leq -1$, sempre vero per $y \geq 0$. Ricapitolando, abbiamo trovato le seguenti fibre:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & (\text{se } y < 0), \\ \{2\} & (\text{se } y = 0), \\ \{x_-(y) = y + 2 - 2\sqrt{y}, x_+(y) = y + 2 + 2\sqrt{y}\} & (\text{se } 0 < y \leq 1), \\ \{x_+(y) = y + 2 + 2\sqrt{y}\} & (\text{se } y > 1). \end{cases}$$

Dal calcolo appena fatto è evidente che l'immagine di g (ovvero gli y del codominio con fibra non vuota) è $[0, +\infty[$, e che g ha minimo assoluto 0 (assunto nell'unico punto della fibra $g^{-1}(0)$, ovvero $x = 2$); e che g non è ne' iniettiva ne' suriettiva. Per rendere g suriettiva basta costringerla alla sua immagine $[0, +\infty[$. Per renderla iniettiva, notato che $x_-(y) \leq 2 \leq x_+(y)$ (la disuguaglianza a destra è evidente, e quella a sinistra equivale a $y + 2 - 2\sqrt{y} \leq 2$, ovvero $y \leq 2\sqrt{y}$, da cui $0 \leq y \leq 4$, che nell'intervallo di esistenza $0 < y \leq 1$ di $x_-(y)$ è sempre vera) e che per $x = 2$ si ha l'uguaglianza, se restringiamo g a $[2, +\infty[$ otteniamo l'effetto di avere fibre fatte di uno e un solo elemento $x_+(y)$, in altre parole $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ diventa biiettiva con inversa $x_+ : [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$ data da $x_+(y) = y + 2 + 2\sqrt{y}$.

(b) L'antiimmagine $g^{-1}([\frac{1}{4}, 4])$ è data dalla condizione $\frac{1}{4} \leq g(x) < 4$. La prima disequazione è $x - 2\sqrt{x-1} \geq \frac{1}{4}$, ovvero $8\sqrt{x-1} \leq 4x - 1$, che nell'ipotesi $4x - 1 \geq 0$ (sempre vera nel dominio $x \geq 1$) equivale a $16x^2 - 72x + 65 \geq 0$, con soluzioni $1 \leq x \leq \frac{5}{4}$ e $x \geq \frac{13}{4}$. La seconda disequazione è $x - 2\sqrt{x-1} < 4$, ovvero $2\sqrt{x-1} > x - 4$: se $1 \leq x < 4$ essa è sempre soddisfatta, mentre per $x \geq 4$ equivale a $4(x-1) > (x-4)^2$, ovvero $4(x-1) > (x-4)^2$, ovvero $x^2 - 12x + 20 < 0$, con soluzioni $4 \leq x \leq 10$: pertanto le soluzioni della seconda sono $1 \leq x \leq 10$. Ne segue che il sistema è soddisfatto per $1 \leq x \leq \frac{5}{4}$ e $\frac{13}{4} \leq x \leq 10$, in altre parole $g^{-1}([\frac{1}{4}, 4]) = [1, \frac{5}{4}] \cup [\frac{13}{4}, 10]$. • Per il calcolo dell'immagine $g([\frac{5}{4}, +\infty[)$ usiamo il metodo della fibra: per ogni y del codominio dobbiamo controllare se almeno uno degli elementi della fibra $g^{-1}(y)$ è $\geq \frac{5}{4}$. Di certo a tale immagine non appartengono gli $y < 0$ (la loro fibra è vuota). Invece vi appartiene $y = 0$, perché $2 \geq \frac{5}{4}$. Per quanto riguarda gli y tali che $0 < y \leq 1$, si ha $x_-(y) \geq \frac{5}{4}$ se e solo se $y + 2 - 2\sqrt{y} \geq \frac{5}{4}$, ovvero $y - 2\sqrt{y} + \frac{3}{4} \geq 0$, valida per $\sqrt{y} \leq \frac{1}{2}$ oppure $\sqrt{y} \geq \frac{3}{2}$, ovvero (nell'intervallo $0 < y \leq 1$) solo per $0 < y \leq \frac{1}{4}$; si ha invece sempre $x_+(y) \geq \frac{5}{4}$ (come detto prima, vale $x_+(y) \geq 2$), pertanto tutti gli y tali che $0 < y \leq 1$ appartengono all'immagine cercata. Infine, per quanto riguarda gli $y > 1$ si ha sempre $x_+(y) \geq \frac{5}{4}$ (come appena ripetuto, vale $x_+(y) \geq 2$), pertanto anche tutti gli $y > 1$ appartengono all'immagine cercata. Ne deduciamo che $g([\frac{5}{4}, +\infty[) = [0, +\infty[$. (In realtà il conto che abbiamo appena fatto per calcolare l'immagine $g([\frac{5}{4}, +\infty[)$ sarebbe stato inutile se avessimo tenuto presente fin da subito quanto trovato nel punto (a). Là infatti si era visto che restringendo g a $[2, +\infty[$ si ottiene una biiezione con tutta l'immagine $[0, +\infty[$: dunque, poiché $[\frac{5}{4}, +\infty[$ contiene $[2, +\infty[$, anche l'immagine di $[\frac{5}{4}, +\infty[$ sarà la massima possibile, ovvero $[0, +\infty[$.)

3. Poniamo $f(x) = \frac{2 \sin x - x(1 + \cosh x)}{x(e^x - 1)}$. • Per $x \sim -\infty$ si ha $2 \sin x = o_{-\infty}(-x(1 + \cosh x))$ e $-x(1 + \cosh x) \sim -x \frac{1}{2} e^{-x} = -\frac{1}{2} x e^{-x}$, mentre $x(e^x - 1) \sim_{-\infty} -x$: pertanto $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{1}{2} x e^{-x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = +\infty$. • Per $x \sim 0$ il limite è in forma 0/0: sviluppando il numeratore, e notando che al denominatore si ha $x(e^x - 1) \sim x^2$, vale $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4)) - x(1 + 1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^3))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5}{6}x^3}{x^2} = 0$. • Infine, per $x \sim +\infty$ si

ha $2 \sin x = o_{+\infty}(-x(1 + \cosh x))$ e $-x(1 + \cosh x) \sim -x \frac{1}{2} e^x = -\frac{1}{2} x e^x$, mentre $x(e^x - 1) \sim_{+\infty} x e^x$: pertanto $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{2} x e^x}{x e^x} = -\frac{1}{2}$.

4. (a) (Figura 2) Il dominio di $f(x) = x + \log |e^x - 2|$ è dato da $e^x \neq 2$, ovvero $x \neq \log 2 \sim 0,7$. La funzione è di classe C^∞ in tutto il suo dominio; non vi sono simmetrie, né periodi. Gli zeri si hanno quando $\log |e^x - 2| = -x$, che esponenziando equivale nel dominio a $|e^x - 2| = e^{-x}$: se $x \geq \log 2$ ciò dà $e^x - 2 = e^{-x}$, ovvero $e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$, ovvero $e^x = 1 \pm \sqrt{2}$, ovvero $x = \log(\sqrt{2} + 1) \sim 0,8$ (accettabile); se invece $x < \log 2$ ciò dà $2 - e^x = e^{-x}$, ovvero $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$, ovvero $e^x = 1$, ovvero $x = 0$ (accettabile). Per il segno, si ha $f(x) > 0$ quando $\log |e^x - 2| > -x$, che procedendo in modo simile a prima dà $x > \log(\sqrt{2} + 1)$. I limiti notevoli sono tutti determinati, e valgono $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (\log 2)^{\mp}} \varphi(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Per gli asintoti, visto che $\log |e^x - 2| \sim_{-\infty} \log 2$ e $\log |e^x - 2| \sim_{+\infty} \log e^x = x$, è prevedibile un asintoto obliquo sia a $-\infty$ (probabilmente $y = x + \log 2$) che a $+\infty$ (probabilmente $y = x + a$) con $a \in \mathbb{R}$ da determinare: vediamo ora il conto preciso. • Per $-\infty$, si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{\log(2 - e^x)}{x}) = 1$; poi $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \log(2 - e^x) = \log 2$, pertanto come previsto c'è l'asintoto obliquo $y = x + \log 2$. (Anticipando il punto (b), allo stesso risultato si poteva arrivare con lo sviluppo asintotico: per $x \sim -\infty$ si ha $f(x) = x + \log(2 - e^x) = x + \log(2(1 - \frac{1}{2}e^x)) = x + \log 2 + \log(1 - \frac{1}{2}e^x) = x + \log 2 + (-\frac{1}{2}e^x) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}e^x)^2 + o_{-\infty}(e^{2x}) = x + \log 2 - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{8}e^{2x} + o_{-\infty}(e^{2x})$.) Per le eventuali intersezioni con l'asintoto, se $x < 0$ da $f(x) = x + \log 2$ si ricava $2 - e^x = 2$ ovvero $e^x = 0$, impossibile: pertanto, essendo $f(0) = 0$, quando $x \sim -\infty$ la funzione f tende all'asintoto restando sotto. • Per $+\infty$, si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{\log(e^x - 2)}{x})$: con de l'Hôpital si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^x - 2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x/(e^x - 2)}{1} = 1$, dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$; poi $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(e^x - 2) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(e^x - 2) - \log e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1 - 2e^{-x}) = 0$, pertanto c'è l'asintoto obliquo $y = 2x$. (Anche qui, allo stesso risultato si poteva arrivare con lo sviluppo asintotico: per $x \sim +\infty$ si ha $f(x) = x + \log(e^x - 2) = x + \log(e^x(1 - 2e^{-x})) = x + \log e^x + \log(1 - 2e^{-x}) = 2x + ((-2e^{-x}) - \frac{1}{2}(-2e^{-x})^2 + o_{+\infty}(e^{-2x})) = 2x - 2e^{-x} - 2e^{-2x} + o_{+\infty}(e^{-2x})$.) Per le eventuali intersezioni con l'asintoto, se $x > 0$ da $f(x) = 2x$ si ricava $\log(e^x - 2) = x$ ovvero $e^x - 2 = e^x$, ovvero $2 = 0$, impossibile: pertanto, anche quando $x \sim +\infty$ la funzione f tende all'asintoto restando sotto.

