Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

TEST n. 1 di Esame Scritto (16/12/2014)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina[1] *alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.*

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \cos x > \cos 2\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n} - 2 : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

2. Determinare il dominio di $g(x) = 3\sin(e^{-x^2}) - 1$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g^{-1}([0, 1[)$ e $g([-1, \frac{1}{2}[)$.

3. Calcolare $\displaystyle\lim_{-\infty, 0, +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \cos x + 2x^3}{\big(3(e^{-x} - 1) - (x+1)\operatorname{arctg} x\big)^2}$ con l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...).

4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1 - 2\log|x|}$ e tracciarne il grafico.[2]

(b) Si può prolungare $f(x)$ anche in $x = 0$? Determinarne poi le parti principali in $-\infty$, -1, 0, 1.

5. Calcolare le primitive di $\dfrac{x^\alpha}{f(x)}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (ove $f(x)$ è quella dell'Ex. 4).

6. ———— *(Quesito sulle equazioni differenziali, argomento non ancora svolto)* ————

---

[1] $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

[2] Non è richiesto lo studio della convessità.

Analisi Matematica I – TEST n. 1 di Esame Scritto (16/12/2014) – Soluzioni.

1. Si ha $A = A_1 \cup A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \cos x > \cos 2\} = [1, 2[\ \cup \bigcup_{k=1}^{+\infty} \ ]-2+2k\pi, 2+2k\pi[$ (unione infinita di intervalli, superiormente illimitata) e $A_2 = \{\frac{(-1)^n}{n} - 2 : n \in \mathbb{N}\} = \{-3, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{4}, -\frac{11}{5}, -\frac{11}{6}, \dots\}$ (insieme discreto di punti, compreso tra -3 e $-\frac{3}{2}$, che salta a sinistra e destra di -2, tendendovi). Dunque A è inferiormente limitato e superiormente illimitato, con $\min A = -3$; i suoi punti interni sono quelli di A_1 tranne 1; quelli di chiusura sono tutti i suoi più -2, $+\infty$ e gli estremi degli intervalli di A_1, e, tra questi, gli isolati sono quelli di A_2 e tutti gli altri sono di accumulazione. Ne ricaviamo che A non è ne' aperto (ad esempio non è intorno del suo punto 1) ne' chiuso (non contiene la sua accumulazione -2); non è ne' compatto ne' discreto. Infine, sono di frontiera i punti -2, $+\infty$, tutti quelli di A_2 e gli estremi degli intervalli di A_1.

