Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)
Autoverifica sulle curve parametriche affini

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

giovedì 30 aprile 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 04/05). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione usando lo svolgimento indicato. **(3)** Da lunedì 04/05 <u>fino a mercoledì 06/05</u> sarà possibile, seguendo il <u>link</u> che sarà attivato il 04/05 nella pagina web, <u>comunicare via web</u> in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme a eventuali commenti. Nella comunicazione online dell'autovalutazione <u>non vanno indicati i punteggi facoltativi</u>: inserire eventuali informazioni a riguardo nel campo "Commenti".
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 60 pt (20+15+25) + 10 pt facolt.; **Ex. 2:** 40 pt (10+30) + 10 pt facolt.
Totale: 100 pt + 20 pt facoltativi. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Sia μ il tratto dell'iperbole $3x^2 - 2y^2 - 1 = 0$ con $x < 0$ e $-1 \le y \le 2$, e sia ν la curva polare definita dall'equazione $\rho = \frac{2}{1+\sin\theta}$ con $0 \le \theta \le \pi$.

- (i) Disegnare μ e ν ;[1] parametrizzare opportunamente μ come curva-grafico $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ (chi è l'intervallo I ?); scrivere esplicitamente la parametrizzazione di ν associata alla sua equazione polare.
- (ii) Calcolare la retta tangente a μ nel suo punto $(-1, 1)$, e quella ortogonale a ν nel suo punto dato da $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
- (iii) Scrivere gli integrali che esprimono le lunghezze e i baricentri geometrici di μ e ν.
- (iv) (<u>Facoltativo</u>) Mostrare che $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^2$ data[2] da $\tilde{\gamma}(\tau) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh\tau, \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\tau)$ è un'altra parametrizzazione di μ (chi è l'intervallo J ?). Esprimere inoltre ν come curva-grafico. Calcolare, in entrambi i casi, il cambio di parametro.

2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la curva $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (t\cos 2\pi t, t\sin 2\pi t, t^2)$.

- (i) Disegnare il sostegno Γ di γ, dopo aver notato che Γ giace sul paraboloide $z = x^2 + y^2$.
- (ii) Calcolare l'elemento d'arco $d\sigma$, e scrivere l'integrale che dà la lunghezza di Γ. Calcolare con precisione gli integrali $\int_\gamma \sqrt{z}\, d\sigma$, $\int_0^1 \gamma(t)\, dt$ e $\int_0^1 \|\gamma(t)\|\, dt$.
- (iii) (<u>Facoltativo</u>) Parametrizzare Γ in coordinate cilindriche, usando come parametro l'angolo θ. Qual'è il cambio di parametro $t = \alpha(\theta)$?

---

[1] Per ν, intuire il disegno trovandone diversi punti.

[2] Si ricordi che il *coseno iperbolico* $\cosh u$ ed il *seno iperbolico* $\sinh u$ sono dati rispettivamente da $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ e $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$, e che dunque essi soddisfano identicamente alla relazione $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ per ogni $u \in \mathbb{R}$ (in altre parole, essi sono l'analogo "iperbolico" delle funzioni circolari $\cos u$ e $\sin u$, che soddisfano identicamente alla relazione $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ per ogni $u \in \mathbb{R}$). Il coseno iperbolico è una funzione pari e strettamente positiva, mentre il seno iperbolico è un diffeomorfismo crescente di $\mathbb{R}$ in sè.

Soluzioni.

1. (i) Per i disegni di μ (che si riscrive come $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$) e di ν si vedano le Figure 1 e 2. È chiaro che μ si lascia parametrizzare come curva-grafico di una funzione $x=x(y)$: esplicitando x e scegliendo il ramo giusto si ha $x=-\sqrt{\frac{2y^2+1}{3}}$, da cui la parametrizzazione $\gamma: I\to\mathbb{R}^2$ (con $I=[-1,2]$) data da $\gamma(t)=(-\sqrt{\frac{2t^2+1}{3}},t)$. La parametrizzazione di ν associata alla sua equazione polare $\rho=\frac{2}{1+\sin\theta}$ con $0\le\theta\le\pi$ è, come noto, $\phi:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$ data da $\phi(\theta)=(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)=(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta})$.