Derivando si ha $f'(x) = 1 + \frac{e^x}{e^x - 2} = \frac{2(e^x - 1)}{e^x - 2}$: dunque $f'(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, e così $x = 0$ è punto di massimo locale (con $f(0) = 0$). Derivando ancora si ha $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 2) - e^x e^x}{(e^x - 2)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x - 2)^2} < 0$, pertanto f è strettamente concava.

(b) Per gli sviluppi in $\pm\infty$ si è già detto sopra. Per lo sviluppo in $x \sim 0$ naturalmente si può usare Taylor, per il quale (essendo $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(0) = -2 \neq 0$) ci servirà almeno anche la derivata terza $f'''(x) = -2 \frac{e^x(e^x - 2)^2 - 2e^x(e^x - 2)e^x}{(e^x - 2)^4} = \frac{2e^x(e^x + 2)}{(e^x - 2)^3}$, da cui $f'''(0) = -6 \neq 0$ (perciò per ricavare due termini significativi non servirà derivare ulteriormente): si ha dunque $f(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(0)(x - 0)^2 + \frac{1}{6}f'''(0)(x - 0)^3 + o_0(x^3) = \frac{1}{2}(-2)x^2 + \frac{1}{6}(-6)x^3 + o_0(x^3) = -x^2 - x^3 + o_0(x^3)$. • In alternativa a Taylor, per $x \sim 0$ potevamo scrivere $f(x) = x + \log(2 - e^x) = x + \log(1 + (1 - e^x))$; essendo poi $t = 1 - e^x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)$ un infinitesimo, si ha $\log t = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o_0(t^3) = (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3)) - \frac{1}{2}(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3))^2 + \frac{1}{3}(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^3))^3 = -x - x^2 - x^3 + o_0(x^3)$, da cui $f(x) = x + \log(1 + t) = x - x - x^2 - x^3 + o_0(x^3) = -x^2 - x^3 + o_0(x^3)$, come già trovato prima.

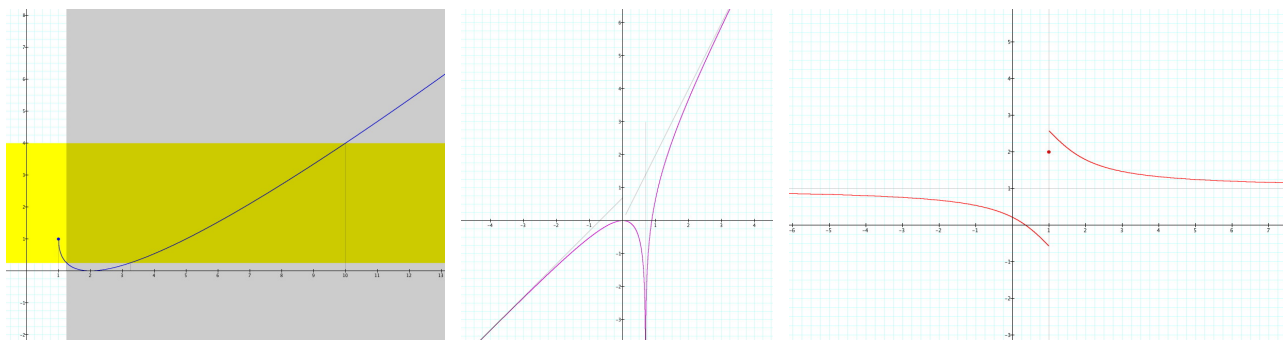
5. (a) Si ha (integrando per parti) $\int x e^{2x} dx = x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + k$, e (posto $t = e^x$) $\int \frac{4e^{2x}}{2 - e^{-x}} dx = \int \frac{4t}{2 - \frac{1}{t}} dt = \int \frac{4t^2}{2t - 1} dt = \int \frac{(4t^2 - 1) + 1}{2t - 1} dt = \int (2t + 1 - \frac{1}{2t - 1}) dt = t^2 + t - \frac{1}{2} \log |2t - 1| + k = e^{2x} + e^x - \frac{1}{2} \log |2e^x - 1| + k$: pertanto $\int_0^1 (x + \frac{4}{2 - e^{-x}}) e^{2x} dx = (\frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + e^{2x} + e^x - \frac{1}{2} \log |2e^x - 1|)_0^1 = \frac{5}{4} e^2 + e - \frac{1}{2} \log(2e - 1) - \frac{7}{4} \sim 9,5$. • Usiamo le formule parametriche: posto $t = \operatorname{tg} x$ (ovvero $x = \operatorname{arctg} t$, da cui $dx = \frac{1}{1 + t^2} dt$) si ha $\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$, da cui $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3 + 2 \sin 2x} dx = \int_0^1 \frac{1}{3 + 2 \frac{2t}{1 + t^2}} \frac{1}{1 + t^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{3t^2 + 4t + 3} dt = \int_0^1 \frac{1}{(t\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 + \frac{5}{3}} dt = \frac{3}{5} \int_0^1 \frac{1}{(\frac{3t + 2}{\sqrt{3}})^2 + 1} dt = (\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{3t + 2}{\sqrt{5}}))_0^1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (\operatorname{arctg} \sqrt{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{5}}) \sim 0,2$.

(b) (Figura 3) La funzione $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $h(x) = 1 + \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1})$ (se $x \neq 1$) e $h(1) = 2$ è continua su $\mathbb{R}$ tranne una sola discontinuità di salto in $x = 1$ (si noti che $\lim_{x \rightarrow 1^{\pm}} h(x) = 1 \pm \frac{\pi}{2}$ esistono entrambi finiti), e dunque è localmente integrabile. Ne segue che la sua funzione integrale di punto iniziale 0, ovvero $H_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $H_0(x) := \int_0^x h(t) dt$, ha pienamente senso ed è continua; e per il calcolo di $H_0(x)$ il valore $h(1)$ è irrilevante (al posto di $h(1) = 2$ avremmo potuto assegnare qualsiasi altro valore). Per trovarne una forma finita cerchiamo allora le primitive di h , e poi prenderemo quella che in $x = 0$ vale 0. Si ha $\int h(x) dx = x + \int \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1}) dx =$ [posto $u = \frac{1}{x-1}$, dunque $x = 1 + \frac{1}{u}$ e $dx = -\frac{1}{u^2} du$] $x + \int (-\frac{1}{u^2}) \operatorname{arctg} u du =$ [per parti] $x + \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u - \int \frac{1}{u} \frac{1}{u^2 + 1} du = x + \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u - \int (\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2 + 1}) du = x + \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u - (\log |u| - \frac{1}{2} \log(u^2 + 1)) + k = x + \frac{1}{u} \operatorname{arctg} u - \log \frac{|u|}{\sqrt{u^2 + 1}} + k = x + (x - 1) \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1}) + \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + k$ (si noti che, come preannunciato, si tratta di funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, in quanto in $x = 1$ si può assegnare il valore finito del limite, che vale $k + 1$). La condizione che il valore in $x = 0$ sia 0 dà $0 + (0 - 1) \operatorname{arctg}(-1) + \frac{1}{2} \log 2 + k = 0$, ovvero $k = k_0 := -\frac{1}{2} \log 2 - \frac{\pi}{4}$: dunque $H_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come $H_0(x) = x + (x - 1) \operatorname{arctg}(\frac{1}{x-1}) + \frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 2) + k_0$ per $x \neq 1$, e $H_0(1) = k_0 + 1$.

6. (a) Per esprimere le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' + \alpha^2 y = x - 2 \cos x$ al variare di $\alpha \geq 0$ dobbiamo trattare a parte i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$. • Se $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y'' = x - 2 \cos x$, e due integrazioni successive danno nell'ordine $y' = \frac{1}{2}x^2 - 2 \sin x + A$ e $y = \frac{1}{6}x^3 + 2 \cos x + Ax + B$, al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. • Se $\alpha = 1$ si ha $y'' + y = x - 2 \cos x$. Le soluzioni dell'omogenea sono $y(x) = A \cos x + B \sin x$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$; una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ sarà del tipo $\tilde{y}_1(x) = ax + b$, ed essendo $\tilde{y}_1'' \equiv 0$ si ha $a = 1$ e $b = 0$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = x$; una per $b_2(x) = -2 \cos x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = x(a \cos x + b \sin x)$, da cui $\tilde{y}_2'(x) = (a + bx) \cos x + (b - ax) \sin x$ e $\tilde{y}_2''(x) = (2b - ax) \cos x + (-2a - bx) \sin x$, perciò da $\tilde{y}_2'' + \tilde{y}_2 = -2 \cos x$ si ricava $2b \cos x - 2a \sin x = -2 \cos x$, da cui $a = 0$ e $b = -1$, ovvero $\tilde{y}_2 = -x \sin x$. Dunque le soluzioni cercate sono $y(x) = A \cos x + (B - x) \sin x + x$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$. • Se invece $\alpha \neq 0, 1$ le soluzioni dell'omogenea sono $y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x$; una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ sarà $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{\alpha^2}x$ e una per $b_2(x) = -2 \cos x$ sarà del tipo $\tilde{y}_2(x) = a \cos x + b \sin x$, ed essendo $\tilde{y}_2'' = -\tilde{y}_2$ si ricava $a = \frac{2}{1-\alpha^2}$ e $b = 0$, ovvero $\tilde{y}_2 = \frac{2}{1-\alpha^2} \cos x$. Dunque le soluzioni cercate sono $y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{1-\alpha^2} \cos x$ al variare di $A, B \in \mathbb{C}$.

