

Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Autoverifica sul calcolo differenziale negli spazi affini

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

venerdì 29 maggio 2009

Istruzioni generali. (1) Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito mercoledì 03/06). (2) Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. (3) A partire da mercoledì 03/06 e fino a venerdì 05/06 sarà possibile, seguendo il [link](#) che sarà attivato il 03/06 nella pagina web del corso, comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio (senza scrivere eventuali punteggi facoltativi), assieme ad eventuali commenti.

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 35 pt (7+7+7+7+7). **Ex. 2:** 35 pt (10+10+10+5). **Ex. 3:** 30 pt (6+10+5+9). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sé quanto assegnarsi per una risoluzione parziale dei quesiti.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x(2y + 1) - (x + 1)e^y$.

- (i) Dire in quali punti del dominio f è differenziabile; calcolarne il differenziale in un punto generico (x_0, y_0) , e determinare eventuali estremi locali di f .
- (ii) Determinare l'equazione cartesiana e la forma parametrica¹ del piano di $\mathbb{R}^3$ tangente al grafico di f nel punto sopra $(x, y) = (0, 1)$.
- (iii) Dimostrare che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = \varphi(x)$ all'intorno del punto $(-1, -\frac{1}{2})$, e calcolare $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\varphi(x)+1}{x^2-x-2}$.
- (iv) Parametrizzare opportunamente la curva $\Gamma = \{(x, y) : x = y^2 - 1, -1 \leq y \leq 2\}$; trovata la parametrizzazione $\gamma(t)$, calcolare $(f \circ \gamma)(t)$ (restrizione di f a Γ) e la derivata $(f \circ \gamma)'(t)$ sia direttamente che con la formula della derivata totale su una curva.
- (v) Studiare $\lim_{\infty} f(x, y)$, e dedurne chi è l'immagine di f .

2. Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$, e sia $g = (g_1, g_2) : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ data da $g(x, y, z) = (x^3 + 2y^2 + z(x + y) - 1, \log z + xy^2z)$.

- (i) Determinare eventuali estremi locali di g_1 (pensata come definita su tutto $\mathbb{R}^3$, e non solo su A). Calcolare la derivata direzionale $\frac{\partial g_1}{\partial(-1, 1, 2)}$.
- (ii) Dimostrare che l'equazione $g_2(x, y, z) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $z = z(x, y)$ all'intorno del punto $(0, -2, 1)$, di cui si chiede di lo sviluppo di Taylor fino all'ordine due all'intorno di $(x, y) = (0, -2)$.

¹Ovvero $\{(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3) + \mu(w_1, w_2, w_3) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, ove (x_0, y_0, z_0) è un qualsiasi punto del piano e (v_1, v_2, v_3) e (w_1, w_2, w_3) sono due qualsiasi vettori di $\mathbb{R}^3$ paralleli al piano e non paralleli tra loro.

- (iii) Da $g(x, y, z) = 0$ si vorrebbero esplicitare localmente x e y in funzione di z dimodoché $x(1) = 0$ e $y(1) = -1$. Mostrare che ciò è possibile, e calcolare il differenziale $d(x, y)_1$.
 - (iv) Chi è il nucleo della funzione lineare $dg_{(1,1,1)}$?
- 3.** Sia $h = (h_1, h_2, h_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $h(u, v, w) = (vw - u^2, u^2 + w - 4, uw^2 - 1)$.
- (i) La funzione h è un diffeomorfismo? È diffeomorfismo locale attorno a quali punti?
 - (ii) Mostrare che h è un diffeomorfismo locale all'intorno di $(u_0, v_0, w_0) = (-1, 3, 1)$. Denotate $(x, y, z) = h(u, v, w)$, si scriva lo sviluppo al primo ordine delle funzioni inverse $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$ definite all'intorno di $(x_0, y_0, z_0) = h(u_0, v_0, w_0) = (2, -2, -2)$.
 - (iii) In quali punti $(h_1, h_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è sommersiva?
 - (iv) Sia $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(x, y) = (xy, y - x^2, 1)$, e si ponga $\tilde{h} = h \circ \alpha$. Si dica in quali punti la funzione $\tilde{h}$ è immersiva; si calcolino in particolare il nucleo e l'immagine dei differenziali $d\tilde{h}_{(0,1)}$ e $d\tilde{h}_{(1,-2)}$.

Soluzioni.

