

3 Curve parametriche affini

3.1 Preliminari

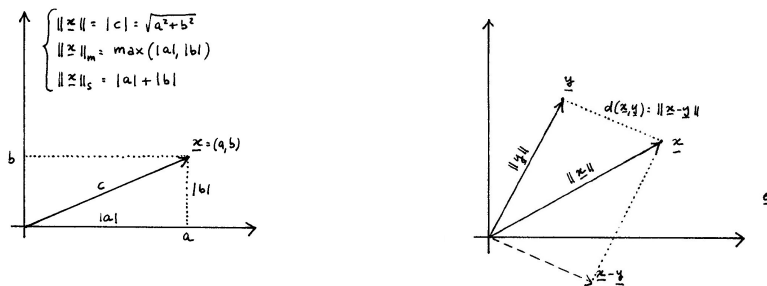
Spazi vettoriali normati

La nozione di *norma*, che introduciamo ora, generalizza quella di lunghezza di un vettore.

Sia V un k -spazio vettoriale, con $k = \mathbb{R}$ oppure $k = \mathbb{C}$.

Una *norma* su V è una funzione $p : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *positiva* (cioè $p(x) = 0$ se e solo se $x = 0_V$), *positivamente omogenea* (ovvero $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ per ogni $x \in V$ e $\lambda \in k$) e che soddisfa la *disuguaglianza triangolare* $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ per ogni $x, y \in V$. Norma

Esempi. (1) Sull' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale $\mathbb{R}^n = \{\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, di dimensione finita n , vi sono la **norma euclidea** $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ e le altre norme $\|\underline{x}\|_m = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ Norma euclidea (**norma del massimo**) e $\|\underline{x}\|_s = |x_1| + \dots + |x_n|$ (**norma perimetrale**). Su $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, queste tre norme si riducono tutte all'usuale modulo. (2) Sul $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale $\mathbb{C}^n = \{\underline{z} = (z_1, \dots, z_n) : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}$, di dimensione finita n , vi è la **norma hermitiana** $\|\underline{z}\|_h = \sqrt{\underline{z} \cdot \overline{\underline{z}}} = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2}$. Norma hermitiana (3) Su $C^0([a, b], \mathbb{C})$, ovvero il $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale (di dimensione infinita) delle funzioni continue dall'intervallo compatto $[a, b]$ in $\mathbb{C}$, vi è la **sup-norma** $\|f\|_{\sup} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ (si ricordi il Teorema di Weierstrass). Sup-norma Più in generale, su $C^k([a, b], \mathbb{C})$ (le funzioni di classe C^k su $[a, b]$) con $k \geq 0$ si può considerare $\|f\|_{\sup, k} = \max_{j=0, \dots, k} \|f^{(j)}\|_{\sup} = \max_{x \in [a, b]; j=0, \dots, k} |f^{(j)}(x)|$.



(a) Norme euclidea, del massimo e perimetrale in $\mathbb{R}^2$. (b) Distanza in $\mathbb{R}^2$ secondo la norma euclidea.

In uno *spazio vettoriale normato* (V, p) vi è una nozione di *distanza* $d_p(x, y) := p(x - y)$, e viene dunque generata una topologia. Dati $x \in V$ e $\varepsilon > 0$, la *p-palla aperta di centro x e raggio ε* è $B_p(x, \varepsilon) = \{y \in V : d_p(x, y) < \varepsilon\}$, cioè gli $y \in V$ che distano meno di ε da x ; per la *p-palla chiusa* $B_p(x, \varepsilon]$ si chiede invece che $d_p(x, y) \leq \varepsilon$. Sia le palle aperte che le chiuse costituiscono una famiglia fondamentale di intorni di x per la topologia data da p .

Due norme p e q si dicono *equivalenti* se esistono $\lambda, \mu > 0$ tali che $\lambda q(x) \leq p(x) \leq \mu q(x)$ Norme equivalenti per ogni $x \in V$; ciò equivale⁽²⁰⁾ al fatto che le distanze d_p e d_q sono “confrontabili”:

per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ tali che $B_q(x, \varepsilon') \subset B_p(x, \varepsilon) \subset B_q(x, \varepsilon'')$ per ogni $x \in V$.

L'idea è che “ p e q , pur essendo diverse, danno vita a topologie equivalenti su V ” (e, con esse, a nozioni topologiche equivalenti come aperto/chiuso, limite, continuità...)

⁽²⁰⁾ dato $\varepsilon > 0$, basta che $\varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{\mu}$ e $\varepsilon'' \geq \frac{\varepsilon}{\lambda}$; viceversa, presi $x = 0_V$ e $\varepsilon = 1$ si scelgano $\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon'}$ e $\mu \geq \frac{1}{\varepsilon''}$.

Esempio. Le norme $\|\underline{x}\|$, $\|\underline{x}\|_m$ e $\|\underline{x}\|_s$ su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti tra loro (infatti vale $\|\underline{x}\|_m \leq \|\underline{x}\| \leq \|\underline{x}\|_s \leq n\|\underline{x}\|_m$); si descrivano le palle in $\mathbb{R}^n$ (iniziando da $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) rispetto $\|\underline{x}\|$, $\|\underline{x}\|_m$ e $\|\underline{x}\|_s$, e si spieghi come si visualizza questa equivalenza. In realtà vale il fatto generale descritto qui di seguito.

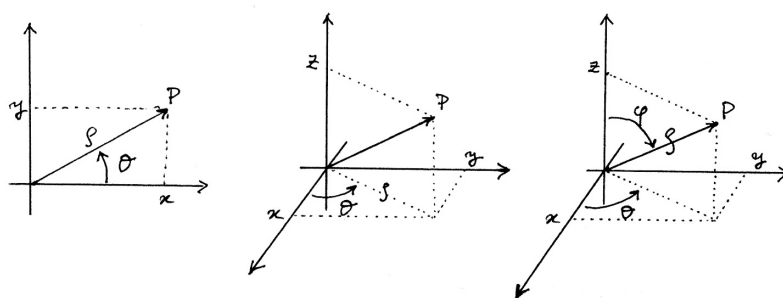
Proposizione 3.1.1. *Tutte le norme su uno spazio di dimensione finita sono equivalenti.*

Dimostrazione. Omissa. □

Nel seguito, come consueto, si penserà $\mathbb{R}^n$ munito della norma euclidea $\|\underline{x}\|$, la cui palle si denoteranno con $B_n(\underline{x}, \varepsilon)$ e $B_n(\underline{x}, \varepsilon]$; ma per la Proposizione 3.1.1 si potrebbe usare una qualsiasi altra norma su $\mathbb{R}^n$ senza alterare le proprietà topologiche da essa determinate.

Sistemi di coordinate speciali nel piano e nello spazio tridimensionale

Introduciamo alcuni classici sistemi di coordinate alternative alle cartesiane nel piano e nello spazio tridimensionale.



(a) Coordinate polari nel piano. (b) Coordinate cilindriche e (c) coordinate sferiche nello spazio.

- *Coordinate polari nel piano:* utili in situazioni con spiccata simmetria radiale.⁽²¹⁾

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}, \quad \text{ove} \begin{cases} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[\end{cases}.$$

ρ è detto *modulo*, e θ *argomento* (o *anomalia*) del punto. Se $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ si ha $\theta = \arctg \frac{y}{x}$.

- *Coordinate cilindriche nello spazio tridimensionale:* le coordinate polari (ρ, θ) del piano orizzontale (x, y) con la coordinata cartesiana verticale z . Sono utili in situazioni con spiccata simmetria cilindrica.

Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ z = z \end{cases}, \quad \text{ove} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

- *Coordinate sferiche nello spazio tridimensionale:* utili per descrivere situazioni con spiccata simmetria sferica.

Coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\ \cos \varphi = z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}, \quad \text{ove} \begin{cases} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ \rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad \varphi \in]0, \pi[\end{cases}.$$

⁽²¹⁾ A seconda della convenienza, si può scegliere θ in $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ per un opportuno angolo α . Idem per le coordinate cilindriche e sferiche.

Per analogia terrestre, θ e φ sono detti rispettivamente *longitudine* e *latitudine* del punto.

Queste coordinate possono essere usate al posto delle cartesiane per esprimere un luogo geometrico nel piano o nello spazio tridimensionale tramite un conveniente numero di equazioni e disequazioni.

Ad esempio, un'equazione (in coordinate polari nel piano) del tipo

$$\rho = f(\theta)$$

è, nel caso generico, la più classica *forma polare di una curva piana*, che esprime la distanza dall'origine del punto della curva in funzione dell'argomento θ , che potrebbe eventualmente essere lasciato libero di percorrere più giri. In tale espressione, sebbene la coordinata polare ρ sia solitamente definita come un numero positivo, è d'uso tollerare anche valori di θ per cui $f(\theta) < 0$ (intendendo, in tal caso, che la distanza va contata "negativamente", percorrendo a ritroso la semiretta individuata da θ).