(b) Per le soluzioni reali (ovvero, quelle sopra con $A, B \in \mathbb{R}$) una condizione necessaria per assumere un massimo locale in $x = 0$ è che $y'(0) = 0$ e $y''(0) \leq 0$; se poi vale anche $y''(0) < 0$ la condizione è anche sufficiente, mentre un eventuale caso $y'(0) = y''(0) = 0$ va esaminato a parte. Dunque, nel caso $\alpha = 1$, per una soluzione $y(x) = A \cos x + (B - x) \sin x + x$ (da cui $y'(x) = -(A+1) \sin x + (B-x) \cos x + 1$ e $y''(x) = -(A+2) \cos x - (B-x) \sin x$) si deve avere che $y(0) = A = -1$, $y'(0) = B+1 = 0$ e $y''(0) = -(A+2) \leq 0$, da cui $A = B = -1$ e $-(A+2) = -1 \leq 0$ (vero): otteniamo dunque la sola soluzione $y(x) = x - \cos x - (x+1) \sin x$.

Pur se non richiesto, esaminiamo anche gli altri casi per α . • Se $\alpha = 0$, per una soluzione $y(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2 \cos x + Ax + B$ (da cui $y'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \sin x + A$ e $y''(x) = x - 2 \cos x$) si deve avere che $y(0) = 2 + B = -1$, $y'(0) = A = 0$ e $y''(0) = -2 \leq 0$: anche qui otteniamo dunque la sola soluzione $y(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2 \cos x - 3$. • Se invece $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, per una soluzione $y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x + \frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{1-\alpha^2} \cos x$ (da cui $y'(x) = -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{1-\alpha^2} \sin x$ e $y''(x) = -A\alpha^2 \cos \alpha x - B\alpha^2 \sin \alpha x - \frac{2}{1-\alpha^2} \cos x$) si deve avere che $y(0) = A + \frac{2}{1-\alpha^2} = -1$, $y'(0) = B\alpha + \frac{1}{\alpha^2} = 0$ e $y''(0) = -A\alpha^2 - \frac{2}{1-\alpha^2} \leq 0$: si ricava così $A = -\frac{3-\alpha^2}{1-\alpha^2}$, $B = -\frac{1}{\alpha^3}$, da cui la condizione $-A\alpha^2 - \frac{2}{1-\alpha^2} \leq 0$ diventa a conti fatti $\alpha^2 - 2 \geq 0$, ovvero $0 < \alpha \leq \sqrt{2}$ con $\alpha \neq 1$. Ora, come detto, se $y''(0) < 0$ (ovvero se $0 < \alpha < \sqrt{2}$ con $\alpha \neq 1$) la condizione è anche sufficiente; va invece esaminato a parte il caso $\alpha = \sqrt{2}$, in cui la soluzione $y(x) = \cos(x\sqrt{2}) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(x\sqrt{2}) + \frac{1}{2}x - 2 \cos x$ soddisfa $y(0) = -1$ e $y'(0) = y''(0) = 0$, ma per essa si ha $y'''(0) = (\cos(x\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \sin(x\sqrt{2}) - 2 \sin x)|_{x=0} = 1 \neq 0$ e perciò $x = 0$ è solo un punto di flesso orizzontale. Ricapitolando, nel caso $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ le soluzioni cercate sono quelle del tipo $y(x) = -\frac{3-\alpha^2}{1-\alpha^2} \cos \alpha x - \frac{1}{\alpha^3} \sin \alpha x + \frac{1}{\alpha^2}x + \frac{2}{1-\alpha^2} \cos x$ ove $0 < \alpha < \sqrt{2}$ ma $\alpha \neq 1$.



1. Ex. 2: grafico di $g(x)$, immagine e antiimmagine. 2. Ex. 4: grafico di $f(x)$. 3. Ex. (5.b): grafico di $h(x)$.

1. Sia ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \pi, \sin x + 3 \cos x > 1\}$ e $A_2 = \{\log n - n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Per la disequazione goniometrica affine $\sin x + 3 \cos x > 1$, posto $X = \cos x$ e $Y = \sin x$ si ricava $Y > 1 - 3X$, condizione che va intersecata con la relazione $X^2 + Y^2 = 1$: i due punti d'intersezione sono $(X_1, Y_1) = (0, 1)$ e $(X_2, Y_2) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, dunque si tratta dei punti dell'arco che li congiunge nel quarto e primo quadrante; tornando a x e tenendo presente che $|x| < \pi$, i due punti corrispondono in $]-\pi, \pi[$ agli angoli $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\theta_2 = -\arcsin \frac{4}{5} \sim -0,9$, pertanto $A_1 =]-\arcsin \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}[$. D'altra parte la successione $s_n = \log n - n - 1$ parte dal valore $s_1 = -2$ ed è strettamente decrescente (infatti $s_{n+1} - s_n = \log(n+1) - (n+1) - 1 - (\log n - n - 1) = \log(1 + \frac{1}{n}) - 1 < 0$ in quanto $1 + \frac{1}{n} < 2 < e$) e tende a $-\infty$ (ricordando che $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$): perciò l'insieme A è l'unione disgiunta dell'intervallo $]-\arcsin \frac{4}{5}, \frac{\pi}{2}[$ e dei punti isolati di A_2 che tendono a $-\infty$. Dunque A è superiormente limitato, con $\sup A = \frac{\pi}{2}$ ma senza massimo; non è aperto (non è intorno del suo punto -2) ne' chiuso (è superiormente limitato ma non ha massimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_1 ; i punti isolati sono quelli di A_2 ; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $\frac{\pi}{2}$, $-\arcsin \frac{4}{5}$ e $-\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_2); infine, quelli di frontiera sono tutti quelli di accumulazione eccetto gli interni (quelli di A_1).
2. (a) Nella successione $a_n = \frac{2^{\alpha n} - 2\alpha n}{(n!)^{\alpha-1} - 2n}$ esaminiamo dapprima separatamente i comportamenti di numeratore e denominatore. Al numeratore, se $\alpha > 0$ c'è forma indeterminata $+\infty - \infty$ ma prevale il termine $2^{\alpha n}$ (infatti $c_n := \frac{2^{\alpha n}}{2^{\alpha n}}$ tende a 0, essendo $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2^{\alpha(n+1)}}{2^{\alpha n}} \frac{1}{2^\alpha} \rightarrow \frac{1}{2^\alpha} < 1$) e dunque tende a $+\infty$; se $\alpha = 0$ esso vale 1; e se $\alpha < 0$ esso tende a $-(\infty) = +\infty$ come $-2\alpha n$. D'altra parte al denominatore se $\alpha > 1$ c'è forma indeterminata $+\infty - \infty$ ma prevale il termine $(n!)^{\alpha-1}$ (infatti $d_n := \frac{2n}{(n!)^{\alpha-1}}$ tende a 0, essendo $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2(n+1)}{2n} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \rightarrow 0 < 1$) e dunque tende a $+\infty$; se $\alpha = 1$ esso vale $1 - 2n$ che tende a $-\infty$ come $-2n$; mentre se $\alpha < 1$ esso tende ancora a $-\infty$ come $-2n$. Ricapitolando, per la successione a_n accade quanto segue:
 - se $\alpha < 0$, raccogliendo $-2\alpha n$ sopra e $-2n$ sotto si vede che a_n tende a $\frac{-2\alpha}{-2} = \alpha$;
 - se $\alpha = 0$, a_n diventa $\frac{1}{(n!)^{-1} - 2n}$, che tende a 0^- ;
 - se $0 < \alpha < 1$, raccogliendo $2^{\alpha n}$ sopra e $-2n$ sotto (e notato che $\frac{n}{2^{\alpha n}}$ tende a 0) si vede che a_n tende a $-\infty$;
 - se $\alpha = 1$ diventa $\frac{2^n - 2n}{1 - 2n}$, e raccogliendo ancora $2^{\alpha n}$ sopra e $-2n$ sotto si vede che a_n tende a $-\infty$;
 - infine, se $\alpha > 1$, raccogliendo $2^{\alpha n}$ sopra e $(n!)^{\alpha-1}$ sotto (e notato che $f_n := \frac{2^{\alpha n}}{(n!)^{\alpha-1}}$ tende a 0, essendo $\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{2^\alpha}{(n+1)^{\alpha-1}} \rightarrow 0 < 1$) si vede che a_n tende a 0^+ .
3. Poniamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x + \sin x + \sqrt{1-2x} - e^x}{x \arctg x}$. • Per $x \sim -\infty$ si ha $N(x) \sim_{-\infty} x$ (infatti $\sin x$ è limitata, e^x infinitesima e $\sqrt{1-2x} \sim_{-\infty} \sqrt{|x|} = o_{-\infty}(x)$), mentre $D(x) \sim_{-\infty} x(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}x$: ne segue che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-\frac{\pi}{2}x} = -\frac{2}{\pi}$. • Per $x \sim 0$ il limite è in forma indeterminata $0/0$: sviluppando $N(x)$, e notando che $D(x) \sim x^2$, vale $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + (x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4)) + (1 + \frac{1}{2}(-2x) - \frac{1}{8}(-2x)^2 + o_0(x^2)) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2))}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 + o_0(x^2)}{x^2} = -1$. • Infine, per $x \sim +\infty$ si ha $x + \sin x + \sqrt{1-2x} = o_{+\infty}(e^x)$, mentre $D(x) \sim_{+\infty} x(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}x$: ne segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{e^x}{2}}{\frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{2}{\pi} \frac{e^x}{x}) = -\infty$.
4. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = \sqrt{x^2 + x - e^{-x}} - 1$ è tutto $\mathbb{R}$. La funzione è di classe C^∞ in tutto il suo dominio tranne nei punti dove $x^2 + x - e^{-x} = 0$, ovvero $x^2 + x = e^{-x}$, dove è assicurata la sola continuità: e un facile confronto grafico tra la funzione quadratica $x^2 + x$ e l'esponenziale negativo e^{-x} mostra chiaramente che ciò accade in un solo punto $\alpha \in]0, 1[$ (vale $\alpha \sim 0,44$); non vi sono simmetrie, ne' periodi. Gli zeri si hanno quando $|x^2 + x - e^{-x}| = 1$, ovvero $x^2 + x - e^{-x} = \pm 1$, ovvero $x^2 + x \mp 1 = e^{-x}$: e ancora due facili confronti grafici mostrano che ciò accade in $x = 0$ e in un altro punto $\beta \in]\alpha, 1[$ (vale $\beta \sim 0,80$). Per il segno, si ha $f(x) > 0$ quando $|x^2 + x - e^{-x}| > 1$, ovvero $x^2 + x - e^{-x} > 1$ oppure $x^2 + x - e^{-x} < -1$, ovvero $x^2 + x - 1 > e^{-x}$ oppure $x^2 + x + 1 < e^{-x}$, il che accade per $x > \beta$ oppure per $x < 0$. I limiti notevoli sono in $\mp\infty$: essendo $f(x) \sim_{-\infty} \sqrt{e^{-x}} = e^{-\frac{1}{2}x}$ e $f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{x^2} = x$ si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$ (crescita esponenziale) e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ (crescita lineare, con possibile asintoto obliquo). Vediamo dunque se questo asintoto obliquo a $+\infty$ esiste o no: si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - e^{-x}} - 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{1 + (\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2})} - 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2}) + o_{+\infty}(\frac{1}{x})) - 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2x} + o_{+\infty}(1) - 1 - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2x} + o_{+\infty}(1)) = -\frac{1}{2}$ (in alternativa, si poteva moltiplicare sopra e sotto per $\sqrt{x^2 + x - e^{-x}} + 1 + x$): pertanto $y = x - \frac{1}{2}$ è asintoto obliquo a $+\infty$, e poiché (come si verifica facilmente) per $x > \alpha$ l'equazione $f(x) = x - \frac{1}{2}$ è priva di soluzioni, essendo $f(1) = \sqrt{2 - \frac{1}{e}} - 1 < \frac{1}{2}$ l'asintoto è raggiunto dal grafico tendendo da sotto. Derivando, posto $\sigma = \text{sign}(x^2 + x - e^{-x})$ (dunque $\sigma \geq 0$ per $x \geq \alpha$) si ha $f'(x) = \sigma \frac{2x+1+e^{-x}}{2\sqrt{|x^2+x-e^{-x}|}}$: si ha $f'(x) = 0$ quando $2x+1+e^{-x} = 0$, ovvero $2x+1 = -e^{-x}$, il che però non avviene mai (un facile confronto grafico mostra che