1. (i) $f(x, y) = x(2y+1) - (x+1)e^y$ è ovunque di classe $\mathcal{C}^1$ (le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y+1-e^y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x-(x+1)e^y$ sono continue), dunque è differenziabile con continuità. Il differenziale in (x_0, y_0) è $df_{(x_0, y_0)}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y = (2y_0 - 1 - e^{y_0})x + (2x_0 - (x_0 + 1)e^{y_0})y$. Gli eventuali estremanti locali di f si trovano tra i punti stazionari, dati dal sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$; notando che l'equazione $2y+1 = e^y$ è soddisfatta da $y = 0$ e da $y = \tilde{y}$ per un certo $1 < \tilde{y} < 2$, il sistema dà le soluzioni $(1, 0)$ e $(-\frac{2\tilde{y}+1}{2\tilde{y}-1}, \tilde{y})$. La matrice hessiana in (x_0, y_0) è $H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & 2-e^{y_0} \\ 2-e^{y_0} & 2x_0-(x_0+1)e^{y_0} \end{pmatrix}$: si ha dunque $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ e $H_f(-\frac{2\tilde{y}+1}{2\tilde{y}-1}, \tilde{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1-2\tilde{y} \\ 1-2\tilde{y} & 2\frac{2\tilde{y}+1}{2\tilde{y}-1} \end{pmatrix}$ (si ricordi che $2\tilde{y}+1 = e^{\tilde{y}}$), entrambe indefinite: dunque i punti stazionari trovati sono punti di sella, e f non ha estremi locali.
(ii) Il piano cercato è il grafico della funzione affine tangente, dunque ha equazione cartesiana $z = f(0, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)(y-1) = -e + (3-e)x - e(y-1)$, ovvero $(3-e)x - ey - z = 0$. Un punto del piano è ovviamente $(0, 1, f(0, 1)) = (0, 1, -e)$, ma se si vuole anche l'origine $(0, 0, 0)$; come noto, i coefficienti dell'equazione cartesiana $(3-e, -e, -1)$ danno poi un vettore ortogonale al piano, dunque due vettori paralleli (e non paralleli tra loro) sono ad esempio $(0, -1, e)$ e $(1, -1, 3)$. Si ha dunque la forma parametrica $\{(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(0, -1, e) + \mu(1, -1, 3) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\mu, -\lambda - \mu, e\lambda + 3\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
(iii) Poiché $f(-1, -\frac{1}{2}) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, -\frac{1}{2}) = -2 \neq 0$, quanto affermato discende dal Teorema del Dini; la funzione $y = \varphi(x)$, definita all'intorno di $x = -1$ e tale che $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ per ogni x in tale intorno (dunque $\varphi(-1) = -\frac{1}{2}$) è di classe $\mathcal{C}^\infty$ perché tale è f . Il limite $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\varphi(x)+1}{x^2-x-2}$ è in forma indeterminata $\frac{0}{0}$, dunque per de l'Hôpital esso è uguale a $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2\varphi'(x)}{2x-1} = -\frac{2\varphi'(-1)}{3}$: si tratta dunque di calcolare $\varphi'(-1)$. Derivando l'identità $f(x, \varphi(x)) = x(2\varphi(x)+1) - (x+1)e^{\varphi(x)} \equiv 0$ rispetto a x si ottiene $2\varphi(x)+1+2x\varphi'(x) - e^{\varphi(x)} - (x+1)\varphi'(x)e^{\varphi(x)} \equiv 0$; calcolando in $x = -1$ si ricava $-1+1-2\varphi'(-1) - e^{-\frac{1}{2}} = 0$, da cui $\varphi'(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{e}}$. Il limite vale dunque $\frac{1}{3\sqrt{e}}$.
(iv) La curva Γ si parametrizza opportunamente come grafico di $t = y$, tramite $\gamma : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma(t) = (t^2 - 1, t)$. Si ricava pertanto $(f \circ \gamma)(t) = (t^2 - 1)(2t + 1) - t^2 e^t$, da cui subito $(f \circ \gamma)'(t) = 2t(2t + 1) + 2(t^2 - 1) - 2te^t - t^2 e^t = 2(3t^2 + t - 1) - t(t + 2)e^t$; applicando la formula della derivata totale su una curva, si ritrova $(f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))\gamma_2'(t) = (2t + 1 - e^t)(2t) + (2(t^2 - 1) - t^2 e^t)1 = 2(3t^2 + t - 1) - t(t + 2)e^t$.
