

TEST ESAME SCRITTO - 2

6. Si considerino le equazioni differenziali

$$(i) \quad 4y'' - y = x + 3e^x,$$

$$(ii) \quad x^2 y y' + 2 = 0.$$

Fare l'analisi a priori per (ii) su soluzioni costanti, crescita, convessità, eventuali parità.

Detta poi $\tilde{y}_1(x)$ la soluzione di (i) con $\tilde{y}_1(0) = 1$ e $\tilde{y}_1'(0) = 0$, e $\tilde{y}_2(x)$ quella di (ii) con $\tilde{y}_2(1) = 2$, dire quante sono le soluzioni $t > 0$ di $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_2(t)$.

Analisi a priori per (ii) $x^2 y y' + 2 = 0$

$y \equiv K$ è sol. $\Leftrightarrow 0 + 2 = 0$, assurdo. Dunque no solz costanti.

Notiamo che $x^2 y \neq 0$ (altrimenti $2 = 0$, assurdo), in altre parole:

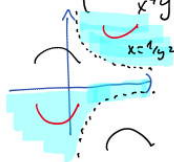
- Nessuna soluzi sarà definita in $x=0$;
- Nessuna soluzi $y(x)$ potrà mai annullarsi

E allora l'eq. (ii) è separabile alla fine anche $y' = -\frac{2}{x^2 y}$

dal che deduco che $y' > 0 \Leftrightarrow y < 0$  e non vi saranno più solz.

Derivando poi la $y'' = -2 \left(-\frac{2xy + x^2 y'}{x^4 y^2} \right) = 2 \frac{2xy - \frac{2}{y}}{x^4 y^2} = 4 \frac{xy^2 - 1}{x^4 y^3}$

Infatti $y'' > 0$



$$xy^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1/y^2$$

Eventuali particolari? Se $\varphi(x)$ una sol. di $y' = -\frac{2}{x^2}y$, e proponiamo
 $\psi(x) := \varphi(-x)$. Allora $\psi'(x) = -\varphi'(-x) = -\left(\frac{-2}{(-x)^2\varphi(-x)}\right) = \frac{2}{x^2\psi(x)}$ No!
 Prov. allora con $\eta(x) = -\varphi(x)$. Allora $\eta'(x) = -\varphi'(-x) = -\left(\frac{-2}{x^2\varphi(x)}\right) = \frac{2}{x^2(-\varphi(x))}$
 $= -\frac{2}{x^2\eta(x)}$ Sì! Dunque la fam. delle sol. è a un m. m. p. con x .

Il problema.

• $4y'' - y = x + 3e^x$. Eq. car. $4z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{2}$.

Sol. omogenea $y(x) = Ae^{x/2} + Be^{-x/2}$, $A, B \in \mathbb{C}$.

$b_1(x) = x \rightarrow \tilde{y}_1(x) = qx + b$: $0 - (qx + b) = x \Leftrightarrow q = -1, b = 0$

$b_2(x) = 3e^x \rightarrow \tilde{y}_2(x) = ke^x$: $(4k - k)e^x = 3e^x \Leftrightarrow k = 1$

Soluzioni: $y(x) = Ae^{x/2} + Be^{-x/2} - x + e^x$.

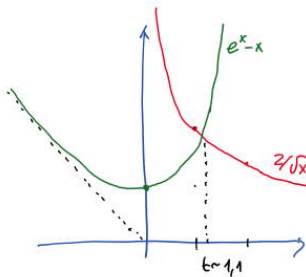
da cui $y'(x) = \frac{1}{2}(Ae^{x/2} - Be^{-x/2}) - 1 + e^x$.

$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + 1 = 1 \\ \frac{1}{2}(A - B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^x - x$

• $\begin{cases} x^2 y y' + 2 = 0 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ Separa: $y dy = -\frac{2}{x^2} dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{2}{x} + K$

$y(1) = 2 \Rightarrow 2 = 2 + K \Rightarrow K = 0$, dunque $\frac{y^2}{2} = \frac{2}{x}$

$\Rightarrow y^2 = \frac{4}{x} \xrightarrow{y(1)=2} y(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, definita per $x > 0$.