vale sempre $2x + 1 > -e^{-x}$). D'altra parte vale $f'(x) > 0$ quando $x > \alpha$ e $2x + 1 + e^{-x} > 0$ oppure quando $x < \alpha$ e $2x + 1 + e^{-x} < 0$, ovvero quando $x > \alpha$ e $2x + 1 > -e^{-x}$ (sempre) oppure quando $x < \alpha$ e $2x + 1 < -e^{-x}$ (mai): pertanto f è strettamente decrescente per $x < \alpha$ e strettamente crescente per $x > \alpha$, dal che si deduce che $x = \alpha$ è punto di minimo assoluto (con $f(\alpha) = -1$). Notiamo anche che $\lim_{x \rightarrow \alpha^\pm} f'(x) = \mp\infty$, dunque come previsto $f(x)$ non è derivabile in $x = \alpha$ (il grafico presenta un punto cuspidale a tangente verticale).

Derivando ulteriormente e effettuando dei pazienti calcoli si ottiene infine $f''(x) = -\frac{x^2+3x+3+\sinh x}{2e^x|x^2+x-e^{-x}|^{\frac{3}{2}}}$: si ha dunque

$f''(x) \geq 0$ quando $x^2 + 3x + 3 \leq -\sinh x$, ed un confronto grafico mostra chiaramente che esiste un punto $\gamma \in]-1, 0[$ (vale $\gamma \sim -0,93$) tale che ciò è verificato quando $x < \gamma$. Pertanto $x = \gamma$ è un punto di flesso, e f è strettamente convessa prima e strettamente concava dopo γ .

(b) Come spiegato prima, la parte principale di f in $x \sim -\infty$ è $e^{-\frac{1}{2}x}$, e quella in $x \sim +\infty$ è x . Quanto a $x \sim 0$, in cui f si annulla ed è derivabile, per Taylor la parte principale diventa $f'(0)(x - 0) = -x$.

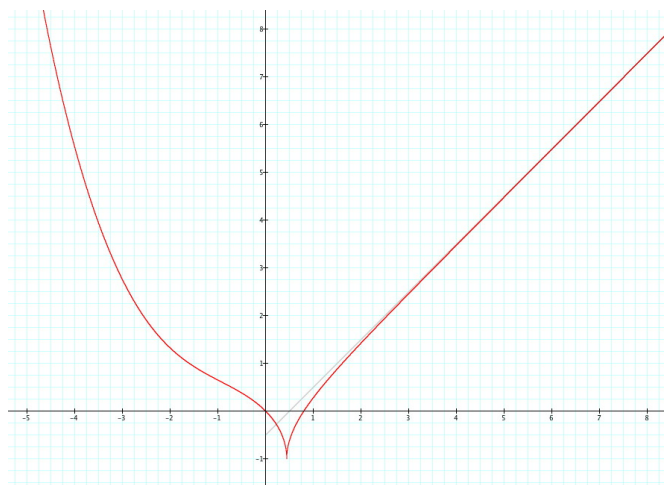
5. (a) L'equazione $g(z) := 2z^3 - z^2 + z + \alpha = 0$ è algebrica di terzo grado, dunque per il Teorema Fondamentale dell'Algebra le soluzioni complesse saranno tre (contate con la loro molteplicità). • Sapendo che una soluzione di $2z^3 - z^2 + z + 1 = 0$ è $z = -\frac{1}{2}$ sappiamo anche che $g(z)$ sarà divisibile per $2z + 1$, e in effetti dividendo otteniamo $g(z) = (2z + 1)(z^2 - z + 1)$: le altre due soluzioni di $g(z) = 0$ sono dunque date da $z^2 - z + 1 = 0$, ovvero $z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, che in forma trigonometrica/esponenziale si scrivono $e^{\pm \frac{\pi}{3}i} = \cos(\pm \frac{\pi}{3}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{3})$.

(b) Consideriamo la funzione cubica di variabile reale $g_\alpha(x) = 2x^3 - x^2 + x + \alpha = 0$, dove ora $\alpha \in \mathbb{R}$. La derivata $g'_\alpha(x) = 6x^2 - 2x + 1$ è sempre > 0 , dunque g_α è strettamente crescente: ne segue che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'equazione $g_\alpha(x) = 0$ ha un'unica soluzione reale x_α , ed essendo $g(0) = \alpha$ si avrà $x_\alpha > 0$ per $\alpha < 0$, $x_0 = 0$ e $x_\alpha < 0$ per $\alpha > 0$. Infine si ha $x_\alpha \in [-1, 2]$ se e solo se $g(-1) = \alpha - 4 \leq 0$ e $g(2) = \alpha + 14 \geq 0$, ovvero $-14 \leq \alpha \leq 4$.

6. (a) Un'eventuale soluzione costante $y \equiv k$ dell'equazione differenziale $(x-1)y' = (y-1)x$ deve soddisfare $0 = (k-1)x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque l'unica soluzione costante è $y \equiv 1$. Se poi una soluzione $y(x)$ è definita in un intorno di $x = 1$, essa dovrà soddisfare $0 \cdot y'(1) = (y(1) - 1)1$, ovvero $y(1) = 1$; invece sugli intervalli $x < 1$ e $x > 1$ si può porre in forma normale $y' = \frac{(y-1)x}{x-1}$, da cui si ricava che le soluzioni hanno in $x = 0$ un punto stazionario, e che sono strettamente crescenti per $x < 0$ e $x > 1$ (quando stanno sopra 1) o per $0 < x < 1$ (quando stanno sotto 1).

Derivando ambo i membri rispetto a x si ottiene poi $y'' = \frac{(y'x+y-1)(x-1)-(y-1)x}{(x-1)^2}$, che risostituendo y' a conti fatti diventa $y'' = \frac{(y-1)(x+1)}{x-1}$: pertanto $x = -1$ è un flesso per le soluzioni. Quanto alle simmetrie, nessuna di quelle standard è presente; tuttavia, vista la presenza tra le soluzioni della costante $y \equiv 1$ è naturale chiedersi se lo spazio delle soluzioni sia simmetrico rispetto alla quota $y = 1$: e in effetti ciò è vero, essendo facile dimostrare che se $\varphi(x)$ è una soluzione, lo è anche $\psi(x) = 2 - \varphi(x)$ (la sua simmetrica rispetto alla quota $y = 1$). • Le soluzioni non costanti le troviamo separando le variabili: da $\frac{1}{y-1} dy = \frac{x}{x-1} dx$ integrando si ricava $\log|y-1| = x + \log|x-1| + h$, da cui esponenziando si ha $|y-1| = e^h|x-1|e^x$, da cui (posto $k = e^h$) $y-1 = k(x-1)e^x$, cioè $y(x) = k(x-1)e^x + 1$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. A priori queste soluzioni sono state trovate solo per $x \neq 1$, ma in realtà sono tutte definite su $\mathbb{R}$: per $k = 0$ si riottiene la costante $y \equiv 1$, che è quella cercata tale che $y(0) = 1$, mentre imponendo $y(0) = 0$ si ottiene $0 = k(-1)1 + 1$, ovvero $k = 1$, cioè $y(x) = (x-1)e^x + 1$.