(v) Sull'asse x la funzione vale costantemente $f(x, 0) \equiv -1$; sull'asse y vale $f(0, y) = -e^y$, che tende a $-\infty$ per $y \rightarrow +\infty$ e tende a 0^- per $y \rightarrow -\infty$. Ciò mostra già che $\lim_{\infty} f(x, y)$ non esiste, e che f ha direzioni in cui tende a $-\infty$. Ma f ha anche altre direzioni in cui tende a $+\infty$: ad esempio, sulla retta $x = -1$ si ha $f(-1, y) = -2y - 1$, che tende a $+\infty$ per $y \rightarrow -\infty$. Essendo f continua ed $\mathbb{R}^2$ connesso, l'immagine di f dovrà essere un connesso di $\mathbb{R}$ (ovvero un intervallo) e, per i limiti visti, questo intervallo non può che essere $\mathbb{R}$.
2. (i) Il differenziale di g_1 nel punto generico (x, y, z) ha matrice jacobiana $(3x^2 + z, 4y + z, x + y)$: si ricava dunque subito $\frac{\partial g_1}{\partial(-1, 1, 2)}(x, y, z) = dg_{1(x, y, z)}(-1, 1, 2) = -(3x^2 + z) + (4y + z) + 2(x + y) = 2x + 6y - 3x^2$. I punti stazionari di g_1 si trovano risolvendo il sistema $\frac{\partial g_1}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_1}{\partial z} = 0$, che ha le due soluzioni $(0, 0, 0)$ e $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3})$. La matrice hessiana è $H_{g_1}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, da cui $H_{g_1}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $H_{g_1}(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3}) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dall'esame dei minori principali si deduce che $H_{g_1}(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3})$ è indefinita, pertanto $(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3})$ è una sella. D'altra parte, l'equazione caratteristica di $H_{g_1}(0, 0, 0)$ è $\chi(t) = \det \begin{pmatrix} t & 0 & -1 \\ 0 & t-4 & -1 \\ -1 & -1 & t \end{pmatrix} = t^3 - 4t^2 - 2t + 4 = 0$: essendo $\chi(-2) = -16 < 0$, $\chi(-1) = 1 > 0$, $\chi(0) = 4 > 0$ e $\chi(1) = -1 < 0$, dal Teorema degli Zeri segue che c'è un autovalore negativo (tra -2 e -1) e uno positivo (tra 0 e 1), dunque la matrice $H_{g_1}(0, 0, 0)$ è indefinita, e anche $(0, 0, 0)$ è una sella. (In modo più semplice, ciò si poteva vedere restringendo g_1 all'asse x , dunque ponendo $y = z = 0$: si ottiene allora $g_1(x, 0, 0) = x^3$, che come noto ha una sella in $x = 0$.)
(ii) Da $g_2(x, y, z) = \log z + xy^2z$ si ricava $\frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{1}{z} + xy^2$: essendo $g_2(0, -2, 1) = 0$ e $\frac{\partial g_2}{\partial z}(0, -2, 1) = 1 \neq 0$, l'affermazione segue dal Teorema del Dini. Derivando parzialmente $g_2(x, y, z(x, y)) = 0$ rispetto a x si ottiene $\frac{\partial}{\partial x}g_2(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial z}{\partial x} + y^2z + xy^2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, da cui calcolando in $(0, -2)$ e ricordando che $z(0, -2) = 1$ si ha $\frac{\partial z}{\partial x}(0, -2) + 4 = 0$, da cui $\frac{\partial z}{\partial x}(0, -2) = -4$; derivando invece rispetto a y si ottiene $\frac{\partial}{\partial y}g_2(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial z}{\partial y} + 2xyz + xy^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, da cui $\frac{\partial z}{\partial y}(0, -2) = 0$. Passiamo ora alle derivate seconde. Derivando $\frac{\partial}{\partial x}g_2(x, y, z(x, y)) = 0$ nuovamente rispetto a x si ottiene $\frac{\partial^2}{\partial x^2}g_2(x, y, z(x, y)) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}z - (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + y^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, da cui (calcolando in $(0, -2)$, e ricordando i valori ivi di z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$) si ottiene $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, -2) = 48$; derivando $\frac{\partial}{\partial x}g_2(x, y, z(x, y)) = 0$