Per $x > 0$ c'è una sola intersezione
 ($t \approx 1,1$)

5. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\frac{2\bar{z}-i}{3+iz} + \frac{3z+i}{2} = 0$. Detta poi z_0 la soluzione con parte reale strettamente negativa, trovare un'espressione per le potenze e la radici n -esime di $z_0 - 1$.

$$\frac{2\bar{z}-i}{3+iz} + \frac{3z+i}{2} = 0$$

Cond. $3+iz \neq 0 \Rightarrow z \neq 3i$. Poi $2(2\bar{z}-i) + (3z+i)(3+iz) = 0$

$$4\bar{z} - 2i + 9z + 3iz^2 + 3i - z = 0 \quad 8z + 4\bar{z} + 3iz^2 + i = 0 \quad z = x+iy$$

$$8(x+iy) + 4(x-iy) + 3i(x^2-y^2+2ixy) + i = 0$$

$$(12x - 6xy) + i(4y + 3x^2 - 3y^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x(2-y) = 0 \\ 4y + 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\wedge x=0 \Rightarrow 4y - 3y^2 + 1 = 0 \quad 3y^2 - 4y - 1 = 0 \quad y = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \quad z = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} i$$

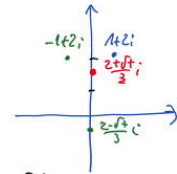
$$\wedge y=2 \quad 8 + 3x^2 - 12 + 1 = 0 \quad x = \pm 1 \quad z = \pm 1 + 2i$$

$$z_0 = -1 + 2i \quad z_0 - 1 = -2 + 2i = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2^{3/2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Dupe $(z_0 - 1)^n = 2^{3n/2} e^{i\frac{3\pi n}{4}}$ Es.: $m=2: 2^3 e^{i\frac{3\pi}{2}} = -8i$

Rad. n -esime: $w_j = 2^{3/2n} e^{\frac{3\pi/4 + 2j\pi}{n} i} \quad (j=0, 1, \dots, m-1)$.



4. Sia $f(x) = |x| - 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right)$.

(a) Studiare l'andamento di $f(x)$ e tracciarne il grafico.

(b) Determinare gli sviluppi di $f(x)$ in 0^+ , $\frac{1}{2}$ e 2 con due termini significativi.

$$f(x) = |x| - 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right)$$

$$\text{Domínio: } -1 \leq \frac{x+1}{3} \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq x+1 \leq 3 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$$

$$\text{Da cui } f \text{ è continua; } f(-4) = 4 - 2 \arcsin(-1) = 4 + \pi \sim 7,1$$

$$f(2) = 2 - 2 \arcsin(1) = 2 - \pi \sim -1,1; \quad f(0) = -2 \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \sim -0,7$$

f è C^∞ tranne che in $x=0$ (probabile pt angolare),

e in $x=-4$ e $x=2$ (probabile valore infinito).

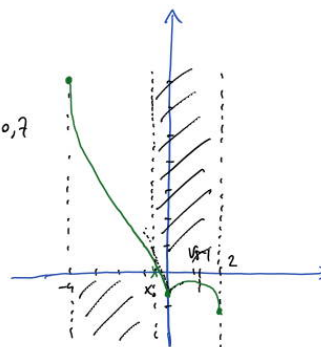
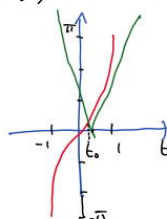
$$\text{Zeri: } f(x)=0 \Leftrightarrow |x| = 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right). \text{ Poniamo } t = \frac{x+1}{3}:$$

$$|3t-1| = 2 \arcsin t$$

$$3|t-\frac{1}{3}|$$

c'è un solo zero $t_0 \sim 0,2$

$$\text{dove } x_0 = 3t_0 - 1 \sim -0,4$$



$$\text{Segno: } f(x) > 0 \Leftrightarrow |x| > 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right) \Leftrightarrow |3t-1| > 2 \arcsin t \Leftrightarrow -1 \leq t \leq t_0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq x_0$$

$$\text{Derivata (per } x \neq -4, 0, 2): \quad f'(x) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+1}{3}\right)^2}} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{9 - (x+1)^2}}$$

Dove per $x < 0$ (o.e. $\sigma = -1$) ho $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ strettamente decrescente.

