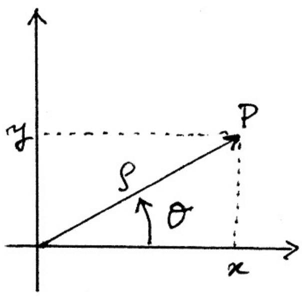
Indice

Sistemi di coordinate alternativi alle cartesiane nel piano e nello spazio tridimensionale

Anziché le solite cartesiane, può essere utile usare altre coordinate...

Polari (piano)



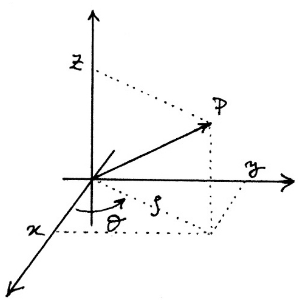
$\boxed{(x, y) \quad \leftrightarrow \quad (\rho, \theta)}$

$x = \rho \cos\theta \ ; \ y = \rho \sin\theta$

$(\rho > 0 \ ; \ -\pi < \theta < \pi)$

Es.: $\{\rho = r\}$ = circonferenza

Cilindriche (spazio)



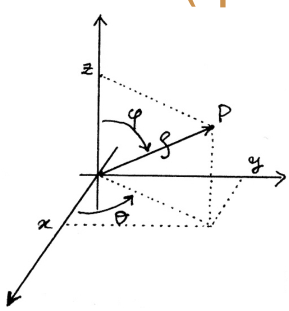
$\boxed{(x, y, z) \quad \leftrightarrow \quad (\rho, \theta, z)}$

$x = \rho \cos\theta \ ; \ y = \rho \sin\theta \ ; \ z = z$

$(\rho > 0 \ ; \ -\pi < \theta < \pi \ ; \ z \in \mathbb{R})$

Es.: $\{\rho = r, \ 0 < z < h\}$ = cilindro

Sferiche (spazio)



$\boxed{(x, y, z) \quad \leftrightarrow \quad (\rho, \theta, \varphi)}$

$x = \rho \cos\theta \sin\varphi \ ; \ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \ ; \ z = \rho \cos\varphi$

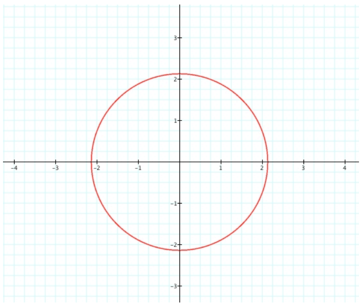
$(\rho > 0 \ ; \ -\pi < \theta < \pi \ ; \ 0 < \varphi < \pi)$

Es.: $\{\rho = r, \ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ = emisfero nord

Curve parametriche

Cos'è una curva parametrica? È il moto virtuale di un punto in $\mathbb{R}^n$:
ovvero una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, ove I è un intervallo di $\mathbb{R}$.

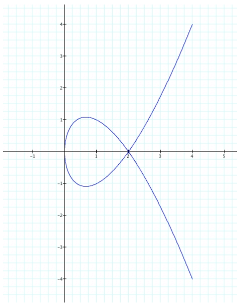
$\boxed{\gamma(t) = \underline{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))}$ (t è detto parametro, in un moto vero è il tempo)



Circonferenza in $\mathbb{R}^2$

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$,

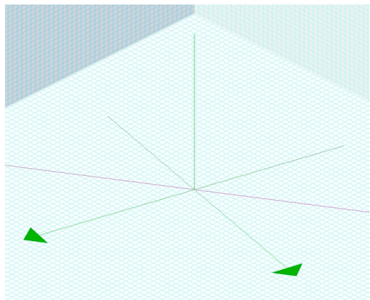
$\gamma(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$



Curva piana singolare

$\gamma : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$,

$\gamma(t) = (t^2, t(t^2 - 2))$



Retta in $\mathbb{R}^3$ (bisettrice $z = 0$)

$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

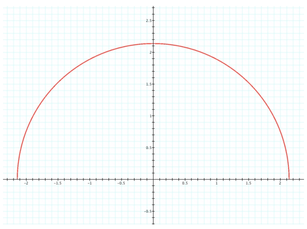
$\gamma(t) = (t, -t, 0)$

Curva, sostegno, parametrizzazioni

Terminologia canonica : $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ è la curva,
la sua immagine $C = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ è il sostegno della curva.