Esempi. (1) In coordinate polari, $\rho = a$ (ove $a > 0$) è l'equazione della circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio a , mentre $\theta = \beta$ (con $\beta \in [0, 2\pi[$) è l'equazione della semiretta per $(0, 0)$ che forma l'angolo β col verso positivo dell'asse x ; in coordinate cartesiane, tali luoghi sono rappresentati rispettivamente come $x^2 + y^2 = a^2$ e come (scegliendo ad esempio $\beta = \frac{4\pi}{3}$) il sistema $(y = -x\sqrt{3}; y < 0)$. Altre equazioni rappresentano insiemi di tipo meno facilmente riconoscibile: ad esempio, $\rho = 2 \cos \theta$ rappresenta la circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1: lo si può vedere moltiplicando i due membri per ρ , ottenendo così l'equazione cartesiana $x^2 + y^2 = 2x$. **(2)** Dati $0 < a < b$, il luogo $\{(x, y) : ax \leq x^2 + y^2 \leq bx; 0 \leq y\sqrt{3} \leq x\}$ è quello dei punti compresi tra le circonferenze $x^2 + y^2 - ax = 0$ e $x^2 + y^2 - bx = 0$, che stanno sopra l'asse x e sotto la retta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; in coordinate polari tale luogo si descrive più semplicemente come il "rettangolo" $\{(\rho, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, a \cos \theta \leq \rho \leq b \cos \theta\}$. **(3)** L'equazione $\rho = a$ (con $a > 0$) rappresenta, in coordinate cilindriche, la superficie cilindrica infinita con asse z e raggio a ; mentre in coordinate sferiche rappresenta la superficie sferica centrata in $(0, 0, 0)$ di raggio a . **(4)** Il cono circolare retto in $\mathbb{R}^3$ con asse lungo l'asse z , base nel cerchio di raggio a sul piano $z = h$ (con $a, h > 0$) e vertice nell'origine ha espressione cartesiana $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq h\}$, espressione cilindrica (preferibile) $\{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq z, 0 \leq z \leq h\}$ ed espressione sferica $\{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{a}{h}, 0 \leq \rho \leq \frac{h}{\cos \varphi}\}$.

Rette e coniche

• *Rette nello spazio affine $\mathbb{R}^n$* . Dati in $\mathbb{R}^n$ un punto P ed un vettore non nullo $\underline{v}$, la *retta* r passante per P e parallela a $\underline{v}$ è il luogo dei punti ottenuti applicando a P dei multipli scalari di $\underline{v}$. Se P ha coordinate $(a_1, \dots, a_n)$ e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$, il luogo è descritto come

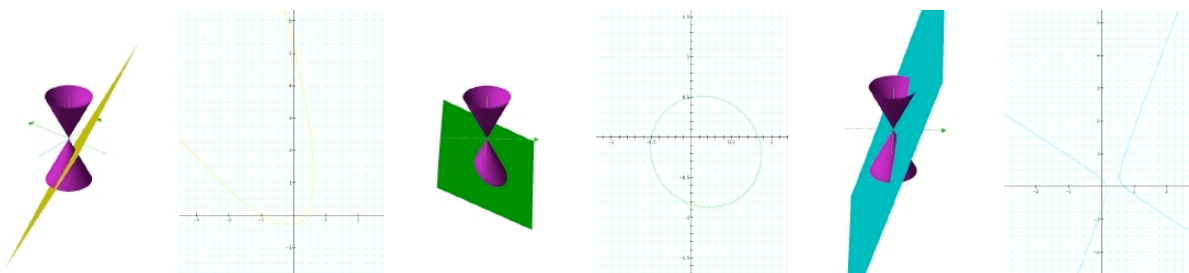
$$r = \{(a_1 + t v_1, \dots, a_n + t v_n) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Si noti che r è l'immagine della funzione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ data da $\gamma(t) = (a_1 + t v_1, \dots, a_n + t v_n)$: si tratta di una *forma parametrica* della retta, primo esempio del concetto di *curva parametrica* di cui parleremo in seguito. Sostituendo il punto P con un altro punto di r , ed il vettore $\underline{v}$ con un suo multiplo scalare non nullo, il luogo geometrico r non cambia: ciò che cambia è solo la forma parametrica che di esso si ottiene (parleremo in seguito più generalmente di *riparametrizzazione* di una curva parametrica).

Cartesianamente, dati $n - 1$ iperpiani di $\mathbb{R}^n$ di equazione $a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,n}x_n + b_i = 0$ (con $i = 1, \dots, n - 1$) tali che la matrice $A = (a_{i,j})$ (con $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = 1, \dots, n$) abbia rango massimo $n - 1$, la loro intersezione (ovvero il sistema delle loro $n - 1$ equazioni) dà luogo ad una retta in *forma cartesiana*. Per passare da una forma parametrica ad una cartesiana, basta ricavare il *parametro* t da una delle n equazioni $x_j = a_j + t v_j$ (possibile, perché il vettore $\underline{v}$ è non nullo), e sostituirlo nelle altre $n - 1$; viceversa, dalle $n - 1$ equazioni linearmente indipendenti di una forma cartesiana si potranno ricavare $n - 1$ delle n coordinate in funzione della rimanente, che potrà essere assunta come parametro.

Esempi. (1) (Rette nel piano) Dati $P(-1, 3)$ e $\underline{v} = (2, 5)$ nel piano $\mathbb{R}^2$, una forma parametrica della retta r passante per P e parallela a $\underline{v}$ è $\{(-1 + 2t, 3 + 5t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $x = -1 + 2t$ e $y = 3 + 5t$ si può ricavare ad esempio $t = \frac{x+1}{2}$, da cui la forma cartesiana $y = 3 + 5\frac{x+1}{2}$, ovvero $5x - 2y + 11 = 0$. Viceversa, data la retta in forma cartesiana $3x + 4y - 5 = 0$, si ricava ad esempio $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ da cui, posto $x = 4t$, la forma parametrica $\{(x, y) = (4t, -3t + \frac{5}{4}) = (0, \frac{5}{4}) + t(4, -3) : t \in \mathbb{R}\}$; o dalla forma cartesiana $x + 7 = 0$, posto $y = t$ si ha subito la forma parametrica $\{(x, y) = (-7, t) = (-7, 0) + t(0, 1) : t \in \mathbb{R}\}$. **(2) (Rette nello spazio tridimensionale)** Dati $P(2, 0, -1)$ e $\underline{v} = (3, 5, -4)$ in $\mathbb{R}^3$, una forma parametrica della retta r passante per P e parallela a $\underline{v}$ è $\{(2 + 3t, 5t, -1 - 4t) : t \in \mathbb{R}\}$; da $x = 2 + 3t$, $y = 5t$ e $z = -1 - 4t$ si può ricavare ad esempio $t = \frac{2-x}{3}$, da cui la forma cartesiana $(y = 5\frac{2-x}{3}, z = -1 - 4\frac{2-x}{3})$, ovvero $(5x + 3y - 10 = 0, 4x - 3z - 11 = 0)$. Viceversa, data la retta di $\mathbb{R}^3$ in forma cartesiana $(x - 2y + z - 7 = 0, 2x + y + 6z + 1 = 0)$, dal sistema si ricava ad esempio $x = 1 - \frac{13}{5}z$ e $y = -3 - \frac{4}{5}z$. Posto $z = 5t$, si ottiene così la forma parametrica $\{(x, y, z) = (1 - 13t, -3 - 4t, 5t) = (1, -3, 0) + t(-13, -4, 5) : t \in \mathbb{R}\}$.

• *Coniche nel piano cartesiano.* Le *coniche affini* sono le curve piane ottenute secando un cono a due falde con un piano non passante per il vertice del cono: esse si classificano come *parabole* (quando il piano seca una sola falda ed è parallelo ad una retta generatrice del cono), *ellissi* (quando il piano seca una sola falda ma non è parallelo ad una retta generatrice del cono), o *iperboli* (quando il piano seca entrambe le falde).



Le tre possibili intersezioni affini tra un piano e un cono in $\mathbb{R}^3$: (a) parabola; (b) ellisse; (c) iperbole.

Fissato un riferimento cartesiano (x, y) nel piano secante, è noto che le equazioni cartesiane delle coniche sono polinomi di secondo grado in x e y . Viceversa, una qualsiasi equazione quadratica

$$(3.1) \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dà una conica in posizione generica: se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ si ha un'ellisse (in particolare una circonferenza se $a = c$ e $b = 0$); se $\Delta = 0$ una parabola; se $\Delta > 0$ un'iperbole.⁽²²⁾

⁽²²⁾ Alcune equazioni quadratiche possono dare luogo a coniche degeneri. In particolare un'ellisse può

L'equazione cartesiana e la geometria di una conica. Ricordiamo alcune relazioni tra la forma cartesiana (3.1) di una conica e gli enti geometrici notevoli ad essa associati. Per uniformità tra i vari casi, quando si passerà dal sistema (x, y) ad un sistema di riferimento (X, Y) opportuno per raggiungere una forma canonica dell'equazione si intenderà che il verso positivo dell'asse X formi col verso positivo dell'asse x un angolo acuto (ciò determina anche direzione e verso dell'asse Y).