(ii) Si ha $\gamma'(t)=(-\frac{2t}{\sqrt{3(2t^2+1)}},1)$; poiché $(-1,1)=\gamma(1)$, un vettore tangente è $\gamma'(1)=(-\frac{2}{3},1)$, perciò una forma parametrica della retta tangente a μ nel suo punto $(-1,1)$ è $\{(-1,1)+\lambda(-\frac{2}{3},1):\lambda\in\mathbb{R}\}=\{(-1-\frac{2}{3}\lambda,1+\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$. Da $y=1+\lambda$ si ricava $\lambda=y-1$, e dunque da $x=-1-\frac{2}{3}\lambda$ si ricava l'equazione cartesiana $x=-1-\frac{2}{3}(y-1)$, ovvero $3x+2y+1=0$.
Il punto di ν dato da $\theta=\frac{5\pi}{6}$ è $\phi(\frac{5\pi}{6})=(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$; essendo $\phi'(\theta)=(-\frac{2}{1+\sin\theta},\frac{2\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2})$, un vettore tangente a ν nel suo punto $\phi(\frac{5\pi}{6})$ è $\phi'(\frac{5\pi}{6})=(-\frac{4}{3},-\frac{4\sqrt{3}}{9})$, e dunque uno ortogonale è ad esempio $(\frac{4\sqrt{3}}{9},-\frac{4}{3})$, o anche il suo multiplo $(1,-\sqrt{3})$. Pertanto la retta ortogonale cercata ha forma parametrica $\{(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})+\lambda(1,-\sqrt{3}):\lambda\in\mathbb{R}\}=\{(-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\lambda,\frac{2}{3}-\sqrt{3}\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$. Da $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\lambda$ si ricava $\lambda=x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$, che messa in $y=\frac{2}{3}-\sqrt{3}\lambda$ dà l'equazione cartesiana $y=-\sqrt{3}\,x-\frac{4}{3}$.

(iii) La lunghezze sono date da $L_\mu=\int_{-1}^2\|\gamma'(t)\|\,dt=\int_{-1}^2\sqrt{1+\frac{4t^2}{3(2t^2+1)}}\,dt=\int_{-1}^2\sqrt{\frac{10t^2+3}{3(2t^2+1)}}\,dt$ e $L_\nu=\int_0^\pi\|\phi'(\theta)\|\,d\theta=\int_0^\pi 2\sqrt{\frac{1}{(1+\sin\theta)^2}+\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^4}}\,d\theta=2\sqrt{2}\int_0^\pi(1+\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}\,d\theta$ (si noti che è come fare $\int_0^\pi\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}\,d\theta$).
Il baricentro geometrico di μ ha coordinate $x=\frac{1}{L_\mu}\int_{-1}^2 x(t)\|\gamma'(t)\|\,dt=\frac{1}{L_\mu}\int_{-1}^2(-\sqrt{\frac{2t^2+1}{3}})\sqrt{\frac{10t^2+3}{3(2t^2+1)}}\,dt=-\frac{1}{3L_\mu}\int_{-1}^2\sqrt{10t^2+3}\,dt$ e $y=\frac{1}{L_\mu}\int_{-1}^2 y(t)\|\gamma'(t)\|\,dt=\frac{1}{L_\mu}\int_{-1}^2 t\sqrt{\frac{10t^2+3}{3(2t^2+1)}}\,dt$; infine, il baricentro geometrico di ν ha coordinate $x=\frac{1}{L_\nu}\int_0^\pi x(\theta)\|\phi'(\theta)\|\,d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{L_\nu}\int_0^\pi(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta})(1+\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}\,d\theta=\frac{4\sqrt{2}}{L_\nu}\int_0^\pi\cos\theta(1+\sin\theta)^{-\frac{5}{2}}\,d\theta=\frac{4\sqrt{2}}{L_\nu}(-\frac{2}{3}(1+\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}]_0^\pi=0$ (com'era ovvio che fosse, per ragioni di simmetria) e $y=\frac{1}{L_\nu}\int_0^\pi y(\theta)\|\phi'(\theta)\|\,d\theta=\frac{2\sqrt{2}}{L_\nu}\int_0^\pi(\frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta})(1+\sin\theta)^{-\frac{3}{2}}\,d\theta=\frac{4\sqrt{2}}{L_\nu}\int_0^\pi\sin\theta(1+\sin\theta)^{-\frac{5}{2}}\,d\theta$.