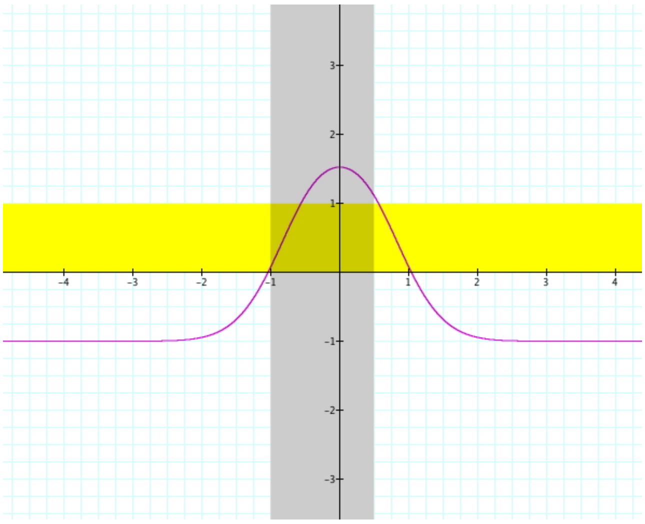
2. (Figura 1) Il dominio di $g(x) = 3\sin(e^{-x^2}) - 1$ è tutto $\mathbb{R}$; si tratta di una funzione pari, dunque ci aspettiamo fibre simmetriche. Da $g(x) = y$ si ricava $\sin(e^{-x^2}) = \frac{y+1}{3}$, che nell'ipotesi $|\frac{y+1}{3}| \leq 1$ (cioè $-4 \leq y \leq 2$) dà $e^{-x^2} = \arcsin \frac{y+1}{3} + 2k\pi$ oppure $e^{-x^2} = \pi - \arcsin \frac{y+1}{3} + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, ma essendo $0 < e^{-x^2} \leq 1$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{y+1}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ l'unica possibilità è $e^{-x^2} = \arcsin \frac{y+1}{3}$ con $0 < \arcsin \frac{y+1}{3} \leq 1$, ovvero $0 < \frac{y+1}{3} \leq \sin 1$, ovvero $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1 \sim 1{,}5$: per tali y si ottiene allora $-x^2 = \log(\arcsin \frac{y+1}{3})$, da cui $x = \mp\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}$. Ricapitolando, per $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1$ si ha $g^{-1}(y) = \left\{-\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}, \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}\right\}$ (due punti distinti, tranne che per $y = 3\sin 1 - 1$ in cui si ottiene il solo punto $g^{-1}(0) = \{0\}$), mentre per $y \leq -1$ o per $y > 3\sin 1 - 1$ si ha $g^{-1}(y) = \varnothing$. La funzione non è dunque ne' iniettiva ne' suriettiva; essa può essere resa biiettiva ad esempio restringendola a $[0, +\infty[$ e corestringendola alla sua immagine $]-1, 3\sin 1 - 1]$, con inversa $g^{-1}(y) = \sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}$. Per il calcolo di $g^{-1}([0,1[)$ va risolta la doppia disequazione $0 \leq g(x) < 1$, che dà $\sqrt{-\log(\arcsin \frac{2}{3})} < |x| \leq \sqrt{-\log(\arcsin \frac{1}{3})}$ (unione disgiunta di due intervalli semiaperti simmetrici tra loro); per il calcolo di $g([-1, \frac{1}{2}[)$ vanno unite le soluzioni y delle disequazioni $-1 \leq -\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})}$ $(< \frac{1}{2})$ e $(-1 \leq)$ $\sqrt{-\log(\arcsin \frac{y+1}{3})} < \frac{1}{2}$ (senza scordare però che deve essere $-1 < y \leq 3\sin 1 - 1$), e alla fine risulta $3\sin \frac{1}{e} - 1 \leq y \leq 3\sin 1 - 1$.

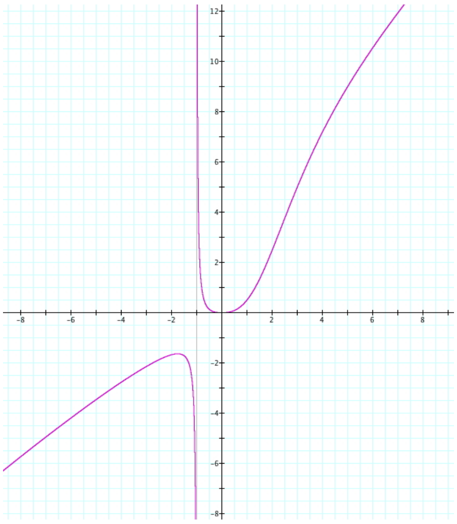
3. Sia $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \cos x + 2x^3}{(3(e^{-x}-1)-(x+1)\operatorname{arctg} x)^2}$. • Vale $f(x) \sim_{-\infty} \frac{2x^3}{(3e^{-x})^2}$, dunque $\lim_{-\infty} f(x) = 0^-$. • In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$. Sviluppando (e notando che $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$) si ottiene $f(x) = \frac{(1-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3))-(1-\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3))+2x^3}{(3(1-x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^2)-1)-(1+x)(x+o_0(x))^2} = \frac{2x^3+o_0(x^3)}{(-4x+o_0(x))^2}$, dunque $\lim_0 f(x) = \lim_0 \frac{2x^3}{16x^2} = 0$. • Infine $f(x) \sim_{+\infty} \frac{2x^3}{(-\frac{\pi}{2}x)^2} = \frac{8}{\pi^2}x$, che tende a $+\infty$.

