2 Equazioni differenziali: primi elementi

2.1 Nozioni generali

Un'*equazione differenziale ordinaria scalare* è un problema in cui si chiede di determinare una funzione $y(x) : I \to \mathbb{C}$, definita su un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, a partire da una relazione in cui possono apparire le sue derivate (ivi compresa eventualmente la stessa funzione $y(x)$, vista come derivata di ordine zero) e la variabile x. Si tratta di una naturale generalizzazione del problema dell'integrazione, dato in questi termini dall'equazione $y' = f(x)$. L'aggettivo *ordinaria* indica che la funzione incognita $y(x)$ dipende dalla sola variabile x (o, quantomeno, che nell'equazione appaiono solo derivate rispetto x), mentre *scalare* indica che $y(x)$ ha valori in $\mathbb{C}$, e non in $\mathbb{C}^n$ con $n \geq 2$ (in questi casi si parla anche di *sistemi differenziali*). Nel seguito ometteremo entrambi questi aggettivi. **Equazione differenziale ordinaria (EDO) scalare**

L'insieme delle funzioni che sono soluzione di una data equazione differenziale è detto *integrale generale* dell'equazione: solitamente esso ha infiniti elementi, come già accade nel problema dell'integrazione[10]. L'*ordine* di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivata presente. Un'equazione differenziale di ordine n si dirà essere: **Integrale generale** **Ordine di un'EDO**

(a) *in forma normale* se in essa la derivata di ordine massimo $y^{(n)}$ appare esplicitata rispetto a quelle di ordine inferiore (ovvero $y = y^{(0)}, y', \dots, y^{(n-1)}$) e alla variabile x; **EDO in forma normale**

(b) *lineare* se essa appare come un polinomio di primo grado nelle derivate $y = y^{(0)}$, y', ..., $y^{(n-1)}$, $y^{(n)}$ della funzione incognita $y(x)$; **EDO lineare**

(c) *autonoma* se la variabile indipendente x non appare esplicitamente nell'equazione. **EDO autonoma**

Un *problema di Cauchy di ordine n* consiste nell'assegnazione di un'equazione differenziale di ordine n assieme ad una *condizione iniziale*, ovvero gli n valori $y(x_0) = \alpha_0$, $y'(x_0) = \alpha_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$ che la soluzione $y(x)$ e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ devono assumere in un certo punto $x_0 \in I$. Spesso (in verità, quasi sempre nei casi standard), di un dato problema di Cauchy esiste, almeno localmente vicino a x_0, una ed una sola soluzione: il risultato principale che governa questa esistenza e unicità, (locale o globale) è dovuto a Cauchy, e vi torneremo brevemente in futuro. **Problema di Cauchy**

Trovare soluzioni elementari di un'equazione differenziale è, in generale, impossibile (come si sa, già lo è integrare funzioni qualsiasi), e ci si riesce in pochi, seppur importantissimi, casi particolari. Tuttavia, molto spesso, *dalla sola forma di un'equazione differenziale è già possibile trarre notevoli informazioni circa il comportamento delle sue soluzioni* (ad esempio sulla crescenza, la convessità, il dominio, gli asintoti, le parità, le soluzioni costanti), anche senza trovare esplicitamente *quali* siano queste soluzioni.

Esempi. **(1)** Una soluzione $y(x)$ dell'equazione $y' = \frac{1}{2} + \cos x$ (del primo ordine, in forma normale, lineare, non autonoma) sarà crescente se e solo se $y'(x) = \frac{1}{2} + \cos x \geq 0$, ovvero per $\cos x \geq -\frac{1}{2}$, ovvero per $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$. In questo caso l'integrale generale si trova facilmente per integrazione,

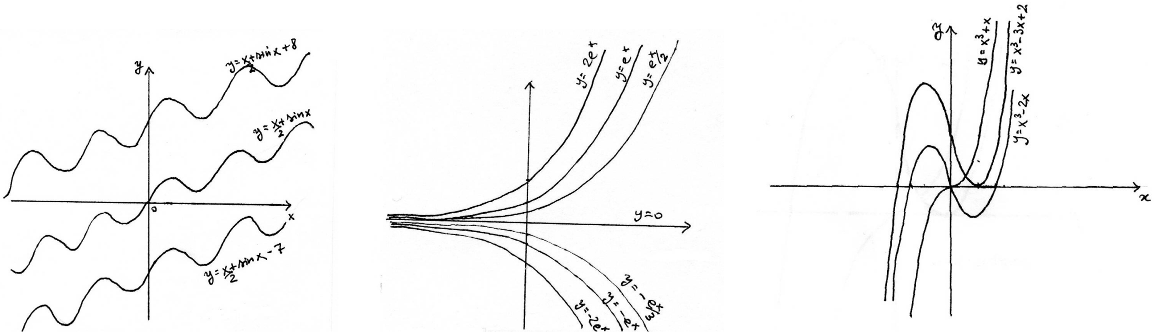
[10] infatti, come noto, ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{C}$ ammette una primitiva $F(x)$, e l'integrale generale dell'equazione $y' = f(x)$ è l'insieme infinito $\{F(x) + k : k \in \mathbb{C}\}$.

e vale $\{y(x) = \frac{x}{2} + \sin x + k : k \in \mathbb{C}\}$. Ma se aggiungiamo la condizione di Cauchy $y(\pi) = -1$ la soluzione diventa unica, cioè $y(x) = \frac{x}{2} + \sin x - \frac{\pi}{2} - 1$. **(2)** Una soluzione $y(x)$ dell'equazione del secondo ordine $y'' = 6x$ sarà convessa se e solo se $y''(x) = 6x \geq 0$, ovvero per $x \geq 0$. L'integrale generale si trova facilmente per doppia integrazione, e vale $\{y(x) = x^3 + ax + b : a, b \in \mathbb{C}\}$; anche in questo caso, aggiungendo la condizione di Cauchy data da $y(-1) = 0$ e $y'(-1) = 2$ la soluzione diventa unica, ovvero $y(x) = x^3 - x$. **(3)** L'equazione autonoma del primo ordine $y' = y$ ha come sola soluzione costante $y \equiv 0$. Una soluzione $y(x)$ sarà crescente se e solo se $y'(x) = y \geq 0$, ovvero dove è positiva. Vedremo tra breve che l'integrale generale è $\{ke^x : k \in \mathbb{C}\}$. **(4)** Si consideri l'equazione $y' = 2x(y-1)^2$ (del primo ordine, in forma normale, non lineare, non autonoma). Una funzione costante $y \equiv k$ è soluzione se vale $0 = 2x(k-1)^2$ per ogni x, dunque l'unica soluzione costante è $y(x) \equiv 1$. Sia ora $\varphi(x)$ una soluzione definita all'intorno di $x_0 = 0$, e chiediamoci se essa sia pari. Posto $\psi(x) = \varphi(-x)$, si ha $\psi'(x) = -\varphi'(-x)$: essendo $\psi'(x) = -\varphi'(-x) = -\big(2(-x)(\varphi(-x)-1)^2\big) = 2x(\psi(x)-1)^2$, anche $\psi(x)$ è soluzione. Ora, poiché $\psi(0) = \varphi(-0) = \varphi(0)$, si ha che $\psi(x)$ e $\varphi(x)$ sono soluzione del medesimo problema di Cauchy: supponendo di sapere che le ipotesi di esistenza e unicità sono soddisfatte localmente (il che come detto accade quasi sempre, e anche in questo caso), ciò implica che sia $\psi(x) = \varphi(x)$ all'intorno di $x_0 = 0$. Ma ciò ci dice che la soluzione $\varphi(x)$ è pari. Veniamo ora a crescenza e convessità. Poiché una soluzione $y(x)$ cresce se e solo se $y'(x) = 2x(y(x)-1)^2 \geq 0$, si ha che $y(x)$ (se non vale 1) decresce strettamente per $x < 0$ e cresce strettamente per $x > 0$: dunque in $x_0 = 0$ essa ammette un punto di minimo. Inoltre, derivando con la regola di Leibniz si trova $y'' = 2\big((y-1)^2 + 2xy'(y-1)\big) = 2(y-1)(y-1+2x \cdot 2x(y-1)^2) = 2(y-1)^2(1+4x^2(y-1))$, dunque $y(x)$ è convessa dove $y \geq \frac{4x^2-1}{4x^2}$. Questa equazione sarà risolta tra poco, e le soluzioni confermeranno questi "pronostici".