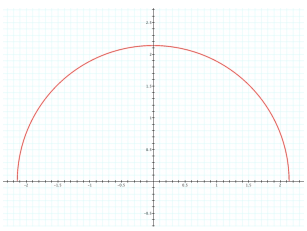
Terminologia usuale: il sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}^n$ è detto curva (affine),
una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ con $\gamma(I) = C$ è detta parametrizzazione di C.
(In un moto vero: C è la traiettoria, e $\gamma(t)$ la legge oraria di percorrenza della traiettoria.)

Una stessa curva può avere molte diverse parametrizzazioni !



Semicirconferenza in $\mathbb{R}^2$

$\gamma_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_1(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$



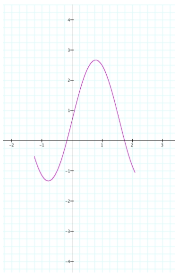
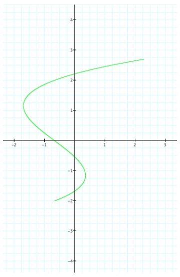
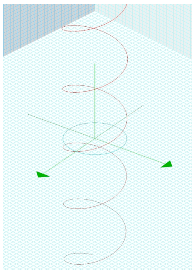
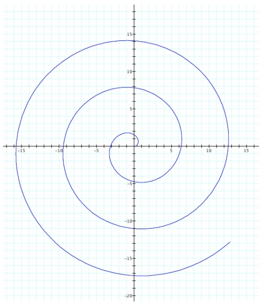
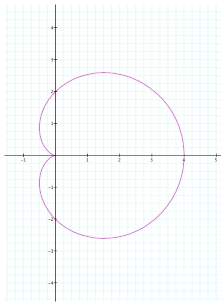
Semicirconferenza in $\mathbb{R}^2$

$\gamma_2 : [-r, r] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma_2(x) = (x, \sqrt{r^2 - x^2})$

Due famiglie importanti di curve parametriche

Curva-grafico in $\mathbb{R}^n$: una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ **grafico di funzione** $\boxed{\phi : I \to \mathbb{R}^{n-1}}$ ad es. della coordinata x_n $\rightsquigarrow$ $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_k(t) = \phi_k(t)$ (per $k < n$) e $\gamma_n(t) = t$.

Curva piana in forma polare: nella forma $\boxed{\rho = \rho(\theta)}$ **(distanza dal polo in funz. dell'argomento)** $\rightsquigarrow$ $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$.

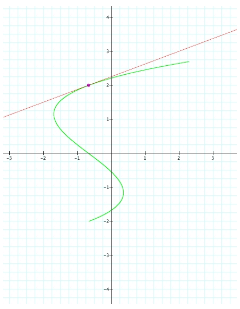
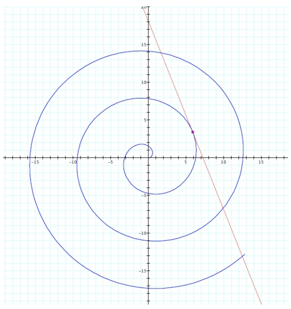
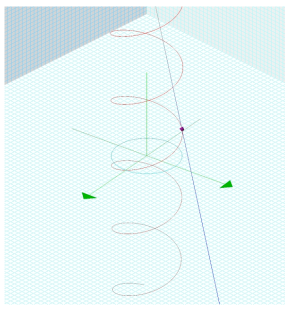






- $y = f(x)$, $x \in I$ $\rightsquigarrow$ $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$
- $x = g(y)$, $y \in J$ $\rightsquigarrow$ $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (g(t), t)$
- **Elica cilindrica :** $(x, y) = (3\cos z, 3\sin z)$, $z \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (3\cos t, 3\sin t, t)$
- **Spirale di Archimede :** $\rho(\theta) = \theta$, $\theta \in I = [0, \frac{23}{4}\pi]$ $\rightsquigarrow$ $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta) = (\theta\cos\theta, \theta\sin\theta)$
- **Cardioide :** $\rho(\theta) = 2(1 + \cos\theta)$, $\theta \in J = [0, 2\pi]$ $\rightsquigarrow$ $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$

Cosa fare con le curve parametriche?

Data una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ con una parametrizzazione $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ ...

- la retta tangente a C in $\underline{x}_0 = \gamma(t_0)$ è data dal vettore $\boxed{\gamma'(t_0)}$
  (In un moto vero: $\gamma'(t_0)$ è il vettore velocità, tangente alla traiettoria)

- data $f : C \to \mathbb{R}$, si definirà un integrale curvilineo $\boxed{\int_C f\, ds}$ che generalizza quello già noto. Ad esempio:
  - quando $f \equiv 1$, l'integrale calcolerà la lunghezza di C;
  - se C è una *curva materiale*, opportune scelte di f daranno il baricentro di C o i suoi momenti d'inerzia rispetto a vari assi di rotazione.