- **Ellisse** $[\Delta < 0]$. Il centro è $(x_0, y_0) = (\frac{2cd-be}{\Delta}, \frac{2ae-bd}{\Delta})$, e per esso passano due assi di simmetria ortogonali (X, Y) di coefficienti rispettivamente $q := \sqrt{(\frac{a-c}{b})^2 + 1} - \frac{a-c}{b}$ (si noti che $q \geq 0$) e $-\frac{1}{q}$.⁽²³⁾ Usando il cambio di coordinate tra (x, y) e (X, Y) ⁽²⁴⁾ l'equazione assume forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$, ove $\alpha, \beta > 0$ rappresentano le lunghezze dei semiassi; poi, se $\alpha > \beta$ (risp. se $\alpha < \beta$), i due fuochi si trovano sull'asse X (risp. sull'asse Y) a distanza $\sqrt{|\alpha^2 - \beta^2|}$ dal centro, e l'ellisse è il luogo dei punti tali che la somma delle loro distanze dai due fuochi sia uguale a 2α (risp. 2β). Il caso particolare della circonferenza corrisponde all'equazione (3.1) nella forma $a = c$ e $b = 0$, con centro $(-\frac{d}{2a}, -\frac{e}{2a})$ e raggio $r = \frac{\sqrt{d^2+e^2-4af}}{2a}$; la forma canonica diventa $X^2 + Y^2 = r^2$ (dunque $\alpha = \beta = r$), ed i due fuochi coincidono col centro.
- **Iperbole** $[\Delta > 0]$. Centro e assi di simmetria (X, Y) sono gli stessi dell'ellisse; gli asintoti sono le due rette $y - y_0 = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2c}(x - x_0)$ (se $c \neq 0$) oppure $x = x_0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ (se $c = 0$). Rispetto a (X, Y) l'equazione assume una delle due forme canoniche $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = \pm 1$ con $\alpha, \beta > 0$, e gli asintoti hanno equazione $Y = \pm \frac{\beta}{\alpha}X$; poi, se si ha il “+1” (risp. “-1”) allora vertici e fuochi si trovano sull'asse X (risp. sull'asse Y) rispettivamente a distanza α (risp. β) e $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dal centro, e l'iperbole è il luogo dei punti tali che il modulo della differenza delle loro distanze dai due fuochi sia uguale a 2α (risp. 2β).
- **Parabola** $[\Delta = 0]$, cioè $b = \pm 2\sqrt{ac}$. Posto $a, c \geq 0$ (altrimenti, ricordando che deve essere $ac \geq 0$, basterà cambiare segno all'equazione), l'asse di simmetria della parabola è dato da $2(a+c)(y\sqrt{c} + \sigma_b x\sqrt{a}) + (e\sqrt{c} + \sigma_b d\sqrt{a}) = 0$ (se $b \neq 0$, con $\sigma_b = \text{sign } b$) o $x = -\frac{e}{2c}$ (se $a = b = 0$) o $y = -\frac{d}{2a}$ (se $b = c = 0$), e il vertice si trova intersecando parabola e asse. Scegliendo come sistema (X, Y) quello con origine nel vertice e avente l'asse della parabola come uno dei due assi coordinati (che sarà l'asse X o Y a seconda della convenzione adottata in partenza per l'asse X), l'equazione assume una delle forme canoniche $X = \alpha Y^2$ (se l'asse X è l'asse della parabola, cioè quando $b < 0$ oppure quando $a = b = 0$) o $Y = \alpha X^2$ (se l'asse Y è l'asse della parabola, cioè quando $b > 0$ oppure $b = c = 0$) con $\alpha \neq 0$; sempre rispetto (X, Y) , il fuoco si trova sull'asse della parabola a quota $\frac{1}{4\alpha}$, la direttrice è la retta ortogonale all'asse della parabola che interseca quest'ultimo a quota $-\frac{1}{4\alpha}$; la parabola, infine, è il luogo dei punti equidistanti da fuoco e direttrice.

Per portare l'equazione (3.1) in una delle forme canoniche descritte, si può usare anche questo procedimento.

- (1) Se $b \neq 0$, sostituire⁽²⁵⁾ (x, y) con $(x - qy, qx + y)$ ove si ricorda che $q = \sqrt{(\frac{a-c}{b})^2 + 1} - \frac{a-c}{b}$ (ciò

degenerare in un punto ($x^2 + y^2 = 0$ è $\{(0, 0)\}$) o nel vuoto ($x^2 + y^2 + 2 = 0$); una parabola in una retta doppia ($x^2 + 2xy + y^2 = 0$ è $x + y = 0$ contata due volte) o in due rette parallele ($x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ è unione di $x + y = \pm 1$) o nel vuoto ($x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$); un'iperbole in due rette che si intersecano ($xy = 0$ è l'unione degli assi; $xy + y^2 - y = 0$ è unione dell'asse x e di $x + y - 1 = 0$).

⁽²³⁾ Bisogna specificare cosa accade nei casi particolari in cui $a = c$ oppure $b = 0$: (1) se $b = 0$ e $a \neq c$ si intende $q = 0$; (2) se $a = c$ e $b \neq 0$ vale $q = 1$; (3) se $a = c$ e $b = 0$ il coefficiente q è privo di significato (in effetti questo è il caso delle circonferenze, per le quali gli assi di simmetria sono indeterminati).

⁽²⁴⁾ In generale, se (X, Y) è ottenuto per *rototraslazione* da (x, y) spostando l'origine in (x_0, y_0) e ruotando in senso antiorario di un angolo $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la trasformazione di coordinate è data da $\begin{cases} x = (\cos \theta)X - (\sin \theta)Y + x_0 \\ y = (\sin \theta)X + (\cos \theta)Y + y_0 \end{cases}$ e, inversamente, da $\begin{cases} X = (\cos \theta)(x - x_0) + (\sin \theta)(y - y_0) \\ Y = -(\sin \theta)(x - x_0) + (\cos \theta)(y - y_0) \end{cases}$. Nel nostro caso, essendo $\theta = \arctg q$ (dunque $\tg \theta = q$) si ha $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{q^2+1}}$ e $\sin \theta = \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}$, mentre (x_0, y_0) è il centro.

⁽²⁵⁾ L'azione di sostituire (x, y) con $(f(x, y), g(x, y))$ equivale a considerare il cambio di variabili $(x, y) = (f(x', y'), g(x', y'))$, salvo poi ridare a (x', y') il nome (x, y) una volta fatto il cambio (la funzione di due variabili $(f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dovrà essere un *diffeomorfismo*, in particolare invertibile: questo sarà chiaro più

equivale ad applicare al sistema (x, y) una rotazione antioraria di angolo $\theta = \arctg q \in [0, \frac{\pi}{2}]^{(26)}$ e un'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}}$: ora l'equazione avrà $b = 0$. D'ora in poi supporremo anche $a \neq 0$ (se invece $a = 0$ sarà senz'altro $c \neq 0$, e si farà lo stesso usando (c, e, d) al posto di (a, d, e) nei passi seguenti).

- (2) Se $d \neq 0$, sostituire x con $x - \frac{d}{2a}$ (ciò equivale a una traslazione di x): l'equazione avrà $b = d = 0$ e $a \neq 0$. A questo punto vi sono due alternative, a seconda che $c \neq 0$ oppure $c = 0$.
- (3') Sia $c \neq 0$. Se $e \neq 0$, sostituire y con $y - \frac{e}{2c}$ (traslazione di y): l'equazione sarà del tipo $ax^2 + cy^2 + f = 0$, con $ac \neq 0$. Se $f = 0$ si ottiene una conica degenera (più precisamente: se $ac > 0$ si ottiene il solo punto origine $\{(0, 0)\}$, mentre se $ac < 0$ si ha l'unione delle due rette $y = \mp \sqrt{-\frac{a}{c}}x$). Se invece $f \neq 0$ si divide per f ottenendo: un'ellisse $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \sqrt{-\frac{f}{a}}$ e $\beta = \sqrt{-\frac{f}{c}}$ (se $af < 0$ e $cf < 0$); un'iperbole $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \pm 1$ con $\alpha = \sqrt{|\frac{f}{a}|}$ e $\beta = \sqrt{|\frac{f}{c}|}$ (se $ac < 0$); il vuoto (se $af > 0$ e $cf > 0$).
- (3'') Sia $c = 0$. Se $e \neq 0$, sostituire y con $y - \frac{f}{e}$ (traslazione di y) ottenendo un'equazione del tipo $ax^2 + ey = 0$ con $a \neq 0$, che è una parabola $y = \alpha x^2$ (con $\alpha = -\frac{a}{e}$) avente l'asse y come asse di simmetria. Se invece $e = 0$ si ottiene una conica degenera (più precisamente: se $f = 0$ si ha l'asse y contato due volte; se $af < 0$ si hanno le due rette distinte parallele $x = \mp \sqrt{-\frac{f}{a}}$; se $af > 0$ si ha il vuoto).
- (4) Una volta determinata la forma canonica è possibile, seguendo a ritroso le sostituzioni effettuate, calcolare le coordinate degli enti geometrici notevoli della conica (vertici, assi, fuochi, direttrici...) nel sistema originale (x, y) .