Pur non conoscendo ancora il Teorema di Cauchy, si è anticipato che l'esistenza e unicità locale della soluzione di un'equazione differenziale di ordine n è verificata nella maggioranza dei casi standard. Conviene allora ragionare sulle conseguenze di ciò nei casi base:

(1) se un'equazione differenziale del primo ordine ha esistenza ed unicità locale, i grafici di due sue soluzioni distinte *non possono mai intersecarsi*;

(2) se un'equazione differenziale del secondo ordine ha esistenza ed unicità locale, i grafici di due sue soluzioni distinte *possono intersecarsi, ma nei punti di intersezione devono avere pendenze diverse.*



Alcune soluzioni delle equazioni del primo ordine **(a)** $y' = \frac{1}{2} + \cos x$ e **(b)** $y' = y$, e dell'equazione del secondo ordine **(c)** $y'' = 6x$.

2.2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Consideriamo un problema di Cauchy del primo ordine nella forma **EDO del primo ordine a variabili separabili**

$$f_2(x)g_1(y)\, y' = f_1(x)g_2(y), \qquad y(x_0) = y_0$$

ove $f_1(x)$, $f_2(x)$ sono funzioni continue definite all'intorno di x_0 con $f_2(x_0) \neq 0$, mentre $g_1(y)$ e $g_2(y)$ sono funzioni continue definite all'intorno di y_0.

(i) Se $g_2(y_0) = 0$, la funzione costante $y(x) \equiv y_0$ è soluzione del problema di Cauchy.(11)

(ii) Si supponga invece che $g_2(y_0) \neq 0$. Dividendo allora ambo i membri per $f_2(x)g_2(y)$ si ottiene l'equazione $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, y' = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, da intendersi valida *solo* in un intorno I' di x_0.

(iii) Integrando i due membri tra x_0 ed un generico $x \in I'$ si ottiene $\int_{x_0}^{x} \frac{g_1(y(t))}{g_2(y(t))}\, y'(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\, dt$; operando nell'integrale al primo membro il cambio di variabile $\eta = y(x)$ e ricordando che $\eta(x_0) = y_0$, si ottiene infine $\int_{y_0}^{y(x)} \frac{g_1(\eta)}{g_2(\eta)} d\eta = \int_{x_0}^{x} \frac{f_1(t)}{f_2(t)}\, dt$.

(iv) Siano $G(\eta)$ una primitiva di $\frac{g_1(\eta)}{g_2(\eta)}$ e $F(x)$ una primitiva di $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$: si ottiene allora $G(y(x)) - G(y_0) = F(x) - F(x_0)$.

(v) Esplicitando $y(x)$ dall'ultima uguaglianza si ottiene la soluzione $y : I' \to \mathbb{R}$ cercata, univocamente individuata se e solo se $g_1(y_0) \neq 0$.(12) L'intervallo massimale su cui essa è definita è il più grande intervallo I' contenuto nel suo dominio naturale, contenente x_0 e tale che $f_2(x) \neq 0$ e $g_2(y(x)) \neq 0$ per ogni $x \in I'$.

Una rilettura formale del procedimento appena descritto, utile nella pratica, è la seguente.

(i) Se $g_2(y_0) = 0$, allora $y = y_0$ (costante) è soluzione. Se invece $g_2(y_0) \neq 0$, si proceda come segue.

(ii) Pensando a $y' = \frac{dy}{dx}$ (rapporto formale dei differenziali dy e dx), si ricava $\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx$.

(iii) Facendo l'integrale *indefinito* di ambo i membri nelle rispettive variabili di integrazione, detta $G(y)$ una primitiva di $\frac{g_1(y)}{g_2(y)}$ e $F(x)$ una primitiva di $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ si ottiene $G(y) = F(x) + k$ con k da determinare.

(iv) Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ si ricava che $k = G(y_0) - F(x_0)$: dunque si arriva a $G(y) = F(x) + G(y_0) - F(x_0)$. [Questo punto (iv) può essere invertito col seguente punto (v), o può anche essere omesso lasciando k indeterminato al fine di esibire l'integrale generale dell'equazione.]

(v) Esplicitando y dall'ultima uguaglianza si ottiene la soluzione $y(x)$ cercata.

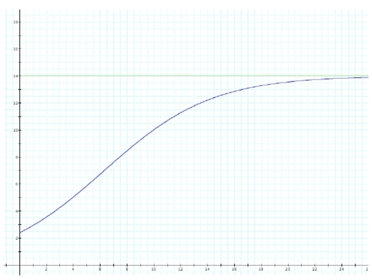
Esempi. **(1)** L'equazione autonoma $y' = y^2$ ha $y \equiv 0$ come soluzione costante; se invece si considera il dato di Cauchy $y_0 := y(x_0) \neq 0$, separando le variabili e integrando si ottiene $-\frac{1}{y} = x + k$, da cui

(11) Se le ipotesi del Teorema di Cauchy sono soddisfatte, il che come detto accade quasi sempre, tale soluzione costante è localmente anche l'unica. Ci limitiamo per ora a menzionare un caso classico in cui ciò non accade: il problema $y' = 2\sqrt{|y|}$ con $y(0) = 0$, oltre alla costante $y \equiv 0$ ha anche altre soluzioni, tra cui $y(x) = (\operatorname{sign} x)x^2$ (è dunque evidente che non c'è unicità locale). Più in generale, dati $a \leq 0 \leq b$, la funzione che vale $-(x-a)^2$ per $x \leq a$, è nulla per $a < x < b$ e vale $(x-b)^2$ per $x \geq b$ è anch'essa soluzione.
(12) Si vedrà più tardi, col Teorema della Funzione Implicita (pag. 64).

$k = -(x_0 + \frac{1}{y_0})$ e perciò $y(x) = \frac{1}{(x_0+\frac{1}{y_0})-x}$ (si noti che tale soluzione, di tipo omografico, è definita solo per $x \neq x_0 + \frac{1}{y_0}$). **(2)** Consideriamo l'equazione $xy' = y + 2$ con condizione di Cauchy $y(1) = y_0$: qui si ha $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $g_1(y) = 1$, $g_2(y) = y - 2$ e $x_0 = 1$. Se $y_0 = -2$ allora la soluzione è $y(x) \equiv -2$. Se invece $y_0 \neq -2$, separando le variabili si ottiene $\frac{y'}{y+2} = \frac{1}{x}$, da cui $\log|y + 2| = \log|x| + c$: imponendo che $y(1) = y_0$ si ottiene $c = \log|y_0 + 2|$, da cui $\log|y + 2| = \log|x(y_0 + 2)|$, da cui $|y + 2| = |x(y_0 + 2)|$. Ciò dà due possibilità: $y+2 = x(y_0+2)$ oppure $y+2 = -x(y_0+2)$, ma da $y(1) = y_0$ quella ammissibile è la prima. Si ottiene dunque la retta $y = -(y_0 + 2)x - 2$. **(3)** Risolviamo ora l'equazione $y' = 2x(y - 1)^2$ incontrata in precedenza, con le tre possibili condizioni iniziali (a) $y(0) = 2$, (b) $y(0) = 1$ e (c) $y(0) = -1$. Il caso (b) è subito risolto dalla costante $y(x) \equiv 1$. Negli altri due casi, separando le variabili si ottiene $\frac{y'}{(y-1)^2} = 2x$, da cui $-\frac{1}{y-1} = x^2 + c$. Nel caso (a) si ottiene $-1 = c$, da cui $y(x) = \frac{x^2-2}{x^2-1}$; nel caso (b) si ha $\frac{1}{2} = c$, da cui $y(x) = \frac{2x^2-1}{2x^2+1}$. Entrambe queste soluzioni, definite all'intorno di $x_0 = 0$ (in $I =]-1, 1[$ per (a), e in $I = \mathbb{R}$ per (c)), soddisfano i "pronostici" dedotti precedentemente dalla sola forma dell'equazione.

