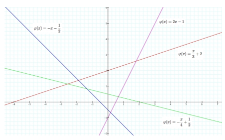
Indice

Funzioni differenziabili di una variabile reale

Vicino a un punto, si lasciano approssimare "efficacemente" con una funzione affine

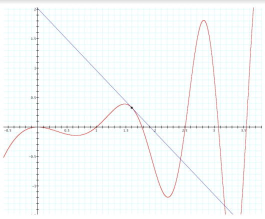
Una funzione affine $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la *traslata di una funzione lineare*:
dunque $\varphi(x) = ax + b$ (le funzioni con grafico una retta non verticale)



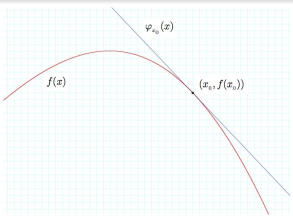
In una variabile, "differenziabile" è sinonimo di "derivabile" : infatti

$f(x)$ è *derivabile* in x_0 $\iff$ $\boxed{f(x) = f(x_0) + a\,(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \text{per un qualche } a \in \mathbb{R} \quad (\text{e in tal caso } a = f'(x_0))}$

cioè: vicino x_0, $f(x)$ è approssimata "efficacemente" da $\varphi_{x_0}(x) = [f'(x_0)]\,x + [f(x_0) - x_0\,f'(x_0)]$



$\rightsquigarrow$



Ecco dunque cosa si intende per

"efficacemente" :

a meno di un errore infinitesimo di ordine superiore al primo.

Come estendere l'idea di differenziabilità alle funzioni di più variabili ?

Derivate e funzioni affini in più variabili reali

Per le funzioni $f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, si presentano due problemi...

1. Che senso ha derivare, visto che ora f ha più di una variabile ?
2. Quali sono le funzioni affini $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con cui approssimare f ?

"Derivare" = vedere come varia $f(\underline{x})$ al variare di $\underline{x}$:

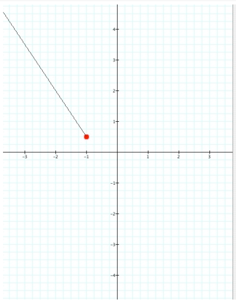
ma ora $\underline{x}$ ha infinite direzioni di variazione !

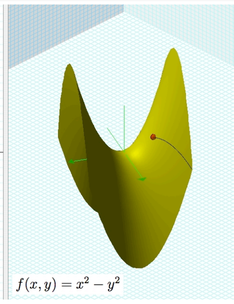
Scelto $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, si ha la **derivata direzionale**

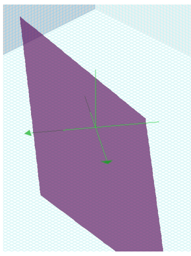
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}}$$

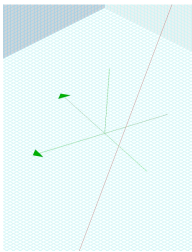
cioè: prima si restringe f al segmento, poi si deriva tale restrizione.

Per $\underline{v} = \underline{e}_k$: **derivata parziale k-esima** $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0)$.









Una funzione affine $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è ancora la *traslata di una funzione lineare*: dunque del tipo

$\varphi(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{b}$ con $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$

Esempi. Grafico di $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = a_1 x + a_2 y + b$: **piano** di $\mathbb{R}^3$

Grafico di $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = (a_1 x + b_1, a_2 x + b_2)$: **retta** di $\mathbb{R}^3$

Funzioni differenziabili di più variabili reali

Vicino a un punto, si lasciano approssimare "efficacemente" con una funzione affine

Può accadere che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, in un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ...

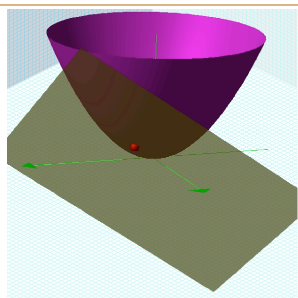
- abbia tutte le derivate direzionali senza neanche essere continua
- sia continua ma non abbia nemmeno una derivata direzionale

Questo fatto è un po' inquietante ! In una variabile non accadeva...

Ma se $f(\underline{x})$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ allora :

1. f è anche continua in $\underline{x}_0$
2. f ha tutte le derivate direzionali in $\underline{x}_0$

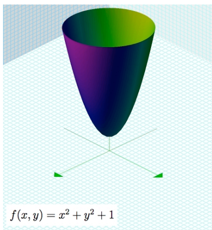
Dunque è una proprietà rassicurante...

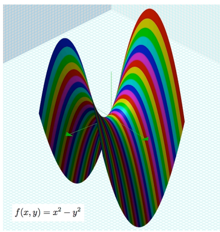


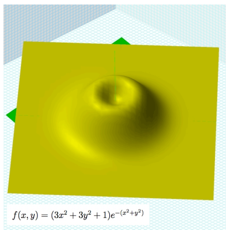
La differenziabilità generalizza la derivabilità in una variabile

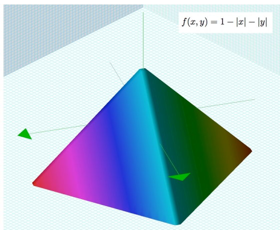
Applicazioni del calcolo differenziale in più variabili

- Strutture tangenti. Calcolo di spazi tangenti, di variazioni del I ordine ... Fig.
- Estremi locali. Una funzione $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ (ove A è aperto di $\mathbb{R}^n$) può avere punti stazionari; se f è differenziabile si trovano facilmente, e se lo è due volte (di classe $\mathcal{C}^2$) c'è un metodo per capire se sono estremi locali o no.









- Funzioni implicite. Es.: da un'equazione $f(x, y) = 0$ con soluzione (x_0, y_0), quand'è che si può esplicitare $y = \varphi(x)$ con $y_0 = \varphi(x_0)$? (Oppure $x = \psi(y)$?)