4. (a) (Figura 2) La funzione $f(x) = \frac{x^2}{x+1-2\log|x|}$ è definita e $\mathcal{C}^\infty$ ovunque tranne che in 0 e nei punti in cui $\log|x| = \frac{1}{2}(x+1)$, il che (come mostra chiaramente un confronto grafico) accade solo in -1. Vanno dunque esclusi 0 e -1: solo che, mentre $\lim_{x\to-1^\mp} f(x) = \infty$, si ha evidentemente $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e dunque f può essere estesa anche in 0 col valore $f(0) = 0$ (almeno per continuità, poi vedremo se in realtà ci sarà maggiore regolarità). Con questa definizione, $x = 0$ è l'unico zero di f; si ha poi $f(x) > 0$ dove $\log|x| < \frac{1}{2}(x+1)$, il che accade per $x > -1$ (tranne che in 0). Si ha chiaramente $f(x) \sim_{\mp\infty} x$, il che fa nascere il sospetto dell'esistenza di asintoti lineari: tuttavia $f(x) - x = \frac{x(2\log|x|-1)}{x+1-2\log|x|} \sim_{\mp\infty} \frac{2x\log|x|}{x} = 2\log|x|$, dunque niente da fare. Derivando (per $x \neq 0, -1$) si ottiene $f'(x) = \frac{x(x+4-4\log|x|)}{(x+1-2\log|x|)^2}$: notiamo subito che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, dunque il prolungamento di f è anche $\mathcal{C}^1$ in $x = 0$ con $f'(0) = 0$. Essendo inoltre $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4\log|x|}{(x+1-2\log|x|)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-4\log|x|}{4\log^2|x|} = 0$, si ha che f è anche derivabile due volte in $x = 0$ (derivando ulteriormente ci si accorgerebbe che in realtà f è ivi di classe $\mathcal{C}^2$). Oltre che in $x = 0$, vale $f'(x) = 0$ dove $\log|x| = \frac{1}{4}x + 1$, il che (altro confronto grafico) accade in un solo punto $x_0 \sim -1{,}7$; e per $x \gtrless 0$ vale $f'(x) > 0$ dove $\log|x| \lesseqgtr \frac{1}{4}x + 1$, dunque per $x < x_1$ o per $x > 0$. Pertanto $x = x_1$ è un punto di massimo locale (con $f(x_1) \sim -1{,}6$), mentre $x = 0$ è di minimo locale.

(b) Sul prolungamento di $f(x)$ in $x = 0$ si è già detto ampiamente in precedenza. Quanto alle parti principali, abbiamo visto che $f(x) \sim_{\mp\infty} \frac{x^2}{x} = x$; vale poi $f(x) \sim_0 \frac{x^2}{-2\log|x|} = -\frac{1}{2}x^2(\log|x|)^{-1}$, mentre in $x = 1$ si ha che f è finita e dunque $f(x) \sim_1 f(1) = \frac{1}{2}$. Occupiamoci infine di $x = -1$. Posto $t = x+1$ si ha $\varphi(t) := f(-1+t) = \frac{(-1+t)^2}{t-2\log(1-t)} = \frac{(-1+t)^2}{t-2(-t+o_0(t))} \sim_0 \frac{1}{3t}$, dunque $f(x) \sim_{-1} \frac{1}{3}(x+1)^{-1}$.

5. Si ha $\int \frac{x^\alpha}{f(x)}\,dx = \int \frac{x+1-2\log|x|}{x^{2-\alpha}}\,dx = \int x^{\alpha-1}\,dx + \int x^{\alpha-2}\,dx - 2\int x^{\alpha-2}\log|x|\,dx$. Vanno allora discussi tre diversi casi.
• Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ si ottiene $\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - 2\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\log|x| - \int \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\frac{1}{x}\,dx\right) = \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1 - 2\log|x| + \frac{2}{\alpha-1}\right) + k$. • Se $\alpha = 0$ si ottiene $\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2}\log|x|\,dx = \log|x| - \frac{1}{x} - 2(-\frac{1}{x}\log|x| - \int(-\frac{1}{x})\frac{1}{x}\,dx) = \log|x| - \frac{1}{x} + \frac{2}{x}\log|x| + \frac{2}{x} + k$.
• Infine, se $\alpha = 1$ si ha $\int 1\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x}\log|x|\,dx = x + \log|x| - \log^2|x| + k$.