Per $x > 0$ (o.e. $\sigma = 1$) ho $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{9 - (x+1)^2}}$: b'è 0.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{9 - (x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1 \sim 1,2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \frac{2}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{5} - 1 \Rightarrow x = \sqrt{5} - 1 \text{ max locale}$$

$$\text{Notare che } \lim_{x \rightarrow -4^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{8}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim -1,7$$

$$\text{e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{8}} \sim 0,3$$

Si può fare f'' (v. note)

(b) v. note

3. Calcolare (prima per $\alpha = 1$, poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) i seguenti limiti, usando l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...):

$$\lim_{0,1,+\infty} \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1-x| + 2 \sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x+1)^2 + 2 \sin x}.$$

$$\lim_{0,1,+\infty} \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1-x| + 2 \sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x+1)^2 + 2 \sin x}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{x \rightarrow 0}} \quad \underline{\alpha=1} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \log^2(1-x) + 2 \sin^3 x}{\cos x - (x+1)^2 + 2 \sin x} \quad \text{F' } \frac{0}{0} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \left((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \theta_0(x^2) \right)^2 + 2 \left(x - \frac{x^3}{6} + \theta_0(x^3) \right)^3}{\cancel{1 - \frac{x^2}{2} + \theta_0(x^2)} - \cancel{x^2 - 2x - 1} + 2 \left(\cancel{x - \frac{x^3}{6} + \theta_0(x^3)} \right)} \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} - \left(\cancel{x^2} + x^3 + \theta_0(x^3) \right) + 2 \left(\cancel{x^3} + \theta_0(x^3) \right)}{-\frac{3}{2}x^2 + \theta_0(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{-\frac{3}{2}x^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\underline{\alpha \neq 1} \quad = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\alpha-1)x^2}{-(\frac{\alpha^2}{2}+1)x^2} = -\frac{\alpha-1}{\frac{\alpha^2}{2}+1}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1}} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\log^2 |1-x|}{\cos 2 - 1 + 2 \sin 1} = +\infty \quad \forall \alpha$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \quad \begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log^2 |1-x|}{-(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log^2 x}{-x^2} = 0^+ \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{-(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{-x^2} = -\alpha \end{aligned}$$

2. Determinare il limite della successione $a_n = \frac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^2 - 5 - e^{-n}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).

$$a_n = \frac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^2 - 5 - e^{-n}}$$

Num. • se $\alpha > 1$ $\infty - \infty$ $(n!)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{n|\alpha|^n}{(n!)^{\alpha-1}}\right)$

È vero che $c_n \rightarrow 0$? Criterio rapporto: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!^{\alpha-1}} \cdot \frac{(n!)^{\alpha-1}}{n|\alpha|^n} =$
 $= |\alpha| \cdot \frac{n!}{n} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \rightarrow 0 \rightarrow c_n \rightarrow 0$

Dunque il num. $\rightarrow +\infty$ come $(n!)^{\alpha-1}$

• se $\alpha < 1$ $1 - n$ che va a $-\infty$ come $-n$

• se $-1 < \alpha < 1$: perché $n|\alpha|^n \rightarrow 0$ (criterio rapporto) $\rightarrow$ num $\rightarrow 0$

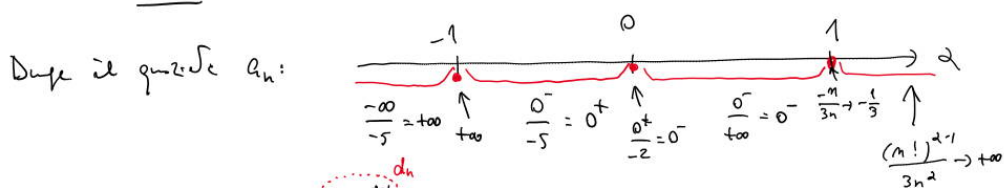
• se $\alpha = -1$: $(n!)^{-2} - n$ che va a $-\infty$ come $-n$

• se $\alpha < -1$: va a $-\infty$ come $-n|\alpha|^n$

Denom. • se $\alpha > 0$: va a $+\infty$ come $3n^2$

• se $\alpha = 0$: $= 3 - 5 - e^{-n} = -2 - e^{-n} \rightarrow -2$

• se $\alpha < 0$: tende a -5 .