Diamo ora un primo esempio di applicazione concreta delle equazioni differenziali allo studio di problemi demografici.

I modelli di crescita malthusiana e logistica. L'equazione autonoma $y' = \nu y$ con condizione di Cauchy $y(x_0) = y_0$, se $y_0 = 0$ ha la soluzione costante $y \equiv 0$; altrimenti, separando le le variabili si ottiene $\frac{y'}{y} = \nu$, da cui $\log|y| = \nu x + c$: imponendo che $y(x_0) = y_0$ si ha $c = \log|y_0| - \nu x_0$, da cui $\log|\frac{y}{y_0}| = \nu(x - x_0)$, da cui $|\frac{y}{y_0}| = e^{\nu(x-x_0)}$, da cui $\frac{y}{y_0} = \pm e^{\nu(x-x_0)}$: da $y(x_0) = y_0$ bisogna scegliere "+", e si ottiene dunque $y(x) = y_0 e^{\nu(x-x_0)}$. Tale equazione schematizza il classico modello di crescita di *Malthus*, in cui si suppone che il numero di individui di una popolazione $p(t)$ cresca col tempo t con velocità proporzionale alla popolazione stessa: in tal caso si avrà infatti un'equazione del tipo $p' = (N - M)p$, ove $N > 0$ ed $M > 0$ indicano rispettivamente il tasso di natalità e mortalità della popolazione. Come visto, detta p_0 la popolazione iniziale si ottiene $p(t) = p_0\, e^{(N-M)t}$: si noti che, secondo questo modello, per $N < M$ la popolazione si estingue, per $N = M$ rimane stabile mentre per $N > M$ cresce in modo esponenziale.



Ora, se nella pratica sperimentale il modello mathusiano dà risultati ragionevoli quando $N \leq M$, esso appare alquanto irrealistico per $N > M$: in effetti la crescita della popolazione deve prima o poi risentire di un effetto di saturazione dovuto al sovrautilizzo dello spazio vitale nel quale essa si sta moltiplicando (ad esempio la penuria di cibo). Un modello un po' meno rozzo nel caso $N > M$ è allora il cosiddetto modello *logistico*, in cui si suppone che la velocità di crescita del numero degli individui sia proporzionale al numero stesso finché tale numero è basso, ma che poi l'aumento di popolazione provochi un'attenuazione della crescita, che deve diventare decrescita quando il numero di individui superi una certa soglia critica S. Il nuovo modello, che raffina quello malthusiano, diventa dunque $p' = (N - M)(1 - \frac{p}{S})p$ (si noti che il modello di crescita di Malthus ritorni eliminando la soglia critica, ovvero passando al limite per $S \to +\infty$): supponendo che $0 < p_0 < S$, separando le variabili si ottiene $p(t) = p_0 \frac{S\, e^{(N-M)t}}{S+p_0(e^{(N-M)t}-1)}$, definita per $t \geq 0$. La curva $p(t)$ è usualmente detta *sigmoide* (in figura): si noti che la popolazione cresce asintoticamente da p_0 verso il valore di soglia S.

2.3 Equazioni differenziali lineari

EDO lineari: forma generica

La forma più generale di un'equazione differenziale lineare di ordine n è

$$\alpha_n(x)\, y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1(x)\, y' + \alpha_0(x)\, y = \beta(x), \tag{2.1}$$

ove $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, ..., $\alpha_{n-1}(x)$, $\alpha_n(x)$ e $\beta(x)$ sono funzioni continue definite in un certo intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{C}$. Per studiare queste equazioni conviene innanzitutto porle *in forma normale*: ciò richiede di dividere ambo i membri di (2.1) per $\alpha_n(x)$, e dunque di studiare l'equazione al di fuori dei punti di $T = \{x \in U : \alpha_n(x) = 0\}$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = b(x). \tag{2.2}$$

D'ora in poi, *si risolverà* (2.2) *in un qualsiasi intervallo* $I \subset U \setminus T$, riservandosi in seguito di vedere se esistano soluzioni definite anche su qualcuno dei punti di T.

Lemma 2.3.1. (Esistenza e unicità globale per le equazioni lineari) *Per ogni $x_0 \in I$ ed ogni $(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, il problema di Cauchy dato da* (2.2) *con la condizione iniziale $y(x_0) = \delta_0$, $y'(x_0) = \delta_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = \delta_{n-1}$ ha una e una sola soluzione su tutto I.*[13]

Dimostrazione. Omessa (vedi però il Teorema 5.7.4 e commenti seguenti). □

Se $b(x) \equiv 0$, l'equazione lineare si dice *omogenea*, altrimenti si dice *non omogenea* (o anche *affine*, o *completa*); ad ogni equazione affine si può dunque naturalmente associare un'omogenea ponendo $b(x) \equiv 0$:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0. \tag{2.3}$$

Si ricorda che r qualsiasi funzioni $\psi_1, \dots, \psi_r : I \to \mathbb{C}$ si dicono *linearmente indipendenti* (come funzioni $I \to \mathbb{C}$) se l'unica r-upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ tale che $\lambda_1\psi_1 + \cdots + \lambda_r\psi_r \equiv 0$ (ovvero $\lambda_1\psi_1(x) + \cdots + \lambda_r\psi_r(x) = 0$ per ogni $x \in I$) è $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Interessa determinare un criterio algebrico per descrivere, per quanto possibile, l'indipendenza lineare. A tale scopo, se le funzioni $\psi_1, \dots, \psi_r$ sono derivabili almeno $r-1$ volte, si definisce la loro *matrice wronskiana* come

Matrice wronskiana

$$W_\psi : I \to M_r(\mathbb{C}) \ , \qquad W_\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) & \cdots & \psi_r(x) \\ \psi_1'(x) & \cdots & \psi_r'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(r-1)}(x) & \cdots & \psi_r^{(r-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Proposizione 2.3.2. *Se esiste $x_0 \in I$ per cui $\det W_\psi(x_0) \neq 0$, allora le funzioni $\psi_1, \dots, \psi_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Equivalentemente, mostriamo che se le funzioni $\psi_1, \dots, \psi_r$ sono linearmente dipendenti allora $\det W_\psi(x) = 0$ per ogni $x \in I$. In effetti, se esiste una r-upla $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r$ non nulla tale che $\lambda_1\psi_1(x) + \cdots + \lambda_r\psi_r(x) = 0$ per ogni $x \in I$, derivando $r-1$ volte tale identità si nota che per ogni $x \in I$ le colonne della matrice wronskiana $W_\psi(x)$ sono linearmente dipendenti, e dunque $\det W_\psi(x) = 0$. □

---

[13] È importante osservare come, in base al Lemma 2.3.1, le soluzioni di un'equazione *lineare* siano definite su *tutto* l'intervallo aperto di massima definizione dei coefficienti dell'equazione stessa. Ciò non è affatto garantito per le equazioni non lineari: si ricordi, ad esempio, quanto ricavato in precedenza per l'equazione (non lineare) $y' = y^2$, le cui soluzioni non costanti, del tipo $y = \frac{1}{a-x}$, non sono definite su tutto $I = \mathbb{R}$.

Si descrive ora la struttura delle soluzioni di (2.2) e (2.3), che ricorda chiaramente quella delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari algebriche. In quanto segue, denotiamo con $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle funzioni complesse di I di classe $\mathcal{C}^n$.