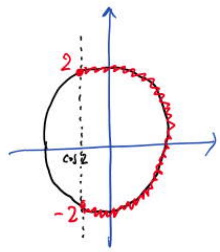


1. Ex. 2: grafico di $g(x)$, con l'antimmagine e immagine richieste. **2.** Ex. 4: grafico di $f(x)$.

TEST D'ESAME SCRITTO

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1, \cos x > \cos 2\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n} - 2 : n \in \mathbb{N}\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\widetilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\widetilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A.

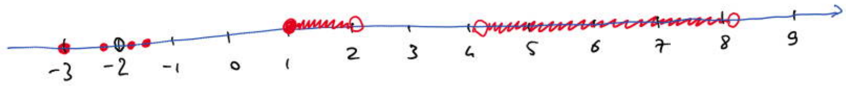
$A = A_1 \cup A_2$. $A_1 = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-2+2k\pi, 2+2k\pi[\right) \cap [1, +\infty[=$



$A_1 = [1, 2[\cup]-2+2\pi, 2+2\pi[\cup]-2+4\pi, 2+4\pi[\cup \dots$

$A_2 = \{-3, -3/2, -7/3, -7/4, \dots\}$

$A =$



È sup. illimitato (sup $= +\infty$ in $\widetilde{\mathbb{R}}$); è inf. lim. (-4 è minorante)

min $A = -3$ ($-3 \in A$, $-3 \leq x \ \forall x \in A$)

A non è aperto (non è intorno del suo punto 1, o anche -3).

né chiuso (-2 e 2 sono di accum. ma $\notin A$). Non è compatto (non è chiuso).

Non è discreto ($1 \in A$ ma non è isolato).

I punti interni sono quelli di A_1 tranne 1.

I punti di aderenza (chiusura) sono tutti quelli di A più -2, gli estremi di A_1 e $+\infty$.

I punti isolati di A sono quelli di A_2; tutti gli altri punti di chiusura sono d'accumul.

I punti di frontiera sono quelli di A_2, -2, gli estremi di A_1 e $+\infty$.

2. Determinare il dominio di $g(x) = 3\sin(e^{-x^2}) - 1$ e la fibra $g^{-1}(y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$. Usare quanto trovato per dire se la funzione è iniettiva, se è suriettiva; come si possono eventualmente modificarne dominio e codominio per renderla biiettiva; calcolare $g^{-1}([0,1[)$ e $g([-1,\frac{1}{2}[)$.

Dominio $\mathbb{R}$; g è pari (dunque fibre simmetriche). È chiaro che $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -1^+$.

Fibre: $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ni y$, risolviamo $g(x) = y$: $3\sin(e^{-x^2}) - 1 = y$

$\sin(e^{-x^2}) = \frac{y+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} e^{-x^2} = \arcsin\frac{y+1}{3} + 2k\pi \\ e^{-x^2} = \pi - \arcsin\frac{y+1}{3} + 2k\pi \end{cases}$ Però bisogna che $\left|\frac{y+1}{3}\right| \le 1$, $|y+1| \le 3$: $-4 \le y \le 2$

In realtà, l'unica delle precedenti eventualità che si può realizzare, essendo $0 < e^{-x^2} \le 1$ e $\left|\arcsin\frac{y+1}{3}\right| \le \pi/2$, $(-4 \le y \le 2)$ è che $e^{-x^2} = \arcsin\frac{y+1}{3}$ (con $k=0$). Ma bisogna che $0 < \arcsin\frac{y+1}{3} \le 1 \iff 0 < \frac{y+1}{3} \le \sin 1 \iff -1 < y \le 3\sin 1 - 1$ $\sim 1,5$

Proseguendo: $-x^2 = \log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)$, $x^2 = -\log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)$,

$x = \pm\sqrt{-\log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)}$. Dunque le fibre di g sono:

$$g^{-1}(y) = \begin{cases} \left\{-\sqrt{-\log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)}, +\sqrt{-\log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)}\right\} & \text{se } -1 < y < 3\sin 1 - 1 \\ \{0\} & \text{se } y = 3\sin 1 - 1 \\ \emptyset & \text{altrove.} \end{cases}$$

Dunque g non è iniettiva (è pari!), né suriettiva (ci sono fibre vuote).