Per l'ultimo caso $\alpha > 1$: $\frac{(n!)^{\alpha-1}}{3n^2}$ tende a $+\infty$ per il criterio rapporto

in quanto $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!^{\alpha-1}}{3(n+1)^2} \cdot \frac{3n^2}{(n!)^{\alpha-1}} = (n+1)^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha} \rightarrow +\infty$

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y = 3x^2 + x - 8, x > 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .

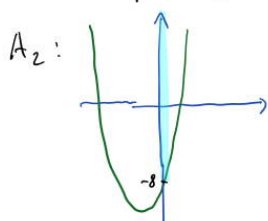
$$A = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y = 3x^2 + x - 8, x > 0\}$$

$$A_1: 5\sqrt{|x+2|} \geq 4-x \quad \begin{cases} \text{se } 4-x < 0 : \text{OK } (x > 4) \\ \text{se } 4-x \geq 0 : 25|x+2| \geq x^2 - 8x + 16 \end{cases}$$

$$\text{per } (-2 \leq x \leq 4) \quad 25(x+2) \geq x^2 - 8x + 16 \quad x^2 - 33x - 34 \leq 0 \quad -1 \leq x \leq 34$$

$$\text{per } (x < -2) \quad -25x - 50 \geq x^2 - 8x + 16 \quad x^2 + 17x + 66 \leq 0 \quad -11 \leq x \leq -6$$

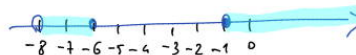
$$\text{Dunque } A_1 = [-11, -6] \cup [-1, +\infty[$$



$$3x^2 + x - 8 = 0 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+96}}{6}$$

$$\text{Dunque } A_2 =]-8, +\infty[$$

$$\text{Perf. } A =]-8, -6] \cup [-1, +\infty[$$



$$\text{Sup. lim. ? } \exists M > 0 : x \leq M \quad \forall x \in A \quad \text{Ris. : No}$$

$$\text{Inf. lim. ? } \exists M > 0 : x \geq -M \quad \forall x \in A \quad \text{Ris. : SÌ (es. } M=10)$$

$$\text{Inf. ? } -8. \quad (\text{Maxim. dei minimi, } A_x =]-\infty, -8]; \text{ oppure } \forall r > -8 \exists x \in A : x < r)$$

$$\text{Lim. ? } \text{Non esiste } (-8 \notin A)$$

$$\text{Chiuso ? } \text{No. Perché } -8 \text{ è di accum. per } A \text{ ma } -8 \notin A$$

$$\text{Aperto ? } \text{No: non è interno di } -6 \in A.$$

$$\text{Compatto ? } \text{No: né chiuso né limitato.}$$

$$\text{Discreto ? } \text{No: } -6 \text{ non è pt. isolato.}$$

$$\text{Pti interni (} \exists U \text{ int. di } x : U \subseteq A) :]-8, -6[\cup]-1, +\infty[\quad (e +\infty \dots)$$

$$\text{Pti di aderenza (} \forall U \text{ int. di } x : U \cap A \neq \emptyset) : [-8, -6] \cup [-1, +\infty]$$

Pti d'accum. (" " $(\bigcup A) \setminus \{x_j \neq \emptyset\}$) : idem.

Isolati? (pti di chiusura non d'accum.) : $\emptyset$

Frontiere? (pti di aderenza per A e per (A) : $-8, -6, -1$ (e $+\infty$ in $\tilde{\mathbb{R}}$)

Analisi Matematica I (Fisica e Astronomia)

TEST n. 2 di Esame Scritto (20/01/2015)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2014/15

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

A pie' pagina⁽¹⁾ alcuni sviluppi asintotici di possibile utilità.