Proposizione 2.3.3. *Sia S (risp. S_0) l'integrale generale di (2.2) (risp. di (2.3)).*

(i) *S_0 è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ di dimensione n, ovvero vi sono n soluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x)\in S_0$ definite su tutto I tali che*

$$S_0=\{\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(x):\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}\}.$$

Un tale insieme $\{\varphi_1,\dots,\varphi_1\}$, ovvero una base di S_0 su $\mathbb{C}$, si dirà sistema fondamentale di soluzioni *di (2.3).*

Sistema fondamentale di soluzioni

(ii) *$\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ è sistema fondamentale di soluzioni di (2.3) se e solo se $\det W_\varphi(x_0)\neq 0$ per almeno un $x_0\in I$, e ciò accade se e solo se $\det W_\varphi(x)\neq 0$ per ogni $x\in I$.*

(iii) *S è il sottospazio affine di $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ ottenuto traslando il sottospazio vettoriale S_0 con una qualsiasi soluzione particolare di (2.2), ovvero*

$$S=S_0+\widetilde{\varphi}(x)=\{\lambda_1\varphi_1(x)+\cdots+\lambda_n\varphi_n(x)+\widetilde{\varphi}(x):\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}\},$$

ove $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ è un sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea, e $\widetilde{\varphi}(x)\in S$.

(iv) (Metodo della variazione delle costanti arbitrarie) *Nelle notazioni precedenti, una soluzione particolare in S è*

$$\widetilde{\varphi}(x)=\gamma_1(x)\varphi_1(x)+\cdots+\gamma_n(x)\varphi_n(x),\qquad \gamma_j(x)=(-1)^{n+j}\int\frac{\det W_{\varphi,j}(x)}{\det W_\varphi(x)}\,b(x)\,dx$$

ove $W_{\varphi,j}(x)$ è il minore di ordine $(n-1)$ della matrice wronskiana $W_\varphi(x)$ ottenuto eliminando l'ultima riga e la j-esima colonna. (Se $n=1$ si pone $\det W_{\varphi,j}(x):=1$.)

(v) (Principio di sovrapposizione) *Se $b(x)=b_1(x)+b_2(x)$, e $\widetilde{\varphi}_1(x)$* (risp. $\widetilde{\varphi}_2(x)$) *è una soluzione di (2.2) ove $b(x)$ sia sostituito da $b_1(x)$* (risp. da $b_2(x)$) *allora $\widetilde{\varphi}(x)=\widetilde{\varphi}_1(x)+\widetilde{\varphi}_2(x)$ è una soluzione di (2.2).*

Dimostrazione. (i) Se $\varphi(x),\psi(x)$ risolvono (2.3) e $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ allora è facile vedere che anche $\lambda\varphi(x)+\mu\psi(x)$ risolve (2.3), dunque S_0 è un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$. Preso un qualsiasi $x_0\in I$, l'applicazione di valutazione $v_{x_0}:S_0\to\mathbb{C}^n$ data da $v_{x_0}(\varphi)=(\varphi(x_0),\varphi'(x_0),\dots,\varphi^{(n-1)}(x_0))$ è lineare (ovvio) e biiettiva (grazie al Lemma 2.3.1). Dunque S_0 ha dimensione n. (ii) Sufficienza: vedi la Proposizione 2.3.2. Necessità: si prenda un $x_0\in I$ qualsiasi. Poiché $\det W_\varphi(x_0)=0$, il sistema lineare $W_\varphi(x_0)\underline{\lambda}=\underline{0}$ ha una soluzione non nulla $\underline{\tilde{\lambda}}=(\tilde{\lambda}_1,\dots,\tilde{\lambda}_n)\neq(0,\dots,0)$. Posto $\varphi=\tilde{\lambda}_1\varphi_1+\cdots+\tilde{\lambda}_n\varphi_n$, si ha $\varphi\in S_0$ e $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n-1)}(x_0)=0$: grazie al Lemma 2.3.1 non può che essere $\varphi=0$. Dunque le $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ sono linearmente dipendenti. Si è dunque visto che esiste x_0 tale che $\det W_\varphi(x_0)\neq 0$ se e solo se $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ è una base di S_0: ma allora, per il Lemma 2.3.1, in tal caso per ogni $x\in I$ l'applicazione di valutazione v_x deve mandare $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ in una base di $\mathbb{C}^n$, e ciò significa per l'appunto che $\det W_\varphi(x)\neq 0$. (iii) Se $\tilde{\varphi}(x)$ risolve (2.2) e $\varphi(x)\in S_0$, allora anche $\tilde{\varphi}(x)+\varphi(x)$ risolve (2.2), e dunque $\tilde{\varphi}(x)+S_0\subset S$; viceversa, se $\psi(x)$ risolve (2.2) allora $\psi(x)-\tilde{\varphi}(x)$ risolve (2.3), dunque $S-\tilde{\varphi}(x)\subset S_0$, ovvero $S\subset\tilde{\varphi}(x)+S_0$, e pertanto $S=\tilde{\varphi}(x)+S_0$. (iv) Diamo la dimostrazione nel caso $n=2$ per semplicità, ma il procedimento è facilmente adattabile al caso generale. Cerchiamo una soluzione di (2.2) della forma $\widetilde{\varphi}(x)=\gamma_1(x)\varphi_1(x)+\gamma_2(x)\varphi_2(x)$ per opportune funzioni γ_1,γ_2 da determinare. Derivando e supponendo che sia $\gamma_1'\varphi_1+\gamma_2'\varphi_2=0$, si ottiene $\widetilde{\varphi}'=\gamma_1\varphi_1'+\gamma_2\varphi_2'$.

Derivando nuovamente, si ottiene $\tilde{\varphi}'' = \gamma_1'\varphi_1' + \gamma_2'\varphi_2' + \gamma_1\varphi_1'' + \gamma_2\varphi_2''$, ma d'altra parte si ha anche $\tilde{\varphi}'' = -a_1\tilde{\varphi}' - a_0\tilde{\varphi} + b = -a_1(\gamma_1\varphi_1' + \gamma_2\varphi_2') - a_0(\gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2) + b = \gamma_1(-a_1\varphi_1' - a_0\varphi_1) + \gamma_2(-a_1\varphi_2' - a_0\varphi_2) + b$: ricordando che $\varphi_1, \varphi_2 \in S_0$, se si confrontano le due espressioni di $\tilde{\varphi}''$ si ottiene $\gamma_1'\varphi_1' + \gamma_2'\varphi_2' = b$. Si ha in sostanza il sistema $\begin{cases} \gamma_1'(x)\varphi_1(x) + \gamma_2'(x)\varphi_2(x) = 0 \\ \gamma_1'(x)\varphi_1'(x) + \gamma_2'(x)\varphi_2'(x) = b(x) \end{cases}$: essendo $\det W_\varphi(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, la tesi discende dal teorema di Cramer, che in questo caso ($n = 2$) dà

$$\tilde{\varphi}(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x), \qquad \text{con } \begin{cases} \gamma_1'(x) = -\frac{\varphi_2(x)}{\det W_\varphi(x)} b(x) \\ \gamma_2'(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\det W_\varphi(x)} b(x) \end{cases}, \text{ ovvero } \begin{cases} \gamma_1(x) = -\int \frac{\varphi_2(x)}{\det W_\varphi(x)} b(x)\,dx \\ \gamma_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)}{\det W_\varphi(x)} b(x)\,dx \end{cases}.$$

(v) Basta sommare membro a membro le equazioni soddisfatte da $\tilde{\varphi}_1(x)$ e $\tilde{\varphi}_2(x)$. □