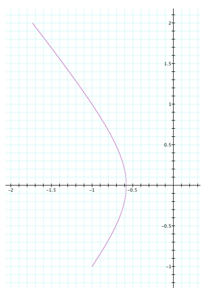
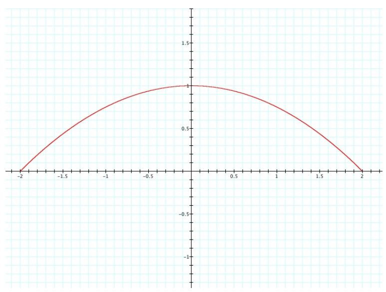
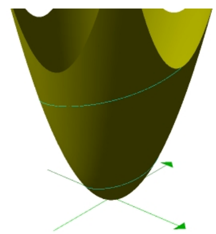
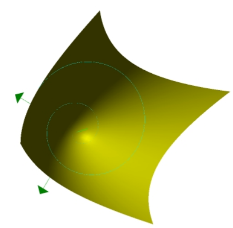
(iv) Iniziamo notando che il sostegno di $\tilde\gamma$ è effettivamente contenuto nel ramo d'iperbole $3x^2-2y^2-1=0$ con $x<0$ (infatti $3(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh\tau)^2-2(\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\tau)^2-1=\cosh^2\tau-\sinh^2\tau-1=0$, e $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cosh\tau<0$), e che, essendo il seno iperbolico $\sinh\tau$ un omeomorfismo strettamente crescente di $\mathbb{R}$ in sè, tale ramo è tutto percorso dal basso verso l'alto (infatti $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\tau$). Dunque non c'è dubbio che $\tilde\gamma:J\to\mathbb{R}^2$ sia una parametrizzazione di μ alternativa a γ: basterà scegliere l'intervallo J dimodoché $\alpha:J\to I=[-1,2]$ data da $t=\alpha(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\tau$ (ricordiamo che $t=y$) sia biiettiva (diventando così un cambio di parametro) e poi sarà $\tilde\gamma=\gamma\circ\alpha$. Ora, da $\alpha(\tau)=-1$ si ha $\sinh\tau=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{2}=-\sqrt{2}$, ovvero $e^{2\tau}+2\sqrt{2}\,e^\tau-1=0$, da cui $\tau=\log(\sqrt{3}-\sqrt{2})<0$, e similmente, da $\alpha(\tau)=2$ si ha $\sinh\tau=\frac{e^\tau-e^{-\tau}}{2}=2\sqrt{2}$, ovvero $e^{2\tau}-4\sqrt{2}\,e^\tau-1=0$, da cui $\tau=\log(3+2\sqrt{2})>0$: essendo α strettamente crescente, ne deduciamo che $J=[\log(\sqrt{3}-\sqrt{2}),\log(3+2\sqrt{2})]$.
Per ν, dall'equazione polare $\rho=\frac{2}{1+\sin\theta}$ si ricava $\rho+\rho\sin\theta=2$. Reitroducendo le coordinate cartesiane, si ha allora $\sqrt{x^2+y^2}+y=2$, ovvero $\sqrt{x^2+y^2}=2-y$: nell'ipotesi $2-y\ge0$ (cioè $y\le2$) ciò equivale a $x^2+y^2=(2-y)^2=4-4y+y^2$, da cui $x^2+4y-4=0$, ovvero la parabola $y=1-\frac{1}{4}x^2$, che esprime direttamente ν come curva-grafico $y(x)$. La limitazione $0\le\theta\le\pi$ dà $-2\le x\le2$, dunque la parametrizzazione è $\tilde\phi:[-2,2]\to\mathbb{R}^2$ data da $\tilde\phi(t)=(t,1-\frac{1}{4}t^2)$. Il cambio di parametro $\beta:[-2,2]\to[0,\pi]$ con $\theta=\beta(t)$ (che dà $\tilde\phi=\phi\circ\beta$) è la funzione che si ottiene invertendo $t=\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ (uguaglianza tra le due espressioni della coordinata x nella curva ν).