1. Descrivere $A = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\} \cap \{y \in \mathbb{R} : y = 3x^2 + x - 8, x > 0\}$, e dire (giustificando le risposte) se è superiormente/inferiormente limitato determinandone sup/inf (in $\mathbb{R}$ e $\tilde{\mathbb{R}}$) e max/min in $\mathbb{R}$; se è aperto e/o chiuso, compatto, discreto; quali punti di $\mathbb{R}$ e di $\tilde{\mathbb{R}}$ sono interni, di aderenza, di accumulazione, isolati, di frontiera per A .
2. Determinare il limite della successione $a_n = \frac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^\alpha - 5 - e^{-n}}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando tecniche e risultati specifici (confronto, carabinieri, criterio del rapporto...) ed evitando di usare tecniche di variabile reale (come cambio di variabile, trascurabilità, asintoticità...).
3. Calcolare (prima per $\alpha = 1$, poi eventualmente al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) i seguenti limiti, usando l'analisi locale (trascurabilità, sviluppi...):

$$\lim_{0,1,+\infty} \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1-x| + 2 \sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x+1)^2 + 2 \sin x}.$$

4. Sia $f(x) = |x| - 2 \arcsin\left(\frac{x+1}{3}\right)$.
(a) Studiare l'andamento di $f(x)$ e tracciarne il grafico.
(b) Determinare gli sviluppi di $f(x)$ in 0^+ , $\frac{1}{2}$ e 2 con due termini significativi.
5. Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $\frac{2\bar{z} - i}{3 + iz} + \frac{3z + i}{2} = 0$. Detta poi z_0 la soluzione con parte reale strettamente negativa, trovare un'espressione per le potenze e la radici n -esime di $z_0 - 1$.
6. Si considerino le equazioni differenziali

$$(i) \quad 4y'' - y = x + 3e^x, \quad (ii) \quad x^2 y y' + 2 = 0.$$

Fare l'analisi a priori per (ii) su soluzioni costanti, crescenza, convessità, eventuali parità.

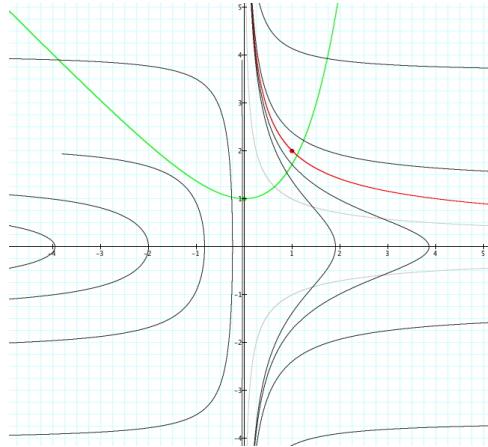
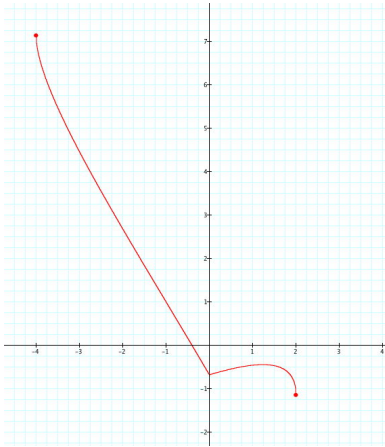
Detta poi $\tilde{y}_1(x)$ la soluzione di (i) con $\tilde{y}_1(0) = 1$ e $\tilde{y}_1'(0) = 0$, e $\tilde{y}_2(x)$ quella di (ii) con $\tilde{y}_2(1) = 2$, dire quante sono le soluzioni $t > 0$ di $\tilde{y}_1(t) = \tilde{y}_2(t)$.

⁽¹⁾ $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)$; $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$; $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + o_0(x^6)$; $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o_0(x^5)$; $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + o_0(x^2)$; $\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$; $\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^6)$.