Esempi. (1) L'equazione $y'' - y' - 2y = \frac{4e^x}{e^x+2}$ è lineare del secondo ordine, dunque lo spazio S_0 delle soluzioni dell'omogenea associata $y'' - y' - 2y = 0$ è generato da un sistema fondamentale di due funzioni. Vedremo tra breve che un sistema fondamentale è ad esempio $\{\varphi_1(x) = e^{-x}, \varphi_2(x) = e^{2x}\}$ (si noti che $W_\varphi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{pmatrix}$, dunque $\det W_\varphi(x) = 3e^x \neq 0$), da cui $S_0 = \{Ae^{-x} + Be^{2x} : A, B \in \mathbb{C}\}$. Lo spazio delle soluzioni dell'equazione completa sarà allora $S = \{Ae^{-x} + Be^{2x} + \tilde{\varphi}(x) : A, B \in \mathbb{C}\}$, ove $\tilde{\varphi}(x)$ è una qualsiasi soluzione particolare. Per il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, ne esiste una della forma $\tilde{\varphi}(x) = \gamma_1(x)\varphi_1(x) + \gamma_2(x)\varphi_2(x)$ con $\gamma_1'(x) = -\frac{e^{2x}}{3e^x}\frac{4e^x}{e^x+2} = -\frac{4e^{2x}}{3(e^x+2)}$ e $\gamma_2'(x) = \frac{e^{-x}}{3e^x}\frac{4e^x}{e^x+2} = \frac{4e^{-x}}{3(e^x+2)}$. Integrando col cambio $u = e^x$, si trova $\gamma_1(x) = \int(-\frac{4e^{2x}}{3(e^x+2)})\,dx = -\frac{4}{3}\int \frac{u}{u+2}\,du = -\frac{4}{3}(e^x - 2\log(e^x+2))$ e $\gamma_2(x) = \int(\frac{4e^{-x}}{3(e^x+2)})\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{u^2(u+2)}\,du = \frac{1}{3}\int(\frac{1}{u+2} - \frac{u-2}{u^2})\,du = \frac{1}{3}(\log(e^x+2) - x - 2e^{-x})$. **(2)** Le due funzioni $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = x^2$ sono di certo linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (vale $\det W_\varphi(x) = x^2$, dunque ad esempio $\det W_\varphi(1) = 1 \neq 0$) ma, poiché $\det W_\varphi(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, ricordando la Proposizione 2.3.3(ii) esse possono essere un sistema fondamentale di soluzioni di un'equazione lineare in forma normale (2.3) solo su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ che non contenga 0. In effetti, imponendo che esse siano soluzione di $y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$ si ottiene rispettivamente $a_1 + x\,a_0 = 0$ e $2 + 2x\,a_1 + x^2\,a_0 = 0$, da cui $a_0(x) = \frac{2}{x^2}$ e $a_1(x) = -\frac{2}{x}$, ovvero l'equazione $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ con $x \neq 0$ (pertanto $I = \mathbb{R}_{<0}$ oppure $I = \mathbb{R}_{>0}$ nella forma (2.3)).

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Data un'equazione differenziale lineare del primo ordine $\alpha_1(x)\,y' + \alpha_0(x)\,y = \beta(x)$, con $\alpha_1(x), \alpha_0(x), \beta(x)$ funzioni continue definite in un intervallo $U \subset \mathbb{R}$, la si ponga in forma normale al di fuori di $T = \{x \in U : \alpha_1(x) = 0\}$ ottenendo

$$y' + a(x)\,y = b(x). \tag{2.4}$$

Proposizione 2.3.4. *Se $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, l'integrale generale di (2.4) è*

$$S = \{e^{-A(x)}(\textstyle\int e^{A(x)}b(x)\,dx + k) : k \in \mathbb{C}\}. \tag{2.5}$$

In particolare, la soluzione del problema di Cauchy con $y(x_0) = y_0$ è

$$y(x) = e^{-A(x)}(\textstyle\int_{x_0}^{x} e^{A(t)}b(t)\,dt + y_0e^{A(x_0)}). \tag{2.6}$$

Dimostrazione. Moltiplicando ambo i membri di (2.4) per $e^{A(x)}$ si ottiene $(e^{A(x)}y)' = e^{A(x)}(y' + a(x)\,y) = e^{A(x)}b(x)$; il risultato segue allora integrando, e poi moltiplicando ambo i membri per $e^{-A(x)}$. □

Nelle notazioni di 2.3.3 si ha dunque $\varphi_1(x) = e^{-A(x)}$ e $\widetilde{\varphi}(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx$.

Esempi. **(1)** Risolviamo l'equazione $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ con condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = -3$, le cui soluzioni saranno definite su tutto $\mathbb{R}$. Una primitiva di $p(x) = \cos x$ è $P(x) = \sin x$, e $\int e^{P(x)} q(x)\, dx = \int e^{\sin x} \sin x \cos x\, dx = (\sin x - 1) e^{\sin x}$. Se ne ricava $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\, dx + k) = \sin x - 1 + k e^{-\sin x}$ con $k \in \mathbb{C}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $1 - 1 + k e^{-1} = -3$, da cui $k = -3e$, ovvero la soluzione $\varphi(x) = \sin x - 1 - 3e\, e^{-\sin x} = \sin x - 1 - 3e^{-\sin x + 1}$. **(2)** Risolviamo l'equazione $xy' + y = xe^x$. Per portare l'equazione in forma normale dobbiamo dividere per x, dunque iniziamo risolvendo il problema separatamente in $x < 0$ e in $x > 0$: si ottiene dunque $y' + p(x) y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{x}$ e $q(x) = e^x$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \log |x|$, e dunque $y(x) = e^{-P(x)}(\int e^{P(x)} q(x)\, dx + k) = \frac{1}{|x|}(\int |x| e^x dx + k) = \frac{1}{x}(\int x e^x dx + k) = \frac{(x-1)e^x + k}{x}$, con $k \in \mathbb{C}$. Poiché la soluzione è definita su un intervallo, su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è $y(x) = \frac{(x-1)e^x + k_-}{x}$ (per $x < 0$) e $y(x) = \frac{(x-1)e^x + k_+}{x}$ (per $x > 0$) con $k_-, k_+ \in \mathbb{C}$ costanti indipendenti l'una dall'altra: un'eventuale soluzione su $\mathbb{R}$ dovrà essere del tipo appena descritto se ristretta a $x > 0$ oppure a $x < 0$. Ora, se $k_+ \neq 1$ le soluzioni per $x > 0$ divergono a ∞ quando $x \to 0^+$, mentre la soluzione con $k_+ = 1$ tende a 0; lo stesso accade per le soluzioni per $x < 0$. Dunque il solo candidato soluzione globale è la funzione continua $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = \frac{(x-1)e^x + 1}{x}$ (per $x \neq 0$) e $\varphi(0) = 0$. Resta da controllare se φ sia anche derivabile in 0 (e dunque su $\mathbb{R}$), e se soddisfi l'equazione anche per $x = 0$. Ora, si ha $\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{(x-1)e^x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$; dunque φ è derivabile in 0 con $\varphi'(0) = \frac{1}{2}$, e controllando se $x\varphi'(x) + \varphi(x) = xe^x$ in $x = 0$ si ottiene $0 = 0$, vero. Dunque φ è l'unica soluzione globale dell'equazione.

Negli esempi appena proposti si riusciva a calcolare le primitive $A(x)$ e $\int e^{A(x)} b(x)\, dx$, e dunque si arrivava ad una forma esplicita per le soluzioni cercate. Tuttavia, poiché il calcolo delle primitive in forma elementare non è sempre possibile, può accadere che non si riesca ad ottenere una forma esplicita delle soluzioni; nondimeno, dall'espressione integrale (2.6) della soluzione del problema di Cauchy si possono spesso trarre interessanti informazioni sul comportamento di tale soluzione, come accade nell'esercizio che segue.

Esercizio. *Detta $\phi_{y_0}(x)$ la soluzione dell'equazione $y' - 2xy = 4$ tale che $\phi_{y_0}(0) = y_0$, ove y_0 è un parametro reale, si determinino i limiti di ϕ_{y_0} a $\mp\infty$* (dare per noto l'integrale di Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$).