(b) L'equazione $y'' - 2y' + y = 1$ è lineare del 2o ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $t^2 - 2t + 1 = 0$ ha radice doppia 1, mentre una soluzione particolare è evidentemente la costante 1: dunque lo spazio delle soluzioni è $y(x) = (A+Bx)e^x + 1$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, e in esso stanno anche tutte le soluzioni di (a), per le quali $A = -B$.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$.

1. Sia ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3, 2\sin 2x \leq 3\cos x\}$ e $A_2 = \{4(e^n - 1) : n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}\}$. Ricordando che $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, la disequazione goniometrica $2\sin 2x \leq 3\cos x$ equivale a $(4\sin x - 3)\cos x \leq 0$: dovendo essere $|x| < 3$, occupiamoci di risolverla nel periodo $[-\pi, \pi]$. Il fattore $4\sin x - 3$ è > 0 quando $\sin x > \frac{3}{4}$, ovvero per $\theta < x < \pi - \theta$ ove $\theta := \arcsin \frac{3}{4} \sim 0,85$ (da cui $\pi - \theta \sim 2,29$); il fattore $\cos x$ è > 0 quando $|x| < \frac{\pi}{2}$: pertanto si ha $(4\sin x - 3)\cos x \leq 0$ quando $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \theta$ oppure $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi - \theta$, da cui $A_1 = [-\frac{\pi}{2}, \theta] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi - \theta]$ (unione di due intervalli compatti). D'altra parte, poiché e^{-n} tende a 0^+ , la successione $a_n = 4(e^{-n} - 1) = -4 + 4e^{-n}$ è decrescente e tende a -4 partendo da $a_1 = -4 + \frac{4}{e} \sim -2,5$, valore minore di $-\frac{\pi}{2} \sim -1,57$: perciò l'insieme A è l'unione disgiunta dei due intervalli compatti di A_1 con la famiglia di punti isolati di A_2 . Dunque A è limitato con $\sup A = \max A = \pi - \theta$, $\inf A = -4$ ma senza minimo; non è aperto (ad esempio non è intorno dei suoi punti di A_2) ne' chiuso (è inferiormente limitato ma non ha minimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_1 meno gli estremi; i punti isolati sono quelli di A_2 ; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche -4 ; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_2); infine, quelli di frontiera sono -4 , i punti isolati di A_2 , e gli estremi degli intervalli di A_1 .

2. (a) (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 1 - e^{x-2\sqrt{x}}$ è $[0, +\infty[$. Passiamo ora alle fibre, ovvero gli insiemi $g^{-1}(y) = \{x : g(x) = y\}$ al variare di y nel codominio $\mathbb{R}$. Da $g(x) = y$ si ricava $e^{x-2\sqrt{x}} = 1 - y$, da cui subito la prima condizione necessaria $1 - y > 0$, ovvero $y < 1$: ciò stabilito, applicando il logaritmo ad ambo i membri ricaviamo $x - 2\sqrt{x} = \log(1 - y)$, ovvero (posto $t = \sqrt{x} \geq 0$) l'equazione $t^2 - 2t - \log(1 - y) = 0$, che sotto la condizione $1 + \log(1 - y) \geq 0$ (ovvero $\log(1 - y) \geq -1$, ovvero $1 - y \geq \frac{1}{e}$, ovvero $y \leq 1 - \frac{1}{e}$) dà $t = \sqrt{x} = 1 \pm \sqrt{1 + \log(1 - y)}$, da cui $x_+(y) = (1 + \sqrt{1 + \log(1 - y)})^2$ (sempre presente per ogni $y \leq 1 - \frac{1}{e}$) oppure $x_-(y) = (1 - \sqrt{1 + \log(1 - y)})^2$ (presente quando in più vale $1 - \sqrt{1 + \log(1 - y)} \geq 0$, ovvero $\sqrt{1 + \log(1 - y)} \leq 1$, ovvero $\log(1 - y) \leq 0$, ovvero $1 - y \leq 1$, ovvero $y \geq 0$); notiamo altresì che $x_+(1 - \frac{1}{e}) = x_-(1 - \frac{1}{e}) = 1$. Ricapitolando, abbiamo le seguenti fibre:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset & (\text{se } y > 1 - \frac{1}{e}), \\ \{1\} & (\text{se } y = 1 - \frac{1}{e}), \\ \{x_-(y), x_+(y)\} & (\text{se } 0 \leq y < 1 - \frac{1}{e}), \\ \{x_+(y)\} & (\text{se } y < 0). \end{cases}$$

Dal calcolo appena fatto è evidente che l'immagine di g (ovvero gli y del codominio con fibra non vuota) è $] -\infty, 1 - \frac{1}{e}]$, e che g ha massimo assoluto $1 - \frac{1}{e}$ (assunto nell'unico punto della fibra $g^{-1}(1 - \frac{1}{e})$, ovvero $x = 1$); e che g non è ne' iniettiva ne' suriettiva. Per rendere g suriettiva basta corestringerla alla sua immagine $] -\infty, 1 - \frac{1}{e}]$. Per renderla iniettiva, notato che $x_-(y) \leq 1 \leq x_+(y)$ e che per $x = 1$ si ha l'uguaglianza, se restringiamo g a $[1, +\infty[$ otteniamo l'effetto di avere fibre fatte di uno e un solo elemento $x_+(y)$, in altre parole $g : [1, +\infty[\rightarrow] -\infty, 1 - \frac{1}{e}]$ diventa biiettiva con inversa $x_+ :] -\infty, 1 - \frac{1}{e}] \rightarrow [1, +\infty[$ data da $x_+(y) = (1 + \sqrt{1 + \log(1 - y)})^2$.

(b) L'antiimmagine $g^{-1}([0, 2])$ è data dalla condizione $0 \leq g(x) < 2$. La disequazione $g(x) < 2$ equivale a $e^{x-2\sqrt{x}} > -1$, e nel dominio è sempre verificata (com'era ovvio guardando le fibre di g); invece per $g(x) \geq 0$ otteniamo $e^{x-2\sqrt{x}} \leq 1$, ovvero $x - 2\sqrt{x} \leq 0$, che nel dominio $x \geq 0$ equivale a $\sqrt{x} \leq 2$, ovvero $0 \leq x \leq 4$. In altre parole, $g^{-1}([0, 2]) = [0, 4]$.

• Per il calcolo dell'immagine $g([0, 2])$ usiamo il metodo della fibra: per ogni y del codominio dobbiamo controllare se almeno uno degli elementi della fibra $g^{-1}(y)$ sta in $[0, 2]$. Di certo a tale immagine non appartengono gli $y > 1 - \frac{1}{e}$ (la loro fibra è vuota). Invece vi appartiene $y = 1 - \frac{1}{e}$, perché $0 \leq 1 < 2$. Per quanto riguarda gli y tali che $0 \leq y < 1 - \frac{1}{e}$, si ha $0 \leq x_-(y) < 2$ se e solo se $0 \leq 1 - \sqrt{1 + \log(1 - y)} < 2$, sempre vero per essi: dunque senza andare a scomodare anche $x_+(y)$ possiamo già dire che tutti gli y tali che $0 \leq y < 1 - \frac{1}{e}$ appartengono all'immagine cercata. Infine, per quanto riguarda gli $y < 0$ si ha $0 \leq x_+(y) < 2$ se e solo se $0 \leq 1 + \sqrt{1 + \log(1 - y)} < 2$, ovvero $(-1 \leq) \sqrt{1 + \log(1 - y)} < 1$, ovvero $\log(1 - y) < 0$, ovvero $1 - y < 1$, ovvero $y > 0$, incompatibile con $y < 0$. Ne deduciamo che $g([0, 2]) = [0, 1 - \frac{1}{e}]$.

3. Poniamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x \log^2 x - (x-1)^2}{(x^2-1) \arctg x}$. • In 0^+ , $N(x)$ tende a -1 mentre $D(x)$ tende a 0^- : il limite è dunque in forma determinata, e vale $+\infty$. • In 1 il limite è in forma indeterminata $0/0$: posto $t = x - 1$ diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t) \log^2(1+t) - t^2}{t(t+2) \arctg(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + o_0(t^3))^2 - t^2}{t \cdot 2 \cdot \frac{t}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)(t^2 + \frac{1}{3}t^4 - t^3 + \frac{2}{3}t^4 + o_0(t^4)) - t^2}{t \cdot 2 \cdot \frac{t}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12}t^4}{\frac{1}{2}t} = \lim_{t \rightarrow 0} (-\frac{1}{6\pi})t^3 = 0$. • Infine, si ha $N(x) \sim_{+\infty} -x^2$ e $D(x) \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2}x^2$: ne segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{\frac{\pi}{2}x^2} = -\frac{2}{\pi}$.