Per renderla iniettiva basta restringere a $[0,+\infty[$; per renderla suriettiva si restringe alla sua immagine $]-1, 3\sin 1 - 1]$ (gli y con fibra $\neq \emptyset$).

Inversa: $g^{-1}(y) = \sqrt{-\log\left(\arcsin\frac{y+1}{3}\right)}$.

Calcolo di antiimmagine e immagine: vedi risoluzione allegata.

3. Calcolare $\lim\limits_{-\infty,\,0,\,+\infty} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \cos x + 2x^3}{\big(3(e^{-x}-1) - (x+1)\operatorname{arctg} x\big)^2}$ con l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...).

$\underline{-\infty}$ $\quad f(x) \sim_{-\infty} \dfrac{2x^3}{(3e^{-x})^2} = \dfrac{2x^3}{9e^{-2x}} \longrightarrow 0^-$

$\underline{0}$ $\quad$ F.i. $\frac{0}{0}$ $\quad f(x) = \dfrac{(1+x^2)^{-1/2} - \cos x + 2x^3}{\big(3(e^{-x}-1) - (1+x)\operatorname{arctg} x\big)^2} =$

$$\frac{\left(\cancel{1} + \cancel{\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^2} + o(x^3)\right) - \left(\cancel{1} - \cancel{\tfrac{x^2}{2}} + o(x^3)\right) + 2x^3}{\left(3\left(\cancel{1} + (-x) + \tfrac{1}{2}(-x)^2 + o(x^2) - \cancel{1}\right) - (1+x)\left(x - \tfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right)^2}$$

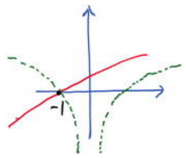
$$\sim_0 \frac{2x^3}{(-4x)^2} = \frac{2x^3}{16x^2} = \frac{x}{8} \longrightarrow 0 .$$

$\underline{+\infty}$ $\quad f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{2x^3}{(x \cdot \pi/2)^2} = \dfrac{2x^3}{\frac{\pi^2}{4}x^2} = \dfrac{8}{\pi^2}x \longrightarrow +\infty .$

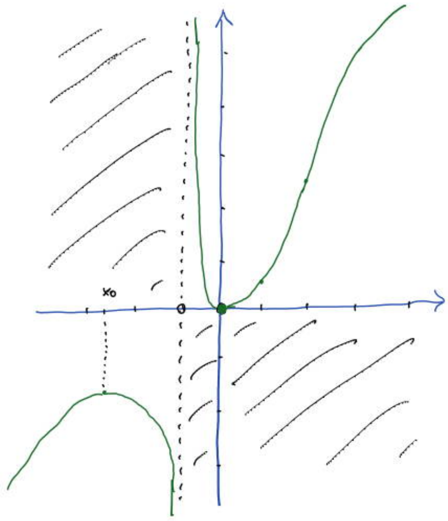
4. (a) Studiare l'andamento di $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1-2\log|x|}$ e tracciarne il grafico.(2)

(b) Si può prolungare $f(x)$ anche in $x=0$? Determinarne poi le parti principali in $-\infty$, -1, 0, 1.

Dominio $\begin{cases} x \neq 0 \\ \lg|x| \neq \frac{x+1}{2} \end{cases}$



$x \neq -1,\ 0$



No parità, no periodi.