Esempi. (1) Si abbia la conica $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 30x + 20y + 13 = 0$: poiché $\Delta = -400 < 0$, si tratta di un'ellisse. Il centro risulta $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, e gli assi di simmetria (X, Y) per esso hanno pendenze risp. $q = 2$ e $-\frac{1}{q} = -\frac{1}{2}$, pertanto $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}X - \frac{2}{\sqrt{5}}Y + \frac{3}{5}, \frac{2}{\sqrt{5}}X + \frac{1}{\sqrt{5}}Y - \frac{4}{5})$: sostituendo e calcolando, la conica diventa $5X^2 + 20Y^2 - 4 = 0$, ovvero la forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{Y^2}{\beta^2} = 1$ con semiassi $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Rispetto (X, Y) i fuochi hanno coordinate $(\mp \sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$, dunque (usando la trasformazione) rispetto (x, y) sono i due punti $(\frac{3 \pm \sqrt{3}}{5}, -\frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{5})$. • Usiamo ora il procedimento alternativo. Sostituendo (x, y) con $(x - 2y, 2x + y)$ si ha $25x^2 + 100y^2 + 10x + 80y + 13 = 0$. Sostituendo poi x con $x - \frac{1}{5}$ si ottiene $25x^2 + 100y^2 + 80y + 12 = 0$, e poi sostituendo y con $y - \frac{2}{5}$ l'equazione diventa $25x^2 + 100y^2 - 4 = 0$, ovvero la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con semiassi $\alpha = \frac{2}{5}$ e $\beta = \frac{1}{5}$: si noti che, a causa dell'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ applicata nel primo passaggio, rispetto alla forma canonica trovata in precedenza le misure lineari (come le lunghezze dei semiassi) si sono coerentemente accorciate di un fattore $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Rispetto quest'ultimo sistema i fuochi hanno coordinate $(\mp \frac{\sqrt{3}}{5}, 0)$: risalendo all'indietro le trasformazioni percorse si trova nell'ordine $(\mp \frac{\sqrt{3}}{5}, -\frac{2}{5})$, poi $(\frac{\pm \sqrt{3}-1}{5}, -\frac{2}{5})$, ed infine $((\frac{\pm \sqrt{3}-1}{5}) - 2(-\frac{2}{5}), 2(\frac{\pm \sqrt{3}-1}{5}) + (-\frac{2}{5})) = (\frac{3 \pm \sqrt{3}}{5}, -\frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{5})$, gli stessi punti di prima.

(2) La conica $4x^2 + 3xy - 2y + 1 = 0$ è un'iperbole ($\Delta = 9 > 0$). Il centro risulta $(\frac{2}{3}, -\frac{16}{9})$, gli asintoti sono le rette $x = \frac{2}{3}$ e $4(x - \frac{2}{3}) + 3(y + \frac{16}{9}) = 0$ (ovvero $y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{9}$), e gli assi di simmetria (X, Y) per il centro hanno pendenze risp. $q = \frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{q} = -3$, pertanto $(x, y) = (\frac{3}{\sqrt{10}}X - \frac{1}{\sqrt{10}}Y + \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{10}}X + \frac{3}{\sqrt{10}}Y - \frac{16}{9})$: sostituendo si arriva alla forma canonica $\frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{Y^2}{\beta^2} = -1$, con $\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{9}$ e $\beta = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. • Col procedimento

avanti, parlando di funzioni di più variabili). Se ad esempio si ha a che fare con una trasformazione affine $(f(x, y), g(x, y)) = (\alpha x + \beta y + x_0, \gamma x + \delta y + y_0)$, ovvero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ (come nel caso presente per le rotazioni, le traslazioni, le omotetie e le loro composizioni), dovrà essere $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, e allora $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$.

⁽²⁶⁾Facendo un legame con nozioni di geometria, la matrice ortogonale $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{q^2+1}} & -\frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \\ \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} & \frac{1}{\sqrt{q^2+1}} \end{pmatrix}$ è quella che diagonalizza la forma quadratica $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

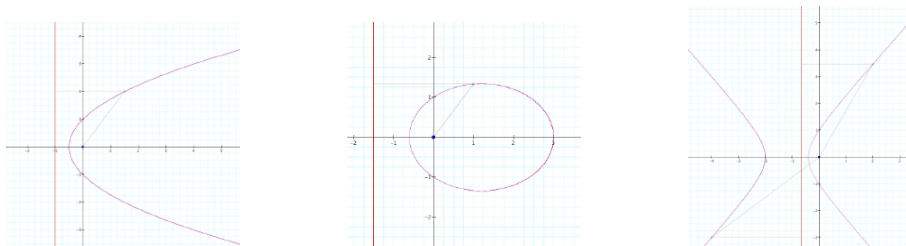
alternativo: sostituendo (x, y) con $(x - \frac{1}{3}y, \frac{1}{3}x + y)$, poi x con $x + \frac{1}{15}$ e infine y con $y - \frac{9}{5}$ si arriva alla forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = -1$, con $\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\beta = \sqrt{5}$ (come prima, si noti l'azione dell'omotetia di rapporto $\frac{1}{\sqrt{q^2+1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ rispetto alla forma canonica precedente). **(3)** La conica $x^2 + 2xy + y^2 + 3y - 1 = 0$ è una parabola ($\Delta = 0$). L'asse di simmetria è $4(y + x) + 3 = 0$, ovvero $y = -x - \frac{4}{3}$, che intersecato col luogo dà il vertice $(-\frac{43}{48}, \frac{7}{48})$. Poiché $b > 0$ l'asse della parabola sarà scelto come asse Y , mentre l'asse X sarà quello passante per il vertice e con pendenza 1. Il cambio di riferimento sarà perciò $(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y - \frac{43}{48}, \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{7}{48})$, e sostituendo si ricava $4X^2 + 3\sqrt{2}Y = 0$, ovvero la forma canonica $Y = \alpha X^2$ con $\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$. Rispetto (X, Y) il fuoco è il punto $(0, -\frac{3}{16}\sqrt{2})$ e la direttrice la retta $Y = \frac{3}{16}\sqrt{2}$: usando la trasformazione, rispetto (x, y) essi diventano il punto $(-\frac{17}{24}, -\frac{1}{24})$ e la retta $y = x + \frac{17}{12}$. • Col procedimento alternativo: sostituendo (x, y) con $(x - y, x + y)$, poi x con $x - \frac{3}{8}$ e infine y con $y + \frac{25}{48}$ si arriva alla forma canonica $y = \alpha x^2$ con $\alpha = -\frac{4}{3}$. In questo riferimento il fuoco ha coordinate $(0, -\frac{3}{16})$, dunque, risalendo a ritroso i cambi, nel sistema originario ha coordinate $(-\frac{17}{24}, -\frac{1}{24})$, come già calcolato.

Le coniche possono essere descritte polarmente anche in questo modo: data una retta d (direttrice), un punto F (fuoco) a distanza $f > 0$ da d , e un numero $e \geq 0$ (eccentricità), si considera l'insieme dei punti del piano tali che il rapporto tra la loro distanza da F e la loro distanza da d sia uguale a e . Fissato un sistema di coordinate polari in cui il polo sia F ed il semiasse x positivo (asse polare) sia la semiretta uscente da F ortogonale a d e orientata nel verso che si allontana da d , si dimostra facilmente che ciò si riscrive come

Coniche in forma polare

$$(3.2) \quad \rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ove $p = ef$ (parametro): questo luogo (simmetrico rispetto all'asse polare perché $\cos \theta$ è pari) è un'ellisse se $e < 1$, una parabola se $e = 1$ e un'iperbole se $e > 1$. Si noti che $\rho_{\min} = \rho(\pi) = \frac{p}{1+e}$ (distanza tra fuoco e pericentro), mentre per le ellissi si ha anche $\rho_{\max} = \rho(0) = \frac{p}{1-e}$ (distanza tra fuoco e apocentro).



Tre coniche con parametro $p = 1$ ed eccentricità **(a)** $e = 1$ (parabola); **(b)** $e = \frac{2}{3}$ (ellisse); **(c)** $e = \frac{3}{2}$ (iperbole).

Relazione tra le forme cartesiana e polare di una conica. Considerando il sistema cartesiano (x, y) avente origine in F e asse x di direzione e verso concordi all'asse polare, da (3.2) si ottiene subito l'equazione cartesiana

$$(3.3) \quad x^2 + y^2 = (p + ex)^2.$$

Per capire la relazione dell'equazione (3.3) con le forme canoniche viste in precedenza, vediamo ciascuno dei tre casi in dettaglio.

- **Ellisse** [$0 \leq e < 1$ (circonferenza se $e = 0$)]. Per passare al riferimento centrale basta sostituire x con $x + \frac{pe}{1-e^2}$, e si ottiene la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}) = \frac{p}{1-e^2}$ e

$\beta = \alpha\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$: i fuochi dell'ellisse (uno è ovviamente F) sono dunque i punti $(\mp \frac{pe}{1-e^2}, 0)$, e la direttrice la retta $x = \frac{pe^3}{1-e^2}$. Viceversa, un'ellisse in forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$ e parametro $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$.

- *Iperbole* [$e > 1$ (con $\cos \theta \neq \frac{1}{e}$)]. Sostituendo x con $x - \frac{pe}{e^2-1}$ si ottiene la forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ con $\alpha = \frac{p}{e^2-1}$ e $\beta = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$. I fuochi (uno dei quali è F) sono i punti $(\mp \frac{pe}{e^2-1}, 0)$, la direttrice è la retta $x = \frac{pe(2-e^2)}{e^2-1}$, i vertici i punti $(\pm \frac{p}{e^2-1}, 0)$ e gli asintoti le rette $y = \pm(\sqrt{e^2-1})x$. Viceversa, un'iperbole in forma canonica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ ha eccentricità $e = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$ e parametro $p = \frac{\beta^2}{\alpha}$.
- *Parabola* [$e = 1$ (con $\theta \neq 0$)]. L'equazione (3.3) diventa $y^2 - 2px - p^2 = 0$; per passare al riferimento nel vertice basta sostituire x con $x - \frac{p}{2}$ ottenendo la forma canonica $x = \alpha y^2$ con $\alpha = \frac{1}{2p}$, dunque il fuoco F ha coordinate $(\frac{p}{2}, 0)$ e la direttrice è la retta $x = -\frac{p}{2}$. Viceversa, una parabola in forma canonica $x = \alpha y^2$ ha eccentricità $e = 1$ e parametro $p = \frac{1}{2\alpha}$.