4. (a) (Figura 2) Il dominio di $f(x) = \frac{e^x - x^2}{x+1}$ è $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio; non vi sono simmetrie, ne' periodi. Gli zeri si hanno quando $e^x = x^2$, che un confronto grafico mostra accadere solo in un punto $x = a \sim -0,7$. Per il segno, il numeratore è > 0 per $x > a$, il denominatore per $x > -1$, dunque si ha $f(x) > 0$ quando $x < -1$ oppure $x > a$. I limiti notevoli sono in $\mp\infty$ e $-1^\mp$: poiché $f(x) \sim_{-\infty} \frac{-x^2}{x} = -x$ vale $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ (con probabile asintoto obliquo di pendenza -1), mentre $f(x) \sim_{+\infty} \frac{e^x}{x}$ e dunque anche $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (ma con crescita di tipo esponenziale); d'altra parte si ha $\lim_{x \rightarrow -1^\mp} f(x) = \pm\infty$. Esaminiamo dunque la questione dell'asintoto obliquo a $-\infty$: si ha $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{x+1} = 1$, pertanto si trova l'asintoto $y = 1 - x$; e poiché l'equazione $f(x) = 1 - x$ non ha soluzioni per $x < 0$ (infatti si ottiene $\frac{e^x - 1}{x+1} = 0$, con unica soluzione $x = 0$) e $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$,

il grafico di f tende all'asintoto da sopra. • Derivando si ha $f'(x) = \frac{(e^x - 2x)(x+1) - (e^x - x^2)}{(x+1)^2} = \frac{x(e^x - x - 2)}{(x+1)^2}$: si ha $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ oppure quando $e^x - x - 2 = 0$, ovvero $e^x = x + 2$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in due punti $x = b \sim -1,8$ e $x = c \sim 1,1$; per il segno, il fattore $e^x - x - 2$ è > 0 quando $e^x > x + 2$, ovvero per $x < b$ oppure $x > c$, pertanto si ha $f'(x) > 0$ quando $b < x < -1$, $-1 < x < 0$ o $x > c$, e ne deduciamo che $x = 0$ è punto di massimo locale (con $f(0) = 1$) mentre $x = b$ e $x = c$ sono punti di minimo locale (con $f(b) \sim 3,8$ e $f(c) \sim 0,8$). • Derivando ulteriormente, dopo pazienti calcoli si ottiene infine $f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)-2}{(x+1)^3}$: il numeratore è ≥ 0 quando $x^2 + 1 \geq 2e^{-x}$, ed un confronto grafico mostra che esiste un punto $c \sim 0,5$ tale che ciò è verificato quando $x \geq c$; ne segue che $f''(x) \geq 0$ (ovvero f è convessa) per $x < -1$ oppure $x \geq c$, così che $x = c$ è un punto di flesso.

(b) Lo sviluppo di f al II ordine in $-\infty$ è quello del suo asintoto obliquo, ovvero $f(x) = -x + 1 + o_{-\infty}(1)$. • In $x = 0$ la funzione è C^∞ e già sappiamo che $f'(0) = 0$, dunque per Taylor vale $f(x) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o_0(x^2) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$.

• Come detto prima, la parte principale di f a $+\infty$ è $\frac{e^x}{x}$; si ha poi $f(x) - \frac{e^x}{x} = \frac{-e^x - x^3}{x(x+1)} \sim_{+\infty} -\frac{e^x}{x^2}$, pertanto lo sviluppo di f al II ordine in $+\infty$ (nella scala esponenziali-potenze $x^\alpha e^{\beta x}$) è $f(x) = x^{-1}e^x - x^{-2}e^x + o_{+\infty}(x^{-2}e^x)$.

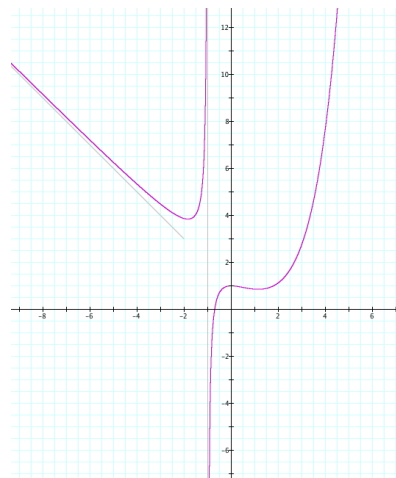
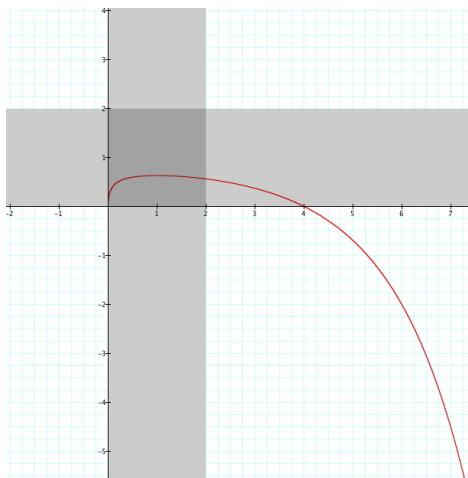
5. Posto $2x + 1 = t^2$ (da cui $x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, e $dx = t dt$) si ha $\int_0^4 e^{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 t e^t dt = ((t-1)e^t)_1^3 = 2e^3 \sim 40$. • Si può decomporre $\frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{x^3+1}$ ottenendo $a+b = -a+b+c = 0$ e $a+c = 1$, con soluzione $(a, b, c) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$: pertanto $\int \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int (\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}) dx = \frac{1}{3} (\log|x+1| - \int \frac{x-2}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx) = \frac{1}{3} (\log|x+1| - \frac{4}{3} \int \frac{x-2}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1} dx) =$ [posto $t = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$, da cui $x = \frac{1}{2}(t\sqrt{3}+1)$ e $dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$] $\frac{1}{3} (\log|x+1| - \int \frac{t-\sqrt{3}}{t^2+1} dt) = \frac{1}{3} (\log|x+1| - \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \sqrt{3} \arctg t) + k = \frac{1}{3} (\log|x+1| - \frac{1}{2} \log(x^2-x+1) + \sqrt{3} \arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})) + k = \frac{1}{3} (\log \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3} \arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})) + k$.

Pertanto $I_a = \int_0^a \frac{dx}{x^3+1} = (\frac{1}{3} (\log \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2-x+1}} + \sqrt{3} \arctg(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})))_0^a = \frac{1}{3} (\log \frac{a+1}{\sqrt{a^2-a+1}} + \sqrt{3} \arctg(\frac{2a-1}{\sqrt{3}})) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$. Il limite $\lim_{a \rightarrow +\infty} I_a = \frac{1}{3} (\sqrt{3} \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ è l'integrale generalizzato di $\frac{1}{x^3+1}$ su $[0, +\infty[$, la più naturale nozione di area della regione di piano infinita compresa tra grafico e semiasse: sarà oggetto di studio nei successivi corsi di Analisi.

6. La dinamica $z(t)$ obbedisce alla legge di Newton $m\ddot{z} = -\beta\dot{z} - mg - kz + A \sin t$, ove $\dot{z} = \frac{d}{dt}z(t)$, $\ddot{z} = \frac{d^2}{dt^2}z(t)$ e con $m = 1 \text{ Kg}$, $\beta = 2 \frac{\text{N} \cdot \text{sec}}{\text{m}}$, $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ e $g \sim 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$, ovvero $\ddot{z} + 2\dot{z} + 2z = -g + A \sin t$ (ove ora A ha dimensione fisica $\frac{\text{N}}{\text{Kg}} = \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$), equazione differenziale del 2o ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica ha radici $-1 \pm i$, dunque lo spazio delle soluzioni reali dell'omogenea associata è $e^{-t}(U \cos t + V \sin t)$, con $U, V \in \mathbb{R}$; una soluzione particolare per il termine non omogeneo $b_1(t) \equiv -g$ è chiaramente la costante $\tilde{z}_1(t) \equiv -\frac{1}{2}g$; una per il termine non omogeneo $b_2(t) = A \sin t$ avrà la forma $\tilde{z}_2(t) = a \cos t + b \sin t$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$ (perché i non è radice caratteristica), e imponendo che $\ddot{\tilde{z}}_2 + 2\dot{\tilde{z}}_2 + 2\tilde{z}_2 = A \sin t$ si ottiene $(a, b) = (-\frac{2}{5}A, \frac{1}{5}A)$. Pertanto lo spazio delle soluzioni reali dell'equazione completa è $z(t) = e^{-t}(U \cos t + V \sin t) - \frac{1}{2}g - \frac{1}{5}A(2 \cos t - \sin t)$ al variare di $U, V \in \mathbb{R}$; e imponendo le condizioni iniziali $z(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = 0$ si ottiene $U - \frac{1}{2}g - \frac{2}{5}A = 0$ e $V - U + \frac{1}{5}A = 0$, da cui $(U, V) = (\frac{1}{2}g + \frac{2}{5}A, \frac{1}{2}g + \frac{1}{5}A)$, ovvero la dinamica

$$z(t) = z_{\text{trans}}(t) + z_{\text{perm}}(t) = (e^{-t}((\frac{1}{2}g + \frac{2}{5}A) \cos t + (\frac{1}{2}g + \frac{1}{5}A) \sin t)) + (-\frac{1}{2}g - \frac{1}{5}A(2 \cos t - \sin t)).$$

Si noti che all'avanzare del tempo t la componente $z_{\text{trans}}(t)$ relativa all'equazione omogenea si spegne a 0 (*regime transitorio*), mentre quella relativa ai termini non omogenei $z_{\text{perm}}(t) = -\frac{1}{2}g - \frac{1}{\sqrt{5}}A \cos(t + \phi)$ (ove $\phi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$) rappresenta un'oscillazione di ampiezza $\frac{1}{\sqrt{5}}A$ e fase ϕ attorno alla posizione di equilibrio gravitazionale $-\frac{1}{2}g$ (*regime permanente*). Quest'ultima osservazione permette anche di rispondere alla domanda conclusiva: il valore di A per il quale la pallina asintoticamente oscilla con quota massima $z = 0$ è dato da $-\frac{1}{2}g + \frac{1}{\sqrt{5}}A = 0$, ovvero $A = \frac{\sqrt{5}}{2}g \sim 11 \text{ N}$.