Zeri: $f(x)=0$ per $x=0$ NO;

Segno: $f(x)>0$ per $\lg|x| < \frac{x+1}{2} \iff x>-1$ (ma $x \neq 0$)

$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to 0} f(x) \overset{0/\infty}{=} 0$

dunque f è prolungabile per continuità in $x=0$ (con valore $f(0):=0$)

$f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$ il che fa sospettare asintoti obliqui: $f(x)-x = \frac{x^2}{x+1-2\lg|x|} - x = x \cdot \frac{\cancel{x}-\cancel{x}-1+2\lg|x|}{x+1-2\lg|x|} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{2x\lg|x|}{x}$

$\underset{\pm\infty}{\sim} 2\lg|x|$ che è pure un infinito, dunque non c'è asintoto obliquo (anche se la pendenza di f si atterrà su quella di x, ovvero 1).

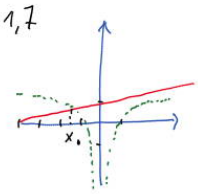
Derivata: $f'(x) = \frac{2x(x+1-2\lg|x|) - x^2(1-2/x)}{(x+1-2\lg|x|)^2} = \frac{x(x+4-4\lg|x|)}{(x+1-2\lg|x|)^2}$.

Notiamo che $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \Rightarrow f$ è prolungabile come $\mathcal{C}^1$ in $x=0$, con $f'(0)=0$.

Altri punti critici: $f'(x)=0$ quando $\lg|x| = \frac{x}{4}+1 \iff x = x_0 \sim -1{,}7$

Crescenza: $f'(x)>0$

	x_0	-1	0	
x	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+4-4\lg\lvert x\rvert$	$-$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	↗	↘	↘	↗
	MAX		min	



$f(x_0) = \frac{x_0^2}{x_0+1-2\left(\frac{x_0}{4}+1\right)} \sim -1{,}6$

$f(1) = \frac{1}{1+1-0} = \frac{1}{2}$; $f(2) = \frac{4}{2+1-2\lg 2} = \frac{4}{3-2\lg 2} \sim \frac{4}{1{,}6} \sim 2{,}5$; $f(4) = \frac{16}{5-4\lg 2} \sim \frac{16}{2{,}2} \sim 7{,}1$

Calcolo di p.p.: vedi risoluzione allegata.

5. Calcolare le primitive di $\dfrac{x^\alpha}{f(x)}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ (ove $f(x)$ è quella dell'Ex. 4).

$$\int \frac{x^\alpha}{\frac{x^2}{x+1-2\log|x|}}\,dx = \int x^{\alpha-2}(x+1-2\log|x|)\,dx = \int \left(x^{\alpha-1}+x^{\alpha-2}-2x^{\alpha-2}\log|x|\right)dx$$

e si tratta di integrare ciascun termine.

- $\displaystyle\int x^{\alpha-1}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{\alpha} & \text{se } \alpha\neq 0 \\ \log|x| & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$; $\quad\bullet\ \displaystyle\int x^{\alpha-2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha\neq 1 \\ \log|x| & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}$;

- $\displaystyle\int x^{\alpha-2}\log|x|\,dx = \begin{cases} \text{se } \alpha=1: & \displaystyle\int \overset{\varphi'(x)}{\frac{1}{x}}\,\overset{\varphi(x)}{\log|x|}\,dx = \frac{\log^2|x|}{2} \\ \text{se } \alpha\neq 1: & \displaystyle\int \overset{g}{x^{\alpha-2}}\,\overset{F}{\log|x|}\,dx = \frac{x^{\alpha-1}\log|x|}{\alpha-1} - \int \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ & \displaystyle = \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(\log|x| - \frac{1}{\alpha-1}\right). \end{cases}$

Dunque:

$$\int \frac{x^\alpha}{f(x)}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha}{\alpha} + \dfrac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(1-2\log|x|+\dfrac{2}{\alpha-1}\right)+K = \dfrac{x^\alpha}{\alpha}+\dfrac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}-2\log|x|\right)+K & (\text{se } \alpha\neq 0,1); \\ \log|x| + \dfrac{1}{x}\,(1+2\log|x|)+K & (\text{se } \alpha=0); \\ x+\log|x|-\log^2|x|+K & (\text{se } \alpha=1). \end{cases}$$