Esempio: le leggi di Keplero. Per dare una classica applicazione della forma polare delle coniche vediamo come, dalla conoscenza dell'interazione gravitazionale, si possa risalire alle tre leggi di Keplero. Si abbia un punto materiale di massa m nello spazio tridimensionale, individuato dal vettore posizione $\underline{r}$ (pertanto $\underline{v} = \dot{\underline{r}}$ è la sua velocità e $\underline{a} = \ddot{\underline{r}}$ l'accelerazione)⁽²⁷⁾; indicheremo le norme euclidee di tali vettori con r , v e a . Il punto sia soggetto ad una *forza centrale posizionale a simmetria sferica*, ovvero del tipo $\underline{F}(\underline{r}) = F(r)(\underline{r}/r)$ per un'opportuna funzione continua $F(r)$ (si noti che $\underline{r}/r$ è il versore di $\underline{r}$, e dunque $\|\underline{F}(\underline{r})\| = |F(r)|$). La funzione $U(\underline{r}) = U(r) = -\int F(r) dr$, definita a meno di una costante additiva, è l'*energia potenziale*⁽²⁸⁾ associata al campo: esempi classici sono $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ (forza elastica di costante k centrata nell'origine e lunghezza a riposo nulla, caso base di oscillatore armonico) e $U(r) = -\frac{GMm}{r}$ (forza gravitazionale generata da un corpo di massa M prominente rispetto a m , di cui ci occuperemo qui sotto). In tali condizioni, è noto⁽²⁹⁾ che lungo il moto si conservano i seguenti integrali primi:

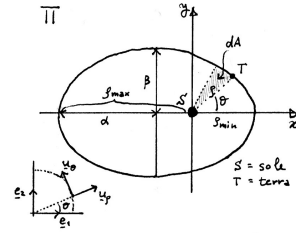
- il *momento angolare* $\underline{\ell} = \underline{r} \wedge m\underline{v}$ (in particolare *il moto è piano*, più precisamente si svolge nel piano Π contenente i vettori posizione iniziale $\underline{r}_0$ e velocità iniziale $\underline{v}_0$);
- l'*energia totale* $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r)$.

Poniamoci dunque nel piano Π con coordinate polari (ρ, θ) (si noti che $\rho = r$), e studiamo le traiettorie $\rho(\theta)$ del punto, finché possibile con $U(\rho)$ non specificato; d'ora in poi $\underline{\ell}$ e E saranno considerati dati del problema. Oltre alla base canonica $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ (fissa), in Π conviene introdurre anche la base $(\underline{u}_\rho, \underline{u}_\theta)$ (mobile) dei versori radiale $\underline{u}_\rho = (\cos \theta)\underline{e}_1 + (\sin \theta)\underline{e}_2$ e tangenziale $\underline{u}_\theta = (-\sin \theta)\underline{e}_1 + (\cos \theta)\underline{e}_2$: si ha dunque $\underline{\dot{u}}_\rho = \dot{\theta}\underline{u}_\theta$ e $\underline{\dot{u}}_\theta = -\dot{\theta}\underline{u}_\rho$. Da $\underline{r} = \rho\underline{u}_\rho$ si ricava allora $\underline{v} = \dot{\rho}\underline{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\underline{u}_\theta$ (da cui $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$), perciò $\underline{\ell} = m\rho^2\dot{\theta}(\underline{u}_\rho \wedge \underline{u}_\theta)$, con norma $\ell = m\rho^2\dot{\theta}$, da cui

$$(3.4) \quad \dot{\theta} = \frac{\ell}{m\rho^2}.$$

In particolare, l'elemento d'area spazzato dal raggio vettore in Π (visto come un triangolo di base infinitesima $\rho d\theta$ e altezza ρ) è $dA = \frac{1}{2}(\rho)(\rho d\theta) = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$, da cui $\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \frac{\ell}{2m}$: in altre parole la velocità areolare $\dot{A}$ è costante, fatto noto come *seconda legge di Keplero* (vera dunque non solo per il caso gravitazionale). D'altra parte, dalla conservazione dell'energia totale e usando (3.4) si ricava

$$(3.5) \quad \dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{\ell^2}{2m\rho^2})}.$$



⁽²⁷⁾ Come di consueto, il punto denota la derivazione rispetto al tempo.

⁽²⁸⁾ per una discussione, si veda a pag. 56.

⁽²⁹⁾ Per il momento angolare si ha $\underline{\dot{\ell}} = (\underline{r} \wedge m\underline{v})' = \underline{v} \wedge m\underline{v} + \underline{r} \wedge m\underline{a} = \underline{0} + \underline{r} \wedge \underline{F} = \underline{0}$ perché per ipotesi $\underline{F}$ è parallela a $\underline{r}$; per l'energia totale si veda a pag. 58.

Per ricavare la traiettoria basta notare che $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\dot{\rho}}{\dot{\theta}}$ e usare (3.4) e (3.5), ricavando la seguente equazione del primo ordine a variabili separate:

$$(3.6) \quad \pm \frac{\ell}{\rho \sqrt{2m\rho^2(E-U(\rho))-\ell^2}} d\rho = d\theta.$$

Concentriamoci ora sul caso gravitazionale, sostituendo $U(\rho) = -\frac{GMm}{\rho}$ in (3.6). Usando il cambio di variabile $\rho = \frac{\ell}{\sigma}$ (da cui $d\rho = -\frac{\ell}{\sigma^2}d\sigma$) e ponendo $a = 2mE$ e $b = \frac{GMm^2}{\ell}$ si ricava $\mp \frac{1}{\sqrt{a+2b\sigma-\sigma^2}} d\sigma = d\theta$, ovvero $\mp \frac{1}{\sqrt{a+b^2-(\sigma-b)^2}} d\sigma = d\theta$, che nell'ipotesi $a+b^2 \geq 0$ (ovvero $E \geq -\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2}$) si integra dando $\mp \arccos \frac{\sigma-b}{\sqrt{a+b^2}} = \theta + k$, da cui $\frac{\sigma-b}{\sqrt{a+b^2}} = \cos(\theta + k)$; risostituendo $\sigma = \frac{\ell}{\rho}$ e imponendo che $\rho(\theta)$ diventi massimo per $\theta = 0$ si determina la costante d'integrazione $k = \pi$ trovando $\rho(\theta) = \frac{\ell/b}{1-(\sqrt{a+b^2}/b)\cos\theta}$, ovvero

$$(3.7) \quad \rho(\theta) = \frac{p}{1-e\cos\theta} \quad \text{con} \quad \begin{cases} p = \frac{\ell^2}{GMm^2} \\ e = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{G^2M^2m^3}} \end{cases}.$$

Basta ricordare (3.2) per concludere che, nel caso $-\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} \leq E < 0$ (in cui $0 \leq e < 1$), la forma (3.7) conferma la *prima legge di Keplero* (il pianeta percorre un'ellisse di cui il sole occupa uno dei fuochi); inoltre quando $E \geq 0$, ovvero $e \geq 1$, si vede che il corpo celeste⁽³⁰⁾ percorre traiettorie paraboliche o iperboliche.

Per completezza ricaviamo nel caso ellittico (ovvero $-\frac{G^2M^2m^3}{2\ell^2} \leq E < 0$) la *terza legge di Keplero*, che afferma che il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore dell'orbita e il quadrato del periodo di rivoluzione è una costante indipendente dai pianeti. Iniziamo notando che da (3.7) il semiasse maggiore dell'ellisse è $\alpha = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\ell^2}{(1-e^2)GMm^2}$, da cui $\ell = \ell(\alpha) = \sqrt{(1-e^2)GMm^2\alpha}$ (notiamo anche che, inserendo $\ell(\alpha)$ nell'eccentricità e in (3.7), si ottiene $E = E(\alpha) = -\frac{GMm}{2\alpha}$, il che esprime i due integrali primi ℓ e E in funzione di α). Ora, ricordando che il semiasse minore è $\beta = \alpha\sqrt{1-e^2}$, l'area dell'ellisse è come noto $A = \pi\alpha\beta = \pi\alpha^2\sqrt{1-e^2}$; d'altra parte, se T indica il periodo di rivoluzione, tale area è anche uguale a $A = \int_0^T \dot{A}(t) dt = \frac{\ell T}{2m}$ (qui $\dot{A}(t) = \frac{\ell}{2m}$ è la velocità areolare, costante). Confrontando le due espressioni di A , inserendo $\ell(\alpha)$ e semplificando si trova $\pi\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{GM}}{2}T$, ovvero $\frac{\alpha^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$, che è quanto si voleva.