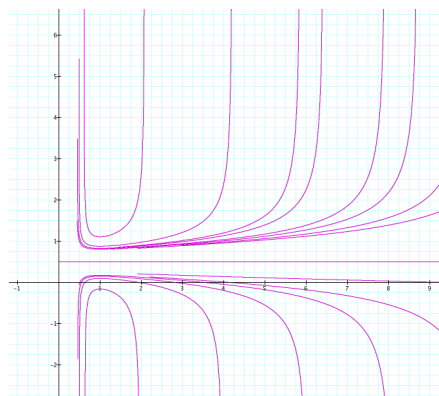
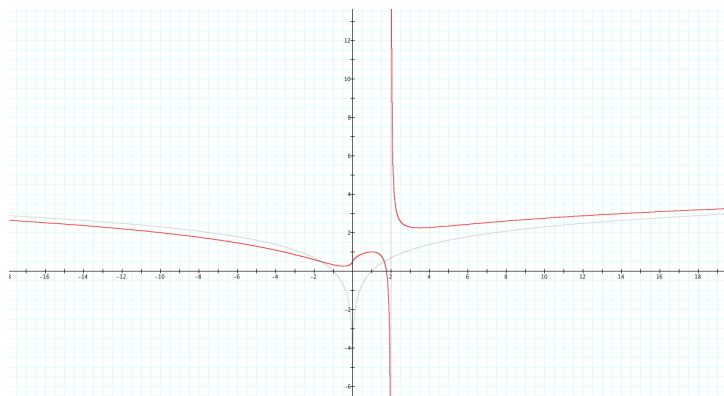


1. Ex. 2: grafico di $g(x)$, immagine e antiimmagine. 2. Ex. 4: grafico di $f(x)$.

1. Sia ha $A = A_1 \cup A_2$, ove $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| + \sqrt{|x+1|} < 3\}$ e $A_2 = \{2n - 2^n : n \in \mathbb{N}\}$. La disequazione $|x| + \sqrt{|x+1|} < 3$ equivale a $\sqrt{|x+1|} < 3 - |x|$, e un confronto grafico tra $\sqrt{|x+1|}$ (radice traslata di 1 a sinistra e simmetrizzata) e $3 - |x|$ (il modulo cambiato di segno e alzato di 3) mostra chiaramente che ciò è verificato in un intervallo aperto limitato $]a, b[$ ove $-3 < a < -1$ e $1 < b < 2$: passando al calcolo esatto di a e b , quando $-3 < x < -1$ si ha $\sqrt{-(x+1)} = 3 - (-x)$ se e solo se $-(x+1) = (3+x)^2$, ovvero $x^2 + 7x + 10 = 0$, che in $] -3, -1[$ dà $a = -2$; mentre quando $1 < x < 2$ si ha $\sqrt{x+1} = 3 - x$ se e solo se $x+1 = (3-x)^2$, ovvero $x^2 - 7x + 8 = 0$, che in $]1, 2[$ dà $b = \frac{7-\sqrt{17}}{2} \sim 1,4$. Pertanto $A_1 =] -2, \frac{7-\sqrt{17}}{2} [$. D'altra parte la successione $a_n = 2n - 2^n$ parte dal valore $a_1 = a_2 = 0$ ed è poi strettamente decrescente (infatti $a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2^{n+1} - (2n - 2^n) = 2 - 2^n < 0$ se $n \geq 2$) e tende a $-\infty$ (ricordando che $\frac{n}{2^n} \rightarrow 0$): notato che $a_1 = a_2 = 0$ già appartengono a A_1 mentre $a_3 = -2$ (che è uno dei due estremi di A_1) e i successivi no, l'insieme A risulta formato dall'intervallo semiaperto $[-2, \frac{7-\sqrt{17}}{2} [$ e dai punti isolati $a_n = 2n - 2^n$ per $n \geq 4$ (ovvero $a_4 = -8, a_5 = -22, \dots$) che tendono a $-\infty$. Dunque A è superiormente limitato, con $\sup A = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$ ma senza massimo; non è aperto (non è intorno del suo punto -2) ne' chiuso (è superiormente limitato ma non ha massimo), ne' compatto ne' discreto; i punti interni sono quelli di A_1 ; i punti isolati sono quelli di A_2 da a_4 in poi; i punti di aderenza sono tutti i suoi, e anche $\frac{7-\sqrt{17}}{2}$ e $-\infty$; quelli di accumulazione sono tutti quelli di aderenza tranne gli isolati (quelli di A_2 da a_4 in poi); infine, quelli di frontiera sono $-\infty$, i punti isolati (quelli di A_2 da a_4 in poi) e gli estremi -2 e $\frac{7-\sqrt{17}}{2}$ di A_1 .
2. Nella successione $a_n = (n!)^{\alpha-2} - n^\alpha \alpha^{n-1}$ esaminiamo dapprima i comportamenti dei due addendi: $(n!)^{\alpha-2}$ tende a $+\infty$ se $\alpha > 2$, è la costante 1 se $\alpha = 2$ e tende a 0^+ se $\alpha < 2$; invece (ricordando che se $|b| > 1$ allora n^a/b^n tende a 0) si ha che $n^\alpha \alpha^{n-1}$ tende a ∞ se $\alpha < -1$, tende a 0 se $-1 \leq \alpha < 1$, e tende a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$. Pertanto per $\alpha \leq 2$ non vi sono forme indeterminate: la successione a_n tende a ∞ se $\alpha < -1$, tende a 0 se $-1 \leq \alpha < 1$, e tende a $-\infty$ se $1 \leq \alpha \leq 2$. Invece se $\alpha > 2$ siamo in forma indeterminata $+\infty - \infty$: ma raccogliendo $(n!)^{\alpha-2}$ e ricordando che se $c > 0$ allora $n^a b^n / (n!)^c$ tende a 0 (criterio del rapporto) concludiamo che il limite vale $+\infty$.
3. Poniamo $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{e^{\sin \pi x} - \pi x \sqrt{1-x} - 1}{(x-1)\sqrt{x}}$. • Per $x \sim 0^+$ il limite è in forma indeterminata $0/0$: sviluppando si ha $N(x) = e^{\sin \pi x} - 1 - \pi x \sqrt{1-x} = \sin \pi x + \frac{1}{2}(\sin \pi x)^2 + o_0(x^2) - \pi x(1 + \frac{1}{2}(-x) - \frac{1}{8}(-x)^2 + o_0(x^2)) = (\pi x + o_0(x^2)) + (\frac{1}{2}\pi^2 x^2 + o_0(x^2)) + o_0(x^2) - \pi x + \frac{1}{2}\pi x^2 + o_0(x^2) = \frac{\pi(\pi+1)}{2}x^2 + o_0(x^2) \sim \frac{\pi(\pi+1)}{2}x^2$; d'altra parte $D(x) \sim -\sqrt{x}$, pertanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\pi(\pi+1)}{2}x^2}{-\sqrt{x}} = 0^-$. • Anche per $x \sim 1$ il limite è in forma indeterminata $0/0$: posto $t = x - 1$ esso diventa $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin \pi t} - \pi(1+t)\sqrt{|t|} - 1}{t\sqrt{1+t}}$. Si ha $e^{-\sin \pi t} - 1 \sim -\sin \pi t \sim -\pi t = o_0(\sqrt{|t|})$, perciò $N(t) \sim -\pi\sqrt{|t|}$; d'altra parte $D(t) \sim t$, pertanto $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{-\pi\sqrt{|t|}}{t} = \mp\infty$. • Infine, per $x \sim +\infty$ si ha $|e^{\sin \pi x} - 1| \leq e + 1$ (limitata), dunque $N(x) \sim_{+\infty} -\pi x \sqrt{x}$; d'altra parte $D(x) \sim_{+\infty} x\sqrt{x}$, dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\pi x \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} = -\pi$.
4. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x) = \frac{x \log |x| - 1}{x-2} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty$ in tutto il suo dominio; non vi sono simmetrie, ne' periodi. Gli zeri si hanno quando $x \log |x| = 1$, ovvero $\log |x| = \frac{1}{x}$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in un solo punto $a \in]1, 2[$ (vale $a \sim 1,8$). Per il segno, il numeratore è > 0 quando $x \log |x| > 1$, il che per $x \geq 0$ accade quando $\log |x| \geq \frac{1}{x}$, ovvero per $x > a$; il denominatore è > 0 quando $x > 2$; dunque $f(x) > 0$ quando $x < a$ oppure $x > 2$. I limiti notevoli sono in $\mp\infty, 0^\pm$ e $2^\mp$: vale $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \frac{1}{2}$ (dunque f è estendibile per continuità in $x = 0$ col valore $f(0) = \frac{1}{2}$), $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f(x) = \pm\infty$, mentre essendo chiaramente $f(x) \sim_{\pm\infty} \log |x|$ si ha $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ (con andamento logaritmico, dunque niente asintoti lineari). Notiamo anche che $f(x) - \log |x| = \frac{2 \log |x| - 1}{x-2}$ è infinitesimo a $\pm\infty$, in altre parole $\log |x|$ è asintoto per f a $\pm\infty$. • Derivando si ottiene $f'(x) = \frac{(\log |x| + 1)(x-2) - (x \log |x| - 1)}{(x-2)^2} = \frac{x-1-2 \log |x|}{(x-2)^2}$: si ha $f'(x) = 0$ quando $\log |x| = \frac{1}{2}(x-1)$, che un facile confronto grafico mostra accadere in $x = 1$ e in altri due punti $b \in]-1, 0[$ e $c \in]3, 4[$ (vale $b \sim -0,5$ e $c \sim 3,5$); e $f'(x) > 0$ quando $\log |x| < \frac{1}{2}(x-1)$, ovvero per $b < x < 0, 0 < x < 1$ e $x > c$, pertanto b e c sono punti di minimo relativo e $x = 1$ un punto di massimo relativo (con $f(b) \sim 0,3, f(1) = 1$ e $f(c) \sim 2,3$). Notiamo anche che $\lim_{x \rightarrow 0^\mp} f'(x) = +\infty$, dunque $f(x)$ non si può estendere anche per derivabilità in $x = 0$ (il grafico presenta un punto a tangente verticale). • Derivando ancora, si ottiene infine $f''(x) = \frac{4x \log |x| - (x^2 + 2x - 4)}{x(x-2)^3}$: il numeratore è > 0 quando $4x \log |x| > x^2 + 2x - 4$, il che per $x \geq 0$ accade quando $\log |x| \geq \frac{x^2 + 2x - 4}{4x}$, che un accurato confronto grafico mostra essere vero quando $d < x < 0, 0 < x < 2$ e $2 < x < \ell$ per certi punti $d \sim -1,8$ e $\ell \sim 5,6$; il denominatore è > 0 per $x < 0$ oppure $x > 2$; pertanto $f''(x) > 0$ (ovvero f è strettamente convessa) quando $d < x < 0$ o $2 < x < \ell$, e i punti $x = d$ e $x = \ell$ sono punti di flesso; anche $x = 0$ è in realtà un punto di flesso, singolare.
- (b) In 0^+ la parte principale è il valore finito del limite, ovvero $\frac{1}{2}$; si ha poi $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{x(2 \log x - 1)}{2(x-2)} \sim_{0^+} -\frac{1}{2}x \log x$, pertanto $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \log |x| + o_0(x \log x)$ (nella scala potenze-logaritmo). • Anche in 1 la parte principale di f è il valore finito $f(1) = 1$; d'altra parte $f'(0) = 0$, dunque per Taylor si ha $f(x) = f(1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 + o_1((x-1)^2) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$. • Come detto, la parte principale di f in $+\infty$ è $\log |x|$; si ha poi