0 rispetto a y si ottiene $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y, z(x, y)) = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} z - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}}{z^2} + 2yz + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + x(2y \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}) = 0$, da cui $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, -2) = 4$; infine, derivando $\frac{\partial}{\partial y} g_2(x, y, z(x, y)) = 0$ nuovamente rispetto a y si ottiene $\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} z - (\frac{\partial z}{\partial y})^2}{z^2} + 2x(z + y \frac{\partial z}{\partial y}) + x(2y \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) = 0$, da cui $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, -2) = 0$. Pertanto lo sviluppo di Taylor richiesto è $z(x, y) = z(0, -2) + \frac{\partial z}{\partial x}(0, -2)(x - 0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0, -2)(y - (-2)) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, -2)(x - 0)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, -2)(x - 0)(y - (-2)) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, -2)(y - (-2))^2 \right) = 1 - 4x + 24x^2 + 4x(y + 2)$.

(iii) Lo jacobiano di g è $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + z & 4y + z & \frac{x+y}{z} \\ y^2 z & 2xyz & \frac{1}{z} + xy^2 \end{pmatrix}$. Poiché $g(0, -1, 1) = (0, 0)$ e $J_{g,(x,y)}(0, -1, 1) = \begin{pmatrix} 3x^2 + z & 4y + z \\ y^2 z & 2xyz \end{pmatrix}_{(0,-1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è nonsingolare, l'esplicitazione richiesta è lecita in base al Teorema del Dini per sistemi. Essendo $(x(z), y(z))$ una curva, il differenziale richiesto $d(x, y)_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ sarà dato da $d(x, y)_1(h) = (x'(1), y'(1))h$. Per trovare $x'(1)$ e $y'(1)$ possiamo derivare le identità $g_1(x(z), y(z), z) = g_2(x(z), y(z), z) = 0$ rispetto a z , ottenendo $3x^2 x' + 4yy' + x + y + z(x' + y') = 0$ e $\frac{1}{z} + x'y^2 z + 2xyy'z + xy^2 = 0$; calcolando per $z = 1$, si ottiene $-4y'(1) - 1 + x'(1) + y'(1) = 0$ e $1 + x'(1) = 0$, da cui $x'(1) = -1$ e $y'(1) = -\frac{2}{3}$. Alternativamente sappiamo che $\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -J_{g,(x,y)}(0, -1, 1)^{-1} J_{g,z}(0, -1, 1)$, da cui nuovamente $\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

(iv) La funzione lineare $dg_{(1,1,1)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha matrice $J_g(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, di rango 2: dunque $dg_{(1,1,1)}$ è suriettiva (ciò significa che g è sommersiva nel punto $(1, 1, 1)$), ed il suo nucleo sarà un sottospazio lineare di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3 - 2 = 1$, ottenibile come spazio delle soluzioni del sistema $J_g(1, 1, 1) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: si ha dunque il sistema $\begin{cases} 4u + 5v + 2w = 0 \\ u + 2v + 2w = 0 \end{cases}$, ovvero $\{\lambda(2, -2, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3. (i) Ci si può accorgere facilmente che h non è un diffeomorfismo: se lo fosse, essa dovrebbe essere in particolare iniettiva, ma non lo è (ad esempio, si ha $h(\pm 1, v, 0) = (-1, -3, -1)$ per ogni v). D'altra parte si ha $J_h(u, v, w) = \begin{pmatrix} -2u & w & v \\ 2u & 0 & 1 \\ w^2 & 0 & 2uw \end{pmatrix}$, da cui $\det J_h(u, v, w) = w^2(w - 4u^2)$: per il Teorema di Invertibilità Locale si ha allora che h è diffeomorfismo locale all'intorno di (u_0, v_0, w_0) se e solo se $w_0^2(w_0 - 4u_0^2) \neq 0$, ovvero se e solo se $w_0 \neq 0$ e $w_0 \neq 4u_0^2$. Si noti che questa condizione non è banale (vi sono punti di $\mathbb{R}^3$ in cui non è soddisfatta, e tra essi, non a caso, proprio quelli del tipo $(\pm 1, v_0, 0)$): ciò prova ancora una volta che h non può essere un diffeomorfismo globale (se lo fosse, a maggior ragione lo dovrebbe essere localmente in ciascun punto di $\mathbb{R}^3$).