Risoluzione. Da (2.6), in cui $x_0 = 0$, $A(x) = -x^2$ e $b(x) = 4$, si ricava l'espressione integrale $\phi_{y_0}(x) = e^{x^2}(4 \int_0^x e^{-t^2}\, dt + y_0)$, di cui cerchiamo ora il limite quando $x \to -\infty$ (il limite a $+\infty$ si troverà in modo analogo). Ovviamente e^{x^2} tende a $+\infty$, mentre la parentesi tende a $y_0 - 2\sqrt{\pi}$: pertanto, se $y_0 < 2\sqrt{\pi}$ oppure $y_0 > 2\sqrt{\pi}$ il limite vale rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. Il caso $y_0 = 2\sqrt{\pi}$ presenta una forma indeterminata $\infty \cdot 0$, che però si risolve facilmente con de l'Hôpital ed il Teorema Fondamentale del Calcolo: infatti $\lim_{x \to -\infty} \phi_{2\sqrt{\pi}}(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 \int_0^x e^{-t^2}\, dt + 2\sqrt{\pi}}{e^{-x^2}} (= \frac{0}{0}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4e^{-x^2}}{-2x\, e^{-x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{-x} = 0$.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Non vi sono metodi generali per trovare un sistema fondamentale di soluzioni per un'equazione lineare di ordine ≥ 2. Consideriamo allora il caso dei *coefficienti costanti*

$$a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = b(x), \qquad \text{ove } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Proposizione 2.3.5. *Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ le radici, di molteplicità $m_1, \ldots, m_s$, dell'*equazione caratteristica $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, *con* $m_j \geq 1$ *e* $\sum_{j=1}^{s} m_j = n$.

(i) *Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea associata a (2.7) è*

$$\{e^{\alpha_1 x},\ \dots,\ x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\ ;\ e^{\alpha_2 x},\ \dots,\ x^{m_2-1}e^{\alpha_2 x}\ ;\ \dots\dots\ ;\ e^{\alpha_s x},\ \dots,\ x^{m_s-1}e^{\alpha_s x}\}.$$

(ii) *Se il termine non omogeneo è della forma $b(x) = A(x)e^{\gamma x}$, per un $\gamma \in \mathbb{C}$ e un polinomio complesso $A(x)$, sia $\mu \in \{0,\dots,n\}$ la molteplicità di γ come soluzione dell'equazione caratteristica. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma $\widetilde{\varphi}(x) = x^\mu B(x)e^{\gamma x}$ ove $B(x)$ è un polinomio complesso da determinare, di grado alpiù uguale a quello di $A(x)$.*

Dimostrazione. Omessa. Tuttavia si può operare una verifica diretta a posteriori (per esercizio si mostri (i) per $n = 2$, e (ii) per $n = 2$ e $A(x)$ di grado ≤ 1). □

In particolare, ci occupiamo del caso di *secondo ordine* (cioè $n = 2$) e *coefficienti reali.*

Proposizione 2.3.6. *Si abbia $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = b(x)$ con $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, e siano α_1, α_2 le radici dell'equazione caratteristica.*

(i) *Un sistema fondamentale di soluzioni reali dell'omogenea è ottenuto come segue.*

  (1) *Se α_1, α_2 sono reali distinte, allora $\varphi_1(x) = e^{\alpha_1 x}$, $\varphi_2(x) = e^{\alpha_2 x}$.*
  (2) *Se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \in \mathbb{R}$, allora $\varphi_1(x) = e^{\alpha x}$, $\varphi_2(x) = x\, e^{\alpha x}$.*
  (3) *Se $\alpha_1 = u + iv$ e $\alpha_2 = u - iv$, allora $\varphi_1(x) = e^{ux}\cos vx$, $\varphi_2(x) = e^{ux}\sin vx$.*[14]

(ii) *Se il termine non omogeneo è della forma $b(x) = e^{ux}(P(x)\cos vx + Q(x)\sin vx)$, per certi numeri $u, v \in \mathbb{R}$ e polinomi reali $P(x)$ e $Q(x)$, sia μ la molteplicità di $u+iv$ come soluzione dell'equazione caratteristica. Allora una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma $\widetilde{\varphi}(x) = x^\mu e^{ux}(R(x)\cos vx + S(x)\sin vx)$ ove R e S sono polinomi reali da determinare, di grado alpiù uguale al massimo tra i gradi di P e Q.*

Dimostrazione. (i) Segue facilmente dalla Proposizione 2.3.5. (ii) Posto $\alpha = u + iv$, si ha $b(x) = \operatorname{Re} b_1(x) + \operatorname{Im} b_2(x)$ con $b_1(x) = P(x)\, e^{\alpha x}$ e $b_2(x) = Q(x)\, e^{\alpha x}$. Applicando per $b_1(x)$ e $b_2(x)$ la Proposizione 2.3.5, detta μ la molteplicità di α come soluzione dell'equazione caratteristica esistono polinomi complessi $P_1(x)$ (di grado al più quello di $P(x)$) e $Q_1(x)$ (di grado al più quello di $Q(x)$) tali che, posti $\widetilde{\varphi}_1(x) = x^\mu P_1(x)\, e^{\alpha x}$ e $\widetilde{\varphi}_2(x) = x^\mu Q_1(x)\, e^{\alpha x}$, si abbia $a_2\, \widetilde{\varphi}_1'' + a_1\, \widetilde{\varphi}_1' + a_0\, \widetilde{\varphi}_1 = b_1(x)$ e $a_2\, \widetilde{\varphi}_2'' + a_1\, \widetilde{\varphi}_2' + a_0\, \widetilde{\varphi}_2 = b_2(x)$. È allora facile (usando il principio di sovrapposizione, la linearità della derivazione ed il fatto che a_2, a_1, a_0, $P(x)$ e $Q(x)$ sono reali) mostrare che $\widetilde{\varphi}(x) = \operatorname{Re}\widetilde{\varphi}_1(x) + \operatorname{Im}\widetilde{\varphi}_2(x) = x^\mu e^{ux}(R(x)\cos vx + S(x)\sin vx)$, con $R(x) = \operatorname{Re} P_1(x) + \operatorname{Im} Q_1(x)$ e $S(x) = \operatorname{Re} Q_1(x) - \operatorname{Im} P_1(x)$ polinomi reali, soddisfa l'equazione differenziale di partenza. □

Esempi. **(1)** Risolviamo l'equazione $y'' - 4y' + 3y = 4xe^x$ con le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = -3$. L'equazione caratteristica ha soluzioni 1 e 3, dunque $S_0 = \{a\, e^x + b\, e^{3x} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Essendo $\alpha = 1$ una soluzione di molteplicità $\mu = 1$ dell'equazione caratteristica, esiste una soluzione $\widetilde{\varphi}(x) = x(rx + s)e^x$ dell'equazione completa con $r, s \in \mathbb{C}$ da determinare, che risultano poi $r = s = -1$. Dunque $S = \{(a - x(x + 1))e^x + b\, e^{3x} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Imponendo le condizioni iniziali si trova infine $a = -b = 1$, dunque la soluzione

[14] In tal caso, lo spazio $S_{\mathbb{R}} = \{ae^{ux}\cos vx + be^{ux}\sin vx = e^{ux}(a\cos vx + b\sin vx) : a, b \in \mathbb{R}\}$ delle soluzioni reali dell'omogenea si esprime anche come $S = \{Ae^{ux}\cos(vx + \phi) : A > 0, \phi \in \mathbb{R}\}$, ove le costanti $A > 0$ e $\phi \in \mathbb{R}$ da determinare si dicono rispettivamente *ampiezza* e *fase*.