3.2 Curve parametriche affini

Una *curva parametrica affine* è una funzione

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$; se $1 \leq j \leq n$ e $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione j -esima (cioè $\pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$), la funzione $\gamma_j = \pi_j \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *j-esima componente* di γ , e

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)).$$

Molto spesso, al posto della funzione $\gamma(t)$ (che descrive la variazione di un punto in $\mathbb{R}^n$ che dipende da un solo parametro reale t) e delle sue componenti $\gamma_j(t)$, si scrive direttamente il punto affine variabile $\underline{x}(t)$ e le sue coordinate variabili $x_j(t)$. Il *sostegno*⁽³¹⁾ di γ è l'insieme

⁽³⁰⁾in questo caso sarebbe forse meglio pensare ad un meteorite che passa velocemente nei paraggi della Terra ricavandone un'incurvatura della sua traiettoria.

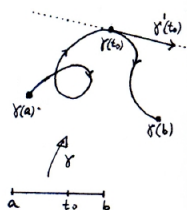
⁽³¹⁾o talvolta, meno correttamente, *supporto*.

Curva parametrica affine

Componenti di una curva

Sostegno di una curva

immagine $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$, che non va confuso con γ .⁽³²⁾ La curva γ si dirà *piana* se è a valori in $\mathbb{R}^2$, o più generalmente se il sostegno è in un piano affine bidimensionale di $\mathbb{R}^n$.



La curva γ si dirà *continua* in $t_0 \in I$ se $\lim_{h \rightarrow 0} \|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| = 0$.

Curva continua

La curva γ si dirà *derivabile* in t_0 se esiste un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che

Curva derivabile

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \underline{v} \right\| = 0.$$

Tale vettore $\underline{v}$, che se esiste è unico,⁽³³⁾ è detto *derivata* (o *vettore derivato*) a γ in t_0 , e viene denotato con $\gamma'(t_0)$; geometricamente, $\gamma'(t_0)$ è un vettore tangente (eventualmente nullo) al sostegno di γ nel punto $\gamma(t_0)$.

Derivata di una curva

Continuità e derivabilità di una curva equivalgono a quelle di ciascuna componente:

Proposizione 3.2.1. γ è continua in t_0 se e solo se ogni γ_j è continua in t_0 .

Dimostrazione. Segue da $\max_j |\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)| \leq \|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| \leq \sum_j |\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)|$. $\square$

Proposizione 3.2.2. Se γ è derivabile in t_0 , essa è anche continua in t_0 . Inoltre, γ è derivabile in t_0 se e solo se ogni γ_j è derivabile in t_0 , e vale $\gamma'(t_0) = (\gamma'_1(t_0), \dots, \gamma'_n(t_0))$.

Dimostrazione. Se γ è derivabile in t_0 , allora $\|\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)\| = \left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} \right\| |h| \leq (\left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \gamma'(t_0) \right\| + \|\gamma'(t_0)\|) |h|$ tende a 0 quando $h \rightarrow 0$, ovvero γ è continua in t_0 ; il resto dell'enunciato segue da $\max_j \left| \frac{\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)}{h} - v_j \right| \leq \left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \underline{v} \right\| \leq \sum_j \left| \frac{\gamma_j(t_0 + h) - \gamma_j(t_0)}{h} - v_j \right|$. $\square$

In generale, la curva γ si dice di classe $\mathcal{C}^k$ se tutte le sue componenti γ_j sono di classe $\mathcal{C}^k$.

Curva di classe $\mathcal{C}^k$

È il caso di evidenziare i seguenti due casi importanti.

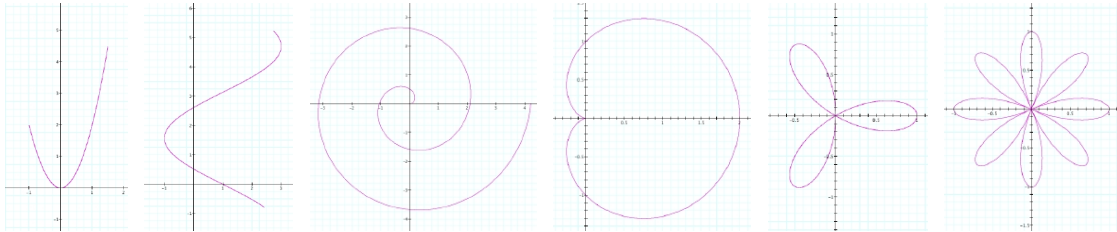
- (1) Se I è un intervallo di $\mathbb{R}$ ed $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione, la *curva-grafico* di f è $\gamma_f : I \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ data da $\gamma_f(t) = (t, f(t))$. Il sostegno di γ_f è nient'altro che il grafico di f (sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$), cioè $\Gamma_f = \{(t, f(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I\}$.
- (2) Se una curva piana è data tramite in *forma polare* $\rho = f(\theta)$, ovvero $\rho(\theta)$, si ottiene una parametrizzazione tramite $\gamma : [\theta_1, \theta_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$.

Esempi. (1) (Vedi Figure 1) Se $f : [-1, \frac{3}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $f(t) = 2t^2$, la curva-grafico $\gamma_f : [-1, \frac{3}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha componenti $(\gamma_f)_1(t) = t$ e $(\gamma_f)_2(t) = 2t^2$, ed il sostegno di γ_f è il tratto di parabola $y = 2x^2$ nel piano cartesiano con $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Ma i ruoli delle coordinate x e y si possono eventualmente invertire: se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è data da $g(t) = 1 - 2 \sin t$, anche la curva $\gamma_g : [-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di componenti $(\gamma_g)_1(t) = g(t)$ e $(\gamma_g)_2(t) = t$ può essere vista come una curva-grafico (in questo caso, il sostegno di γ_g è il tratto di funzione $x = 1 - 2 \sin y$ nel piano cartesiano con $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{5\pi}{3}$). **(2)** (Vedi Figure 2) Alcuni esempi di curve polari: (a) la *spirale di Archimede* è data da $\rho(\theta) = k\theta$ (ove $k > 0$); (b) la *cardioide* è data da $\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ (ove $a > 0$); (c) la *rodonea* è data da $\rho(\theta) = a \cos n\theta$ (ove $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$); il sostegno è una rosa a n petali se n è

⁽³²⁾Tuttavia spesso, nell'uso corrente, parlando di *curva* si fa riferimento al suo sostegno, e si parla di *parametrizzazione* per indicare la funzione. Questa terminologia apparirà più chiara quando si parlerà, più generalmente, di *varietà parametriche affini* (vedi a pag. 84).

⁽³³⁾Se $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono due tali vettori, si ha $\|\underline{v}_1 - \underline{v}_2\| \leq \left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \underline{v}_1 \right\| + \left\| \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h} - \underline{v}_2 \right\|$, da cui, passando al limite per $h \rightarrow 0$, si ha $\|\underline{v}_1 - \underline{v}_2\| = 0$: ma allora $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{0}$, ovvero $\underline{v}_1 = \underline{v}_2$.

dispari (ad esempio, per $n = 1$ si ha, come visto, la circonferenza $x^2 + y^2 - ax = 0$), e una rosa a $2n$ petali se n è pari. **(3)** Si è visto in precedenza come le *coniche affini* abbiano un'equazione polare del tipo $\rho = \frac{p}{1-e \cos \theta}$, dalla quale si ottiene una parametrizzazione $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\frac{p \cos \theta}{1-e \cos \theta}, \frac{p \sin \theta}{1-e \cos \theta})$. Dunque, il vettore tangente alla conica nel suo punto di argomento θ_0 è $\gamma'(\theta_0) = (-\frac{p \sin \theta_0}{(1-e \cos \theta_0)^2}, -\frac{p(e - \cos \theta_0)}{(1-e \cos \theta_0)^2})$. **(4)** Dati $n \in \mathbb{Z}$ e $r > 0$, la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (r \cos(nt), r \sin(nt))$ percorre n volte in senso antiorario (se $n > 0$) o orario (se $n < 0$) il suo sostegno, che è la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$. Dunque non è detto che una curva γ sia iniettiva, e ciò mostra l'importanza di distinguere tra γ e il suo sostegno. **(5)** Sul seguente esempio torneremo anche più tardi parlando di varietà. La curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (\sin t, \sin t \cos t)$ ha sostegno $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$ che è un "otto" orizzontale percorso da $\gamma(t)$ infinite volte (vedi figura a pag. 71): si noti che $\gamma(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (0, 0)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, mentre gli altri punti di Γ sono raggiunti da $\gamma(t)$ con periodicità 2π (ad esempio $\gamma(2k\pi) = (1, 0)$ e $\gamma(\pi + 2k\pi) = (-1, 0)$).



(1.a), (1.b) Curve-grafico. (2.a) Spirale ($k = \frac{1}{3}$, $0 \leq \theta \leq 4\pi$). (2.b) Cardioide. (2.c'), (2.c'') Rodonee con $n = 3$ e $n = 4$.

Data una curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed un altro intervallo $J \subset \mathbb{R}$, un *cambiamento di parametro* (o *riparametrizzazione*) è una funzione $\alpha : J \rightarrow I$ biiettiva di classe $\mathcal{C}^1$ con α' mai nulla: in particolare α è strettamente monotona (infatti α' , continua, ha segno costante), dunque nel caso in cui $I = [a, b]$ e $J = [c, d]$ vale $\alpha(c) = a$ e $\alpha(d) = b$, o viceversa. La curva ottenuta da γ col cambiamento di parametro α è $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^n$: si tratta solo di un cambio della legge oraria (eventualmente anche del verso) di percorrenza del sostegno, che resta geometricamente lo stesso.