(ii) Il punto $(u_0, v_0, w_0) = (-1, 3, 1)$ soddisfa la condizione appena scritta, dunque h è un diffeomorfismo locale al suo intorno, ovvero esistono intorni aperti U di (u_0, v_0, w_0) e V di $(x_0, y_0, z_0) = h(u_0, v_0, w_0) = (2, -2, -2)$ in $\mathbb{R}^3$ tali che $h : U \rightarrow V$ è diffeomorfismo. Se $\Phi : V \rightarrow U$ è l'inversa locale di h (dunque $(u, v, w) = \Phi(x, y, z)$), lo sviluppo cercato è $(u, v, w) = (u_0, v_0, w_0) + d\Phi_{(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = (u_0, v_0, w_0) + J_\Phi(x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$, perciò dobbiamo trovare $J_\Phi(x_0, y_0, z_0)$. Differenziando $\Phi \circ h = \text{id}_U$ in (u_0, v_0, w_0) si ha $J_\Phi(x_0, y_0, z_0) \circ J_h(u_0, v_0, w_0) = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$, da cui $J_\Phi(x_0, y_0, z_0) = J_h(u_0, v_0, w_0)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dunque si ottiene

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 \\ z + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{2}{3}(y + 2) - \frac{1}{3}(z + 2) \\ 3 + (x - 2) + \frac{7}{3}(y + 2) + \frac{8}{3}(z + 2) \\ 1 - \frac{1}{3}(y + 2) - \frac{2}{3}(z + 2) \end{pmatrix}.$$

(iii) La matrice jacobiana di $(h_1, h_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è $J_{(h_1, h_2)}(u, v, w) = \begin{pmatrix} -2u & w & v \\ 2u & 0 & 1 \end{pmatrix}$: "sommersività" in (u, v, w) significa che il differenziale in (u, v, w) è suriettivo, ovvero che $J_{(h_1, h_2)}(u, v, w)$ ha rango massimo 2, dunque i punti in cui ciò non accade sono quelli in cui i tre minori di ordine 2 sono singolari, ovvero in cui $-2uw = -2u - 2uv = w = 0$. Dunque i soli punti in cui (h_1, h_2) non è sommersiva sono quelli della forma $(0, v, 0)$ oppure $(u, -1, 0)$.

(iv) Componendo si ha $\tilde{h}(x, y) = (y - x^2 - x^2 y^2, x^2 y^2 - 3, xy - 1)$ da cui si ottiene $J_{\tilde{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x(1 + y^2) & 1 - 2x^2 y \\ 2xy^2 & 2x^2 y \\ y & x \end{pmatrix}$ (al medesimo risultato si arriverebbe, naturalmente, anche calcolando il prodotto $J_{\tilde{h}}(x, y) = J_h(\alpha(x, y)) J_\alpha(x, y)$). L'"immersività" in (x, y) significa che il differenziale in (x, y) è iniettivo, ovvero che $J_{\tilde{h}}(x, y)$ deve avere rango massimo 2: dunque i punti in cui ciò non accade sono tutti e solo quelli in cui i tre minori di ordine 2 sono singolari, ovvero in cui $2x^2 y(-2x(1 + y^2)) - 2xy^2(1 - 2x^2 y) = 0$, $x(-2x(1 + y^2)) - y(1 - 2x^2 y) = 0$ e $x(2xy^2) - y(2x^2 y) = 0$, ovvero, a conti fatti, tutti e soli i punti sulla parabola $y = -2x^2$. Tra questi non appare $(0, 1)$, dunque $dh_{(0,1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è iniettivo, ed ha nucleo nullo; essendo poi $J_{\tilde{h}}(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'immagine è quella generata dai vettori

colonna e_3 ed e_1 in $\mathbb{R}^3$, ovvero il piano (x, z) . Invece $(1, -2)$ sta sulla parabola critica $y = -2x^2$: si ha in effetti $J_{\tilde{h}}(1, -2) = \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ (di rango 1), e l'immagine è la retta di $\mathbb{R}^3$ generata dal vettore $(5, -4, 1)$; quanto al

nucleo, che avrà dimensione $2 - 1 = 1$, si tratta di tutti e soli i vettori $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tali che $J_{\tilde{h}}(1, -2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dunque quelli del tipo $(a, 2a)$ con $a \in \mathbb{R}$.