cercata è $\phi(x) = -(x^2+x-1)e^x - e^{3x}$. **(2)** Sia $\rho \in \mathbb{R}$, e consideriamo l'equazione $y'' - 2\rho y' + \rho^2 y = e^{-3x} + \cos 2x$. L'equazione caratteristica ha soluzione doppia ρ, dunque $S_0 = \{a\, e^{\rho x} + bx\, e^{\rho x} : a, b \in \mathbb{C}\} = \{(a+bx)e^{\rho x} : a, b \in \mathbb{C}\}$. Per una soluzione particolare dell'equazione completa sfruttiamo il principio di sovrapposizione, iniziando da $b_1(x) = e^{-3x}$. Se $\rho \neq -3$ (dunque -3 ha molteplicità $\mu = 0$) c'è una soluzione $\widetilde{\varphi}_1(x) = re^{-3x}$, e si ricava $r = \frac{1}{(r+3)^2}$. Se invece $\rho = -3$ (caso in cui -3 ha molteplicità $\mu = 2$) c'è una soluzione $\widetilde{\varphi}_1(x) = sx^2 e^{-3x}$, e si ricava $s = \frac{1}{2}$. Passiamo ora a $b_2(x) = \cos 2x$: poiché $2i$ certamente non è soluzione dell'equazione caratteristica una soluzione particolare sarà della forma $\widetilde{\varphi}_2(x) = r\cos 2x + s\sin 2x$, e si ricava $r = \frac{\rho^2-4}{(\rho^2+4)^2}$ e $s = -\frac{4\rho}{(\rho^2+4)^2}$, da cui $\widetilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{(\rho^2+4)^2}((\rho^2-4)\cos 2x - 4\rho \sin 2x)$. Ricapitolando, si ha $S = \{(a+bx)e^{\rho x} + \widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{\varphi}_2(x) : a, b \in \mathbb{C}\}$, ove $\widetilde{\varphi}_1(x)$ e $\widetilde{\varphi}_2(x)$ sono le funzioni appena calcolate. **(3)** Consideriamo l'equazione $y'' + 2y' + 5y = e^x \cos 2x + 5x$. L'equazione caratteristica ha soluzioni complesse coniugate $-1 \pm 2i$, dunque $S_0 = \{a\, e^{-x}\cos 2x + be^{-x}\sin 2x : a, b \in \mathbb{C}\} = \{e^{-x}(a\cos 2x + b\sin 2x) : a, b \in \mathbb{C}\}$. Per l'equazione completa sfruttiamo ancora una volta il principio di sovrapposizione, iniziando da $b_1(x) = e^{-x}\cos 2x$. In questo caso $-1+2i$ è soluzione dell'equazione caratteristica di molteplicità $\mu = 1$, e dunque una soluzione particolare dell'equazione completa con $b_1(x)$ è $\widetilde{\varphi}_1(x) = xe^{-x}(r\cos 2x + s\sin 2x)$, e si ottiene $r = 0$ e $s = \frac{1}{4}$. Passando a $b_2(x) = 5x$, cerchiamo una soluzione particolare $\widetilde{\varphi}_2(x) = rx + s$, e i conti danno $r = 1$ e $s = -\frac{2}{5}$. Si ha dunque $S = \{e^{-x}(a\cos 2x + (b + \frac{x}{4})\sin 2x) + x - \frac{2}{5} : a, b \in \mathbb{C}\}$.

Gli esempi più importanti di equazioni differenziali lineari scalari del secondo ordine a coefficienti costanti vengono dalla *meccanica newtoniana del punto materiale*, di cui parliamo ora brevemente e senza pretesa di sostituire una trattazione più seria, da destinare a un corso di Fisica.

2.4 La meccanica newtoniana

Supponiamo che un punto materiale sia vincolato a stare su una retta.**(15)** Se $y(t)$ è la funzione (*legge oraria del moto*) che descrive l'evoluzione della coordinata ascissa y del punto materiale all'evolvere del tempo t, la derivata prima $\dot{y}(t)$ ne descrive la *velocità*, e la derivata seconda $\ddot{y}(t)$ l'*accelerazione*.**(16)** Se sul punto agisce una forza unidimensionale $F(t, y, \dot{y})$ (dipendente in generale dalla posizione y del punto, dalla sua velocità $\dot{y}$ e magari anche esplicitamente dal tempo t), la *legge di Newton***(17)** afferma che, in un riferimento inerziale, $y(t)$ obbedisce alla legge

$$m\ddot{y} = F(t, y, \dot{y}) \ :$$

ovvero, *il punto subisce un'accelerazione direttamente proporzionale alla forza F*; la costante di proporzionalità m è detta *massa inerziale*. Essendo l'equazione del secondo ordine, il problema di Cauchy si concretizzerà assegnando la posizione $y(t_0) = y_0$ e la velocità $\dot{y}(t_0) = v$ in un certo istante t_0 (tipicamente nell'istante iniziale $t_0 = 0$).

• Tra i modelli (spesso semplificati) più comuni di forze unidimensionali vi sono la forza *gravitazionale* $-mg$ (pensando ad una retta verticale e ad un'accelerazione di gravità g

(15) Più in generale, queste considerazioni possono essere estese al caso di vincolo su una curva sulla quale sia presente un'ascissa curvilinea (vedi il capitolo seguente sulle curve parametriche); in termini di Meccanica Lagrangiana, si direbbe che il punto "gode di un solo grado di libertà".
(16) In Fisica è d'uso comune indicare col punto la derivata rispetto al tempo.
(17) Secondo Principio della Dinamica, apparso nei *Principia* del 1687.

diretta nel verso negativo discendente); la forza *elastica* $-k(y-y_0)$, data da una molla di costante elastica $k>0$ con lunghezza a riposo nulla, imperniata in y_0 (si noti che questa forza dipende solo dalle caratteristiche della molla e dalla posizione del punto; essa tira tanto più forte quanto più il punto si allontana da y_0, e sempre per far ritornare il punto verso il perno y_0); la forza di *attrito viscoso* $-\nu\dot{y}$, che simula la resistenza opposta al moto da un fluido nel quale il moto avviene: si intende che il coefficiente $\nu>0$ è tanto più grande quanto più viscoso è il fluido (si noti che la forza è proporzionale alla velocità del punto, e si oppone ad essa).
Si noti che tutte queste forze danno luogo a equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti (si vedano gli esempi che seguono).

Esempi. (0) Se sul punto non agisce nessuna forza, l'equazione dà $m\ddot{y}=0$, ovvero $\ddot{y}=0$, da cui (integrando due volte) $y(t)=at+b$ con $a,b\in\mathbb{R}$ da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se, ad esempio, nell'istante $t=0$ il punto si trovava in y_0 con velocità v_0, si trova $y(0)=b=y_0$ e $\dot{y}(0)=a=v_0$, da cui $y(t)=y_0+v_0t$: il punto evolve dalla posizione y_0 con velocità costante v_0 (in ossequio al Primo Principio della Dinamica: *un corpo non sottoposto ad alcuna forza resta in quiete o si muove con moto rettilineo uniforme*). **(1)** Si consideri il caso in cui sul punto agisca solo la forza di gravità: il problema è dunque $m\ddot{y}=-mg$, ovvero $\ddot{y}=-g$ (accelerazione costante g): esso si risolve immediatamente con due integrazioni, dando $y(t)=a+bt-\frac{1}{2}gt^2$ ove $a,b\in\mathbb{R}$ sono da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se ad esempio richiediamo che $y(0)=y_0$ (posizione iniziale) e $\dot{y}(0)=v$ (velocità iniziale) si ottiene $y(0)=a=y_0$ e $\dot{y}(0)=b=v$, da cui la soluzione $y(t)=y_0+vt-\frac{1}{2}gt^2$ (*caduta libera*, espressione tipica del moto uniformemente accelerato). **(2)** Si consideri il caso in cui sul punto agisca solo una forza elastica imperniata in 0: il problema diventa $m\ddot{y}=-ky$, ovvero $\ddot{y}+\omega^2y=0$ ove si è posto $\omega=\sqrt{k/m}$ (detta *pulsazione propria* del sistema molla-massa): si tratta di una'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\xi^2+\omega^2=0$ ha le radici complesse coniugate $\pm i\omega$: ne ricaviamo che $y(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ ove $a,b\in\mathbb{R}$ sono da determinare assegnando le condizioni iniziali. Se ad esempio supponiamo che $y(0)=y_0$ e $\dot{y}(0)=0$ si ha $y(0)=a=y_0$ e $\dot{y}(0)=a\omega\cdot 0+b\omega=0$, da cui $b=0$: la soluzione è $y(t)=y_0\cos\omega t$ (il punto inizia ad *oscillare armonicamente* tra le posizioni y_0 e $-y_0$ con un *periodo* temporale $\frac{2\pi}{\omega}$. **(3)** Consideriamo il caso più generale in cui il punto sia soggetto contemporaneamente alle forze gravitazionale, elastica e viscosa. Il problema diventa $m\ddot{y}=-mg-ky-\nu\dot{y}$, ovvero $\ddot{y}+2\eta\dot{y}+\omega^2y=-g$ ove $\eta:=\nu/2m>0$: si tratta di una'equazione lineare non omogenea a coefficienti costanti. Una soluzione dell'equazione non omogenea si vede subito essere la costante $y(t)\equiv\tilde{y}:=-mg/k<0$; occupiamoci invece delle radici dell'equazione caratteristica $\xi^2+2\eta\xi+\omega^2=0$. Poniamo per comodità $\sigma=\sqrt{|\eta^2-\omega^2|}$ (vale perciò $0\le\sigma\le\max\{\eta,\omega\}$). Se $\eta>\omega$ (viscosità forte, o molla debole) si ottengono le due soluzioni reali $-\eta\pm\sigma$ (si noti che sono entrambe sono <0): dunque in questo caso la soluzione generale è