- Si ha $A = A_1 \cap A_2$ con $A_1 = \{x \in \mathbb{R} : 5\sqrt{|x+2|} + x \geq 4\}$ e $A_2 = \{3x^2 + x - 8 : x > 0\}$. La disequazione $5\sqrt{|x+2|} \geq 4 - x$ è sempre soddisfatta quando $4 - x < 0$, ovvero quando $x > 4$; mentre quando $x \leq 4$ equivale a $25|x+2| \geq (4-x)^2$. Per $-2 \leq x \leq 4$ ciò equivale a $x^2 - 8x + 16 \leq 25x + 50$, ovvero $x^2 - 33x - 34 \leq 0$, che dà $-1 \leq x \leq 4$; invece per $x < -2$ equivale a $x^2 - 8x + 16 \leq -25x - 50$, ovvero $x^2 + 17x + 66 \leq 0$, che dà $-11 \leq x \leq -6$. Ricapitolando si ha $A_1 = [-11, -6] \cup [-1, +\infty[$. D'altra parte A_2 è l'immagine di $\mathbb{R}_{>0}$ tramite la funzione $3x^2 + x - 8$ che ha come grafico la relativa parabola, dunque è $]-8, +\infty[$: se ne ricava che $A =]-8, -6] \cup [-1, +\infty[$. Perciò A è inferiormente limitato e superiormente illimitato, con $\inf A = -8$ e senza minimo; i suoi punti interni sono tutti tranne -6 e -1 , e convenzionalmente anche $+\infty$; quelli di chiusura (tutti di accumulazione) sono tutti i suoi più -8 e $+\infty$. Ne ricaviamo che A non è né aperto (ad esempio non è intorno del suo punto -6) né chiuso (non contiene la sua accumulazione -8); non è né compatto né discreto. Infine, sono di frontiera i punti $-8, -6$ e -1 .
- Nella successione $a_n = \frac{(n!)^{\alpha-1} - n|\alpha|^n}{3n^\alpha - 5 - e^{-n}}$ iniziamo esaminando i comportamenti di numeratore e denominatore; terremo presente i noti rapporti di forza tra potenza, esponenziale e fattoriale conseguenti dal criterio del rapporto.
 - Al numeratore, se $\alpha > 1$ si tende a $+\infty$ seguendo $(n!)^{\alpha-1}$; se $\alpha = 1$ si ha $1 - n$, che tende a $-\infty$; se $-1 < \alpha < 1$ si tende a 0 ; se $\alpha = -1$ si tende a $-\infty$ come $-n$; e se $\alpha < -1$ si tende ancora a $-\infty$ come $-n|\alpha|^n$.
 - Al denominatore, se $\alpha > 0$ si tende a $+\infty$ seguendo $3n^\alpha$; se $\alpha = 0$ si tende a -2 ; e se $\alpha < 0$ si tende a -5 .
 Pertanto, se $\alpha > 1$ la successione a_n tende a $+\infty$; per $\alpha = 1$ tende a $-\frac{1}{3}$; se $-1 < \alpha < 1$ è infinitesima; e se $\alpha \leq -1$ tende a $+\infty$.
- Posta $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - \log^2 |1-x| + 2 \sin^3 x}{\cos(\alpha x) - (x+1)^2 + 2 \sin x}$, discutiamo direttamente il caso di $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - In 0 il limite è in forma $\frac{0}{0}$: sviluppando si ha $f_\alpha(x) = \frac{\alpha x^2 - ((-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o_0(x^2))^2 + 2(x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4))^3}{(1 - \frac{1}{2}(\alpha x)^2 + o_0(x^3)) - (x+1+2x+x^2) + 2(x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4))} = \frac{(\alpha-1)x^2 + 3x^3 + o_0(x^3)}{(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3)}$, dunque se $\alpha = 1$ si ottiene $\lim_0 f_1(x) = \lim_0 \frac{3x^3}{-\frac{1}{3}x^2} = 0$, mentre se $\alpha \neq 1$ vale $\lim_0 f_\alpha(x) = \lim_0 \frac{(\alpha-1)x^2}{(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 1)x^2} = -\frac{2(\alpha-1)}{\alpha^2+2}$.
 - In 1 si ha $\alpha x^2 + 2 \sin^3 x = o_1(-\log^2 |1-x|)$ e dunque il numeratore tende a $-\infty$, mentre il denominatore è finito (tende a $\cos \alpha - 4 + 2 \sin 1 < 0$). Dunque il limite è sempre $+\infty$.
 - Infine, se $\alpha \neq 0$ si ha evidentemente $\lim_{+\infty} f_\alpha(x) = \lim_{+\infty} \frac{\alpha x^2}{-x^2} = -\alpha$, mentre se $\alpha = 0$ vale $\lim_{+\infty} f_0(x) = \lim_{+\infty} \frac{-\log^2 x}{-x^2} = 0$.