Cambio di parametro

Proposizione 3.2.3. (Formula del cambio di velocità) *Se $\alpha(\tau_0) = t_0$, la curva γ è derivabile in t_0 se e solo se $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$ è derivabile in τ_0 . I vettori tangenti $\tilde{\gamma}'(\tau_0)$ e $\gamma'(t_0)$ di $\mathbb{R}^n$ sono paralleli, e vale $\tilde{\gamma}'(\tau_0) = \gamma'(t_0)\alpha'(\tau_0)$ (in particolare $\|\tilde{\gamma}'(\tau_0)\| = |\alpha'(\tau_0)| \|\gamma'(t_0)\|$).*

Dimostrazione. Le componente j -esima di $\tilde{\gamma}$ è $\tilde{\gamma}_j = \gamma_j \circ \alpha$, dunque $\tilde{\gamma}_j$ è derivabile in τ_0 se e solo se γ_j è derivabile in t_0 , e vale $\tilde{\gamma}'_j(\tau_0) = \gamma'_j(t_0)\alpha'(\tau_0)$. La conclusione segue allora dalla Proposizione 3.2.2. $\square$

Esempio. Dato $r > 0$, la semicirconferenza $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2, x \leq 0\}$ si può parametrizzare tramite la coordinata $t = y$ con $\gamma : [-r, r] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(y) = (-\sqrt{r^2 - y^2}, y)$, o, usando la coordinata polare $\tau = \theta$, anche da $\tilde{\gamma} : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\gamma}(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Il cambio di parametro $\alpha : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-r, r]$ è dunque $y = \alpha(\theta) = r \sin \theta$: si tratta effettivamente di una funzione biiettiva, con inversa $\alpha^{-1} : [-r, r] \rightarrow [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ data da $\alpha^{-1}(y) = \pi - \arcsin \frac{y}{r}$.

D'ora in poi supporremo che sia $I = [a, b]$, intervallo chiuso e limitato. In tal caso, se $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dirà *circuito*, con ovvio significato geometrico. Se le componenti di $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ sono localmente integrabili (ad esempio, se γ è una curva continua), si definisce l'*integrale (vettoriale)* di γ come il vettore

Circuito

Integrale vettoriale

$$\int_a^b \gamma(t) dt = (\int_a^b \gamma_1(t), \dots, \int_a^b \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

Nel caso $n = 2$, identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ si ritrova l'integrale di funzioni a valori complessi.

Proposizione 3.2.4. (Proprietà dell'integrale vettoriale) *L'integrale vettoriale ha le seguenti proprietà (ove $\gamma, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ sono curve e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$):*

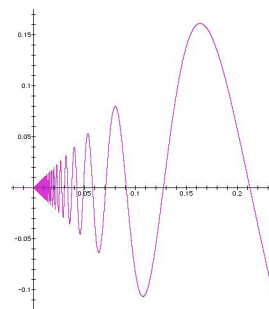
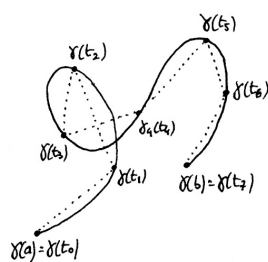
- (i) (Linearità) $\int_a^b (\lambda\gamma + \mu\psi)(t) dt = \lambda \int_a^b \gamma(t) dt + \mu \int_a^b \psi(t) dt$.
- (ii) (Disuguaglianza fondamentale) $\|\int_a^b \gamma(t) dt\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\| dt$.

Dimostrazione. (i) Immediato. (ii) Sia $p_r = \{t_0, \dots, t_r\}$ la partizione dell'intervallo $[a, b]$ in r parti uguali (con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$, e $t_k = a + k\frac{b-a}{r}$): per le proprietà di positiva omogeneità e di disuguaglianza triangolare delle norme (qui in $\mathbb{R}^n$) si ha $\|\sum_{k=1}^r \gamma(t_k)(t_k - t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^r \|\gamma(t_k)(t_k - t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^r \|\gamma(t_k)\|(t_k - t_{k-1})$. Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, il Teorema del Confronto dà la disuguaglianza desiderata (i membri estremi sono somme di Riemann dei rispettivi integrali). $\square$

3.3 Lunghezza, integrali al differenziale d'arco

Data una curva continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ed una partizione $p = \{t_0, \dots, t_r\}$ dell'intervallo $[a, b]$ (con $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{r-1} < t_r = b$), la somma $L_p = \sum_{j=1}^r \|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ rappresenta la lunghezza geometrica della poligonale in $\mathbb{R}^n$ ottenuta congiungendo in successione gli $r + 1$ punti $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_r)$; ed è chiaro che se $p_1 \subset p_2$ allora $L_{p_1} \leq L_{p_2}$. Si porrà allora $L_\gamma = \sup_{\mathbb{R}} \{L_p : p \text{ partizione di } [a, b]\}$, e si dirà che γ è *rettificabile* se $L_\gamma < +\infty$ (e in tal caso L_γ si dirà *lunghezza* della curva γ). Ciò non è sempre vero⁽³⁴⁾, ma lo è nel caso assai frequente in cui γ è di classe $\mathcal{C}^1$, o perlomeno di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti.⁽³⁵⁾

Lunghezza di una curva



(a) Rettificazione parziale di una curva. (b) Parte del sostegno della curva non rettificabile $(t, t \cos \frac{1}{t})$.

Proposizione 3.3.1. (Lunghezza di una curva di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti) *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, allora γ è rettificabile e vale*

$$L_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

⁽³⁴⁾ un controesempio è la curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(0) = (0, 0)$ e $\gamma(t) = (t, t \cos \frac{1}{t})$ per $0 < t \leq 1$, mostrata in figura.

⁽³⁵⁾ ovvero γ è continua ed esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sia di classe $\mathcal{C}^1$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Dimostrazione. Ragionando tratto per tratto, possiamo supporre che γ sia di classe $\mathcal{C}^1$. Dimostriamo che $L_\gamma \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, il che prova in particolare la rettificabilità di γ . Sia $p = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b\}$ una qualsiasi partizione dell'intervallo $[a, b]$: poiché per ogni $j = 1, \dots, r$ vale $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\| = \|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt\| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| dt$, sommando su j si ottiene $L_p \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$: per l'arbitrarietà di p , ciò deve valere anche per L_γ (che è l'estremo superiore degli L_p). Diamo infine una traccia⁽³⁶⁾ della dimostrazione che vale l'uguaglianza. Quando la partizione p di $[a, b]$ diventa sempre più fine, si ha che da un lato L_p tende a L_γ , e dall'altro la somma di Riemann $L'_p = \sum_{j=1}^r \|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$ tende all'integrale $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. D'altra parte, grazie al Teorema di Lagrange applicato alle componenti di γ si ha che per ogni $j = 1, \dots, r$ ed ogni $k = 1, \dots, n$ esiste $\tau_{j,k} \in]t_{j-1}, t_j[$ tale che $\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}) = \gamma'_k(\tau_{j,k})(t_j - t_{j-1})$. Poiché le γ'_k sono tutte continue, rendendo sempre più fine la partizione p si rendono tutti i valori $\gamma'_k(\tau_{j,k})$ arbitrariamente vicini al valore finale $\gamma'_k(t_j)$ (ed in modo uniforme al variare di j e k , indici finiti): ne consegue che $\|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\|$ è arbitrariamente vicino a $\|\gamma'(t_j)\|(t_j - t_{j-1})$ per ogni j , e pertanto, sommando su j , che L_p è arbitrariamente vicina a L'_p . Dunque L_p diventa arbitrariamente vicina a $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, e ciò dà $L_\gamma = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. $\square$

La funzione $\ell : [a, b] \rightarrow [0, L_\gamma]$ data da $\ell(t) = \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds$, che descrive l'evoluzione della lunghezza del cammino percorso, è detta *ascissa curvilinea* associata a γ . Ascissa curvilinea

L'interpretazione più naturale del seguente risultato, che generalizza per quanto possibile il Teorema del valor medio di Lagrange in una variabile,⁽³⁷⁾ è il noto fatto che, nel piano, il cammino più breve tra due punti è quello lungo il segmento che li congiunge.