2. (i) Il sostegno Γ della curva $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t)=(t\cos2\pi t,t\sin2\pi t,t^2)$ sta effettivamente sul paraboloide $z=x^2+y^2$, perché $t^2=(t\cos2\pi t)^2+(t\sin2\pi t)^2$ per ogni t. Su questo paraboloide, Γ è una curva che, partendo dal vertice $(0,0,0)$ sale avvolgendosi per due giri: vedi Figure 3 e 4.

(ii) Si ha $\gamma'(t)=(\cos2\pi t-2\pi t\sin2\pi t,\sin2\pi t+2\pi t\cos2\pi t,2t)$, da cui $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+4(\pi^2+1)t^2}$: l'elemento d'arco è dunque $d\sigma=\|\gamma'(t)\|\,dt=\sqrt{1+4(\pi^2+1)t^2}\,dt$, e la lunghezza è allora $L_\Gamma=\int_\gamma d\sigma=\int_0^2\sqrt{1+4(\pi^2+1)t^2}\,dt$.
L'integrale al differenziale d'arco $\int_\gamma\sqrt{z}\,d\sigma$ è per definizione $\int_0^2\sqrt{t^2}\sqrt{1+4(\pi^2+1)t^2}\,dt=\int_0^2 t\sqrt{1+4(\pi^2+1)t^2}\,dt$; posto $u=1+4(\pi^2+1)t^2$, da cui $du=8(\pi^2+1)t\,dt$, si ottiene allora $\frac{1}{8(\pi^2+1)}\int_1^{17+16\pi^2}\sqrt{u}\,du=\frac{1}{12(\pi^2+1)}(u^{\frac{3}{2}}]_1^{17+16\pi^2}=\frac{(17+16\pi^2)^{\frac{3}{2}}-1}{12(\pi^2+1)}$.

L'integrale vettoriale $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$ è uguale alla terna $(\int_0^1 t\cos 2\pi t\,dt, \int_0^1 t\sin 2\pi t\,dt, \int_0^1 t^2\,dt) = \Big(0, 0, \frac{1}{3})$, mentre, essendo $\|\gamma(t)\| = \sqrt{(t\cos 2\pi t)^2 + (t\sin 2\pi t)^2 + (t^2)^2} = t\sqrt{1+t^2}$, si ottiene $\int_0^1 \|\gamma(t)\|\,dt = \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\,dt = (\frac{1}{3}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. Si noti che vale $\|\int_0^1 \gamma(t)\,dt\| = \frac{1}{3} \le \frac{2\sqrt{2}-1}{3} = \int_0^1 \|\gamma(t)\|\,dt$, come prescrive la disuguaglianza triangolare.

(iii) Su Γ, si ha da un lato $(x, y, z) = \gamma(t) = (t\cos 2\pi t, t\sin 2\pi t, t^2)$, e dall'altro la si vuole descrivere in coordinate cilindriche tramite $(x, y, z) = \tilde{\gamma}(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta, z(\theta))$: ciò si ottiene con $2\pi t = \theta$ (da cui $t = \alpha(\theta) = \frac{1}{2\pi}\theta$, con $\alpha : [0, 4\pi] \to [0, 2]$, è il cambio di parametro cercato), e si ha perciò $\rho(\theta) = t = \frac{1}{2\pi}\theta$ e $z(\theta) = t^2 = \frac{1}{4\pi^2}\theta^2$. La parametrizzazione cercata è dunque $\tilde{\gamma} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\tilde{\gamma}(\theta) = (\frac{1}{2\pi}\theta\cos\theta, \frac{1}{2\pi}\theta\sin\theta, \frac{1}{4\pi^2}\theta^2)$.

1. La curva μ. **2.** La curva ν. **3.** La curva Γ sul paraboloide $z = x^2 + y^2$. **4.** La curva Γ vista dall'alto.