- (a) (Figura 1) La funzione $f(x) = |x| - 2 \arcsin(\frac{x+1}{3})$ è definita per $|\frac{x+1}{3}| \leq 1$, ovvero per $-4 \leq x \leq 2$, con $f(-4) = 4 - 2 \arcsin(-1) = 4 + \pi \sim 7,1$, $f(0) = -2 \arcsin \frac{1}{3} \sim -0,7$ e $f(2) = 2 - 2 \arcsin 1 = 2 - \pi \sim 1,1$; nel suo dominio essa è ovunque continua, e C^∞ tranne che in $x = 0$, $x = -4$ e $x = 2$, in cui sono attesi rispettivamente un punto angoloso (a causa del modulo) e due punti a pendenza infinita (per l'arco-seno). Vale $f(x) = 0$ quando $\frac{1}{2}|x| = \arcsin(\frac{x+1}{3})$; posto $t = \frac{x+1}{3}$ (ovvero $x = 3t - 1$) si tratta di vedere quando $\frac{1}{2}|3t - 1| = \arcsin t$, e un confronto grafico mostra che ciò accade in un solo punto $t_0 \sim 0,2$, ovvero $x_0 \sim -0,4$. Similmente si ha $f(x) > 0$ quando $\frac{1}{2}|x| > \arcsin(\frac{x+1}{3})$, il che accade per $-4 < x < x_0$. Derivando si ottiene $f'(x) = \sigma - 2 \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x+1}{3})^2}} \frac{1}{3} = \sigma - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$, con $\sigma = \text{sign } x = \mp 1$ a seconda che $x \leq 0$: dunque per $x < 0$ vale sempre $f'(x) < 0$, mentre per $x > 0$ si ottiene $f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}$, perciò $f'(x) \geq 0$ per $0 < x \leq \sqrt{5} - 1$. Ne ricaviamo che $x = \sqrt{5} - 1$ è un punto di massimo relativo, con $f(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} - 1 - 2 \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3} \sim -0,4$, e che $x = 0$ è di minimo singolare; notiamo anche che (come previsto) $\lim_{x \rightarrow -4+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim -1,7$ e $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sim 0,3$. Derivando ancora si ha $f''(x) = -2(-\frac{1}{2})(9 - (x+1)^2)^{-\frac{3}{2}}(-2(x+1)) = -2(x+1)(9 - (x+1)^2)^{-\frac{3}{2}}$, dunque $f''(x) \geq 0$ per $x \leq -1$: ne ricaviamo che f è convessa per $-4 < x < -1$ e concava per $-1 < x < 0$ e $0 < x < 2$, con un flesso in $x = -1$ (in cui $f(-1) = 1$ e $f'(-1) = -\frac{5}{3}$).
- (b) In 0^+ e $\frac{1}{2}$ la funzione è finita, e possiamo applicare Taylor (in 0^+ useremo la derivata destra, calcolata in precedenza), ottenendo $f(x) = f(0) + f'_+(0)x + o_{0+}(x) = -2 \arcsin \frac{1}{3} + (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})x + o_{0+}(x)$ e $f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + o_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}) + (1 - \frac{4}{3\sqrt{3}})(x - \frac{1}{2}) + o_{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{2})$. La questione è invece più delicata in 2 , dove f è finita con $f(2) = 2 - \pi$ ma non è derivabile, dunque non si può usare Taylor. Esaminiamo allora che tipo di infinitesimo è $f(x) - f(2)$, studiando il limite $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{(2-x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x - 2 \arcsin(\frac{x+1}{3}) - (2-\pi)}{(2-x)^\alpha}$ per qualche $\alpha > 0$ (anzi, non essendoci derivabilità sarà senz'altro $0 < \alpha < 1$): usando de l'Hôpital si passa a $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{9-(x+1)^2}}}{-\alpha(2-x)^{\alpha-1}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{9-(6-t)^2}}}{-\alpha t^{\alpha-1}}$ che è finito solo quando $\alpha = \frac{1}{2}$, e vale $\frac{4}{\sqrt{6}}$. Dunque ricaviamo $f(x) = 2 - \pi + \frac{4}{\sqrt{6}}(2-x)^{\frac{1}{2}} + o_{2-}((2-x)^{\frac{1}{2}})$.
- Risolviamo $\frac{2\bar{z}-i}{3+iz} + \frac{3z+i}{2} = 0$, ovvero $2(2\bar{z}-i) + (3z+i)(3+iz) = 0$, ovvero $4\bar{z} + i + 8z + 3iz^2 = 0$, con $z \neq 3i$: posto $z = x + iy$ si ottiene $6x(2-y) + i(3(x^2-y^2) + 4y+1) = 0$, dunque il sistema reale dato da $x(2-y) = 0$ e $3(x^2-y^2) + 4y+1 = 0$. Se $x = 0$ si ottiene $3y^2 - 4y - 1 = 0$, da cui $y = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$; se invece $y = 2$ si ha $x = \mp 1$. Le soluzioni cercate sono perciò $\mp 1 + 2i$ e $\frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}i$, delle quali l'unica con parte reale strettamente