Teorema 3.3.2. (Teorema del valor medio per le curve) *Se γ è di classe $\mathcal{C}^1$, vale*

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq L_\gamma \leq \|\gamma'\|_{\sup} |b - a|, \quad \text{ove } \|\gamma'\|_{\sup} = \sup_{t \in [a, b]} \|\gamma'(t)\|.$$

Dimostrazione. Usando il Teorema Fondamentale del Calcolo (facilmente valido anche per l'integrale vettoriale) e la disuguaglianza triangolare dell'integrale vettoriale (Proposizione 3.2.4(ii)) per γ' , si ottiene $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| = \|\int_a^b \gamma'(t) dt\| \leq (L_\gamma =) \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq \|\gamma'\|_{\sup} |b - a|$. $\square$

Mostriamo tra breve (vedi Proposizione 3.3.3) che, come è da attendersi per quanto detto, la lunghezza L_γ non dipende dalla particolare parametrizzazione scelta γ , nel senso che non cambia per riparametrizzazioni. Non si confonda con troppa facilità L_γ (che rappresenta la lunghezza totale del cammino percorso dal punto geometrico $\gamma(t)$ in $\mathbb{R}^n$) con la *lunghezza geometrica* del sostegno di γ , perché le due nozioni potrebbero differire l'una dall'altra.⁽³⁸⁾ Mettiamo nuovamente in evidenza i seguenti casi:

- (1) Per le curve-grafico γ_f con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si ha $\gamma_f(x) = (x, f_1(x), \dots, f_n(x))$, e il numero $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f_1'(x)^2 + \dots + f_n'(x)^2} dx$ coincide con la lunghezza geometrica

⁽³⁶⁾ che diventerebbe rigorosa introducendo un arbitrario $\varepsilon > 0$ e facendo le opportune maggiorazioni.

⁽³⁷⁾ In effetti un teorico analogo di Lagrange in più variabili (ovvero, che esista $c \in]a, b[$ tale che valga l'uguaglianza vettoriale $\gamma(b) - \gamma(a) = \gamma'(c)(b - a)$) è falso, come si vede subito con l'esempio di un circuito percorso a velocità mai nulla, tipo la circonferenza $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$: in questo caso il primo membro è il vettore nullo, mentre il secondo non lo è mai.

⁽³⁸⁾ Ciò accade se la parametrizzazione fa percorrere al punto $\gamma(t)$ il sostegno in modo anomalo, ad esempio, passando più volte in alcuni suoi tratti. L'esempio classico è quello della suddetta curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (r \cos(nt), r \sin(nt))$ con $n \in \mathbb{N}$, che fa percorrere a $\gamma(t)$ la circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ per n volte: qui si ha $\|\gamma'(t)\| \equiv nr$ da cui $L_\gamma = n(2\pi r)$, mentre ovviamente la lunghezza del sostegno è $2\pi r$.

del sostegno di γ_f , ovvero del grafico di f . Ad esempio, per una curva-grafico piana $\gamma_f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma_f(x) = (x, f(x))$ ove $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe $\mathcal{C}^1$, la lunghezza diventa $L_\gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$.

- (2) Se una curva piana ha equazione polare $\rho = \rho(\theta)$ per $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, da cui la parametrizzazione $\gamma(\theta) = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$, si ricava facilmente $L_\gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta$.

Esempi. (1) Il tratto di parabola $y = \alpha x^2$ su $[a, b]$ è il sostegno della curva-grafico $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(x) = (x, \alpha x^2)$, e dunque ha lunghezza $\int_a^b \sqrt{1 + 4\alpha^2 x^2} dx = \frac{b\sqrt{1+4\alpha^2 b^2} - a\sqrt{1+4\alpha^2 a^2}}{2} + \frac{1}{4\alpha} \log \frac{2\alpha b + \sqrt{1+4\alpha^2 b^2}}{2\alpha a + \sqrt{1+4\alpha^2 a^2}}$.

(2) L'ellisse piana di semiassi a e b , ovvero il luogo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si può parametrizzare tramite la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ (attenzione: t non è l'angolo delle coordinate polari, tranne il caso della circonferenza in cui $a = b$) e dunque ha lunghezza $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$ che non può essere calcolata elementarmente tranne quando $a = b$, in cui si ottiene ovviamente $\int_0^{2\pi} a dt = 2a\pi$. **(3)** L'*elica cilindrica* di raggio r e pendenza m è il sostegno di $\gamma : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, mt)$, ed ha lunghezza $\int_0^{\theta_0} \sqrt{r^2 + m^2} dt = \theta_0 \sqrt{r^2 + m^2}$. **(4)** La spirale di Archimede $\rho(\theta) = k\theta$ (ove $k > 0$ e $\theta \in [0, \theta_0]$) ha lunghezza $\int_0^{\theta_0} \sqrt{k^2 \theta^2 + k^2} d\theta = k(\theta_0 \sqrt{1 + \theta_0^2} + \log(\theta_0 + \sqrt{1 + \theta_0^2}))$. **(5)** La cardiode $\rho(\theta) = 2a(1 - \cos \theta)$ (con $a > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$) ha lunghezza $\int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2(1 - \cos \theta)^2 + 4a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 2a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = 4a \int_0^{2\pi} |\sin \frac{\theta}{2}| d\theta = 16a$.

Più in generale, se $A \subset \mathbb{R}^n$ contiene il sostegno di γ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, si può definire $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f \circ \gamma$ è continua e γ è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, l'*integrale (al differenziale) d'arco* di f lungo γ è dato da

Integrale al differenziale d'arco

$$\int_\gamma f d\sigma = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

(Si noti che per $f \equiv 1$ si riottiene la lunghezza L_γ .) Il simbolo $d\sigma = \|\gamma'(t)\| dt$ è detto *elemento d'arco* o *differenziale d'arco*: formalmente, esso rappresenta la lunghezza del percorso infinitesimo fatto dal punto $\gamma(t)$ sul sostegno di γ in corrispondenza di un incremento infinitesimo dt del parametro t .

Elemento d'arco

Proposizione 3.3.3. Il numero $\int_\gamma f d\sigma$ non cambia per riparametrizzazioni di γ .

Dimostrazione. Sia $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una riparametrizzazione: si noti che se $\alpha' > 0$ allora vale $\alpha^{-1}(a) = c$ e $\alpha^{-1}(b) = d$, e viceversa se $\alpha' < 0$. Sia dunque $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$: usando la Proposizione 3.2.3 ed il cambio di variabile $t = \alpha(\tau)$ si ottiene $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(\tau))) \|\gamma'(\alpha(\tau))\| |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_c^d f(\gamma(\alpha(\tau))) \|\gamma'(\alpha(\tau))\| |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_c^d f(\tilde{\gamma}(\tau)) \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau$, che è quanto si voleva. $\square$

Un esempio classico di applicazione degli integrali al differenziale d'arco è nel calcolo delle grandezze fisiche associate a ad una curva materiale $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Supponiamo che Γ sia parametrizzata da $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe $\mathcal{C}^1$ iniettiva e col vettore tangente $\gamma'(t)$ mai nullo, e si assegni una *densità lineare di massa* $\delta : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ (di dimensioni fisiche kg/m) per cui la *massa totale* di Γ sia data dall'integrale d'arco $m = \int_\gamma \delta d\sigma$.

Densità lineare di massa

- Il *baricentro* di Γ è il punto $(x_\Gamma, y_\Gamma, z_\Gamma) = (\frac{1}{m} \int_\gamma \delta x d\sigma, \frac{1}{m} \int_\gamma \delta y d\sigma, \frac{1}{m} \int_\gamma \delta z d\sigma)$.

Baricentro

- Fissata una retta $r \subset \mathbb{R}^3$, sia $d_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione “distanza da r ”;⁽³⁹⁾ il *momento*

Momento d'inerzia

d'inerzia di Γ rispetto ad r è definito come il numero positivo $I_r(\Gamma) = \int_{\gamma} \delta d_r^2 d\sigma$.

- Nel caso *omogeneo*, in cui $\delta = m/L_{\gamma}$ è costante, si ottiene il *baricentro geometrico* $(\frac{1}{L_{\gamma}} \int x d\sigma, \frac{1}{L_{\gamma}} \int y d\sigma, \frac{1}{L_{\gamma}} \int z d\sigma)$ ed il momento d'inerzia $I_r(\Gamma) = \frac{m}{L_{\gamma}} \int_{\gamma} d_r^2 d\sigma$.

Esempio. Si consideri un arco di circonferenza materiale omogenea parametrizzato da $\gamma : [0, \theta_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$: poiché $L_{\gamma} = r\theta_0$, il baricentro avrà coordinate (x_G, y_G) date da $x_G = \frac{1}{r\theta_0} \int_0^{\theta_0} (r \cos t) r dt = r \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$ e $y_G = \frac{1}{r\theta_0} \int_0^{\theta_0} (r \sin t) r dt = r \frac{1 - \cos \theta_0}{\theta_0}$. Supponendo invece che la densità evolva con l'angolo t secondo la legge $\delta(t) = kt + h$ (ove $k, h > 0$ sono parametri con dimensione fisica kg/m), la massa totale è $m = \int_0^{\theta_0} (kt + h) r dt = r \frac{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}{2}$, così si ha $x_G = \frac{1}{m} \int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \cos t) r dt = r \frac{2(k(\theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0 - 1) + h \sin \theta_0)}{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}$ e $y_G = \frac{1}{m} \int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \sin t) r dt = r \frac{2(k(\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0) + h(1 - \cos \theta_0))}{\theta_0(k\theta_0 + 2h)}$; il caso omogeneo si ritrova per $k = 0$. Infine, il momento d'inerzia rispetto all'asse x è dato da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \sin t)^2 r dt$ e quello rispetto all'asse y da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r \cos t)^2 r dt$ (si omettono i calcoli), mentre quello rispetto ad un asse z ortogonale da $\int_0^{\theta_0} (kt + h)(r)^2 r dt = \frac{r^3 \theta_0(k\theta_0 + 2h)}{2}$.

⁽³⁹⁾ Ad esempio, se r è l'asse x si ha $d_r(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2}$.