$f(x) - \log|x| = \frac{2 \log|x|-1}{x-2} \sim_{+\infty} 2 \frac{\log|x|}{x}$, pertanto $f(x) = \log|x| + 2 \frac{\log|x|}{x} + o_{+\infty}(\frac{\log|x|}{x})$ (scala potenze-logaritmo).

5. (a) Da $h(z) = (1+i)\bar{z}^2 = i-7$ si ottiene $\bar{z}^2 = \frac{-7+i}{1+i} = \frac{(-7+i)(1-i)}{2} = -3+4i$, da cui $z^2 = -3-4i$, che dà $z = \pm(1-2i)$. • Da $h(z) = (1+i)\bar{z}^2 = z$ si ricava $2\bar{z}^2 = (1-i)z$: posto $z = x+iy$ si ha $2(x^2-y^2-2ixy) = (1-i)(x+iy) = (x+y)+i(y-x)$, che equivale al sistema dato da $2(x^2-y^2) = x+y$ e $-4xy = y-x$. La prima equazione dà $(x+y)(2x-2y-1) = 0$, che dà $y = -x$ oppure $y = x - \frac{1}{2}$: nel primo caso, dalla seconda equazione si ha $4x^2 = -2x$, da cui $x = 0$ oppure $x = -\frac{1}{2}$ (che danno le soluzioni $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}(-1+i)$); nel secondo caso, dalla seconda equazione si ha $8x^2 - 4x - 1 = 0$, da cui $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$ (che danno le soluzioni $z = \frac{1}{4}((1 \pm \sqrt{3}) + i(-1 \pm \sqrt{3}))$).
- (b) La fibra di h su $w \in \mathbb{C}$, ovvero le soluzioni di $h(z) = (1+i)\bar{z}^2 = w$, sono date da $\bar{z}^2 = \frac{1}{2}w(1-i)$, ovvero $z^2 = \frac{1}{2}\bar{w}(1+i)$: se $w \neq 0$ si ha $z = 0$, mentre se $w \neq 0$ si trovano le due radici quadrate di $\frac{1}{2}\bar{w}(1+i)$, l'una opposta dell'altra. Questo mostra che h è suriettiva ma non iniettiva. • L'immagine di $\mathbb{R}$ è data da $\{t^2(1+i) : t \in \mathbb{R}\}$, famiglia dei multipli scalari non negativi di $1+i$ (sul piano di Gauss, la semiretta chiusa uscente da 0 e passante per $1+i$). L'antiimmagine di $\mathbb{R}$ è data dagli $z \in \mathbb{C}$ tali che $(1+i)\bar{z}^2 = t \in \mathbb{R}$, ovvero $\bar{z}^2 = \frac{1}{2}t(1-i)$ per qualche $t \in \mathbb{R}$, ovvero $z^2 = \tau(1+i)$ per qualche $\tau \in \mathbb{R}$, ovvero $z = 0$ e le radici quadrate di multipli scalari di $1+i$: si tratta dei numeri complessi di argomento $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$. • L'immagine di $\mathbb{U} = \{z : |z| = 1\}$ è data da $(1+i)\bar{z}^2$ al variare di z con $|z| = 1$: è la circonferenza dei numeri di modulo $|1+i| = \sqrt{2}$. L'antiimmagine di $\mathbb{U}$ è data dai $z \in \mathbb{C}$ tali che $|h(z)| = 1$, ovvero $|1+i||\bar{z}^2| = \sqrt{2}|z|^2 = 1$: è la circonferenza dei numeri di modulo $2^{-\frac{1}{4}}$.
6. Un'eventuale soluzione costante $y \equiv k$ dell'equazione differenziale $x^2 y' = (2y-1)^3 \log x$ deve soddisfare $0 = (2k-1)^3 \log x$ per ogni $x > 0$, dunque l'unica soluzione costante è $y \equiv \frac{1}{2}$. L'equazione ha senso per $x > 0$, dunque possiamo portare senza problemi l'equazione in forma normale $y' = \frac{(2y-1)^3 \log x}{x^2}$: per le soluzioni definite all'intorno di $x = 1$ si ha dunque $y'(1) = 0$; inoltre, poiché il secondo membro è C^∞ sia in x che in y si ha esistenza e unicità per ogni dato iniziale (x_0, y_0) con $x_0 > 0$, ed essendo $y \equiv \frac{1}{2}$ una soluzione ciò implica che tutte le altre soluzioni saranno sempre sopra o sempre sotto quota $\frac{1}{2}$: per le prime/seconde si avrà decrescenza/crescenza prima di $x = 1$ e crescita/decrecenza dopo, dunque $x = 1$ sarà punto di minimo/massimo assoluto. L'unica simmetria che ha senso indagare è quella rispetto alla quota $\frac{1}{2}$, ovvero se $\varphi(x)$ è soluzione ci chiediamo se lo sarà anche $\psi(x) = 1 - \varphi(x)$: e così accade, perché $\psi'(x) = -\varphi'(x) = -\frac{(2\varphi(x)-1)^3 \log x}{x^2} = \frac{(1-2\varphi(x))^3 \log x}{x^2} = \frac{(2\psi(x)-1)^3 \log x}{x^2}$. • Come visto, se $\alpha = \frac{1}{2}$ si ha $y_{\frac{1}{2}}(x) \equiv \frac{1}{2}$. Se invece $\alpha \neq \frac{1}{2}$ possiamo separare le variabili, ottenendo $(2y-1)^{-3} dy = x^{-2} \log x dx$: integrando (a sinistra in modo immediato, a destra per parti) si ha allora $-\frac{1}{4}(2y-1)^{-2} = -\frac{1}{x} \log x - \int (-\frac{1}{x}) \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x}(1+\log x) + k$, da cui (ribattezzando più volte la costante additiva) $(2y-1)^{-2} = -\frac{1}{x} \log x - \int (-\frac{1}{x}) \frac{1}{x} dx = \frac{4}{x}(1+\log x) + k = \frac{kx+4(1+\log x)}{x}$, da cui $(2y-1)^2 = \frac{x}{kx+4(1+\log x)}$, da cui $y(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{x}{kx+4(1+\log x)}})$ al variare di $k \in \mathbb{R}$; in realtà la condizione di esistenza di dominio $kx+4(1+\log x) > 0$ (ovvero $\log x > -\frac{k}{4}x - 1$) impone che $k > -4$, e per $-4 < k < 0$ dà luogo come dominio a un intervallo aperto limitato di $]0, +\infty[$ contenente $x = 1$, mentre per $k \geq 0$ dà luogo come dominio in $]0, +\infty[$ a una semiretta aperta superiormente illimitata di $]0, +\infty[$ contenente $x = 1$. Imponendo infine che $y(1) = \alpha$ si ha $\alpha = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{\frac{1}{k+4}})$, ovvero $\alpha - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k+4}}$: dunque a seconda che $\alpha \geq \frac{1}{2}$ si deve scegliere il segno $+$ oppure $-$, e dopo ciò si ottiene $k = \frac{1}{(2\alpha-1)^2} - 4$.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. 2. Ex. 6: alcune soluzioni.