negativa è $z_0 = -1 + 2i$. Essendo allora $z_0 - 1 = -2 + 2i = 2^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3\pi}{4}i}$, per $n \in \mathbb{N}$ si ottiene la potenza n -esima $(z_0 - 1)^n = 2^{\frac{3n}{2}} e^{\frac{3\pi n}{4}i}$ e le radici n -esime $w_k = 2^{\frac{3}{2n}} e^{\frac{3\pi + 2k\pi}{n}i}$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$.

6. (Figura 2) Una costante $y \equiv k$ è soluzione di $x^2 yy' + 2 = 0$ se e solo se $0 + 2 = 0$, assurdo: dunque l'equazione non ha soluzioni costanti. Per lo stesso motivo nessuna soluzione $y(x)$ può essere definita anche in $x = 0$, ne' può annullarsi. L'equazione è dunque equivalente alla forma normale $y' = -\frac{2}{x^2 y}$, dal che si nota che le soluzioni sono crescenti dove sono positive. Derivando si ha $y'' = 2 \frac{2xy + x^2 y'}{x^4 y^2} = 2 \frac{2xy + x^2 (-\frac{2}{x^2 y})}{x^4 y^2} = 4 \frac{xy^2 - 1}{x^4 y^3}$, dunque vi sono flessi sulla curva $x = \frac{1}{y^2}$ e convessità alla sua destra (se $y > 0$) o alla sua sinistra (se $y < 0$). Infine, se $\varphi(x)$ è soluzione, posto $\psi(x) := -\varphi(x)$ si ha $\psi'(x) = -\varphi'(x) = -(-\frac{2}{x^2 \varphi(x)}) = -\frac{2}{x^2 (-\varphi(x))} = -\frac{2}{x^2 \psi(x)}$ e dunque anche $\psi(x)$ è soluzione: in altre parole, la famiglia delle soluzioni è simmetrica rispetto all'asse x .
- Passiamo ora alla risoluzione delle due equazioni. Una base di soluzioni dell'equazione omogenea $4y'' - y = 0$ è data da $e^{\frac{x}{2}}$ e $e^{-\frac{x}{2}}$; poi, col principio di sovrapposizione, si trova facilmente la soluzione particolare $-x + e^x$. Dunque lo spazio delle soluzioni di (i) è $\{Ae^{\frac{x}{2}} + Be^{-\frac{x}{2}} - x + e^x : A, B \in \mathbb{C}\}$. Imponendo le condizioni iniziali assegnate si ottiene $A = B = 0$, ovvero $\tilde{y}_1(x) = e^x - x$. L'equazione $x^2 yy' + 2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili: da $yy' = -\frac{2}{x^2}$ si ottiene $\frac{1}{2}y^2 = \frac{2}{x} + k$, dunque l'integrale generale di (ii) è $y = \pm\sqrt{\frac{4+kx}{x}}$ (con $k \in \mathbb{R}$), definito dove $\frac{kx+4}{x} \geq 0$. Imponendo la condizione iniziale si ha $2 = \pm\sqrt{4+k}$, da cui $k = 0$ ed il segno "+": perciò si ha $\tilde{y}_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, definita per $x > 0$. Lo studio dell'andamento di $\tilde{y}_1(x) = e^x - x$ e $\tilde{y}_2(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ è elementare, e mostra chiaramente l'esistenza di un solo $t_0 > 0$ (con $t_0 \sim 1,1$) in cui $\tilde{y}_1(t_0) = \tilde{y}_2(t_0)$.



1. Ex. 4: grafico di $f(x)$. 2. Ex. 6: soluzioni di $x^2 yy' + 2 = 0$ (nero); le due soluzioni dei problemi di Cauchy (rosso, verde).