$$y(t)=ae^{-(\eta-\sigma)t}+be^{-(\eta+\sigma)t}+\tilde{y},\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Si noti che per $t\to+\infty$ il moto dato dalla soluzione dell'omogenea tende sempre a spegnersi, e la posizione tende all'equilibrio $\tilde{y}$. Nel caso "risonante" $\eta=\omega$ si ottiene la soluzione reale negativa doppia $\alpha=-\eta<0$, con soluzione generale

$$y(t)=e^{-\eta t}(a+bt)+\tilde{y},\qquad a,b\in\mathbb{R},$$

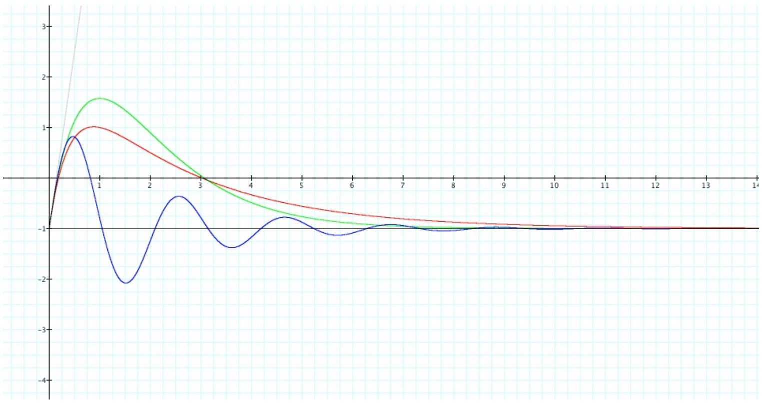
e vale ancora il discorso precedente. Se infine $\eta<\omega$ (viscosità scarsa, o molla forte) si ottengono le due soluzioni complesse coniugate $-\eta\pm i\sigma$: la soluzione generale diventa

$$y(t)=e^{-\eta t}(a\cos\sigma t+b\sin\sigma t)+\tilde{y},\qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

Anche in questo caso il moto dato dalla soluzione dell'omogenea tende sempre a spegnersi (a causa dell'esponenziale $e^{-\eta t}$) andando verso l'equilibrio $\tilde{y}$, solo che stavolta lo fa compiendo delle oscillazioni sempre più strette, di pulsazione σ. A titolo di esempio, risolvendo in ognuno dei tre casi il problema di Cauchy con $y(0)=\tilde{y}$ e $\dot{y}(0)=v\neq 0$ (in altre parole, facendo partire il punto dalla posizione di equilibrio $\tilde{y}$ con velocità v non nulla) si ottiene rispettivamente

$$y(t)=\tilde{y}+\frac{v}{2\sigma}(e^{-(\eta-\sigma)t}-e^{-(\eta+\sigma)t}),\qquad y(t)=\tilde{y}+vte^{-\eta t},\qquad y(t)=\tilde{y}+\frac{v}{\sigma}e^{-\eta t}\sin\sigma t.$$

Nella figura che segue si visualizzano le leggi orarie $y(t)$ nei tre casi precedenti, in ognuno dei quali si fa partire il punto dalla posizione di equilibrio $\tilde{y} = -1\,\mathrm{m}$ con velocità ascendente di $7\,\mathrm{m/sec}$. **(a)** La legge rossa (caso $\eta > \omega$) è ottenuta per $\eta = \sqrt{2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ e $\omega = 1\,\mathrm{sec}^{-1}$. **(b)** La legge verde (caso $\eta = \omega$) è ottenuta per $\eta = \omega = 1\,\mathrm{sec}^{-1}$. **(c)** La legge blu (caso $\eta < \omega$) è ottenuta per $\eta = \frac{1}{2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ e $\omega = 3\,\mathrm{sec}^{-1}$.



• Una forza unidimensionale *posizionale* $F = F(y)$ è "conservativa": considerando l'energia potenziale $U(y) = -\int F(y)\,dy$ (definita a meno di una costante additiva), è noto che l'*energia totale* $E(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + U(y)$ si conserva lungo le soluzioni $y(t)$.[(18)] L'energia totale è un esempio di *integrale primo* del problema, la cui presenza può aiutare a semplificarne la soluzione abbassandone l'ordine: infatti, detto E il valore costante dell'energia lungo il moto (che dipende dalle condizioni iniziali $y(t_0)$ e $\dot{y}(t_0)$), da $\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + U(y) = E$ si ottiene l'equazione del primo ordine a variabili separate

$$\frac{dy}{\sqrt{E - U(y)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\,dt.$$

Esempio. Si consideri una forza posizionale del tipo $F(y) = \sin y$, con le condizioni iniziali $y(0) = \pi$ e $\dot{y}(0) = -\frac{2}{\sqrt{m}}$. L'equazione autonoma del secondo ordine $m\ddot{y} = \sin y$ non si può risolvere con quanto appreso; tuttavia, usando l'integrale dell'energia $\frac{dy}{\sqrt{1-\cos y}} = -\sqrt{\frac{2}{m}}\,dt$ (si noti che $U(y) = \cos y$, dunque $E = E(y(0), \dot{y}(0)) = \frac{1}{2}m(\frac{2}{\sqrt{m}})^2 + \cos\pi = 1$; inoltre $\dot{y}(0) < 0$, dunque al secondo membro si è scelto il segno meno), integrando[(19)] si ricava $\log \operatorname{tg}\frac{y}{4} = -\frac{1}{\sqrt{m}}t + k$, e ricordando che $y(0) = \pi$ si ricava $k = 0$, perciò $y(t) = 4\operatorname{arctg}(e^{-t/\sqrt{m}})$.

• Il problema tridimensionale per il vettore posizione $\underline{x} = (x, y, z)$ con forza $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$:

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{F}(t, \underline{x}, \dot{\underline{x}}),$$

[(18)] Infatti, moltiplicando per $\dot{y}$ ambo i membri di $m\ddot{y} = F(y) = -\frac{d}{dy}U(y)$ si ottiene $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2) = -\frac{d}{dt}U(y(t))$, ovvero $\frac{d}{dt}E(y(t), \dot{y}(t)) = 0$, che è quanto si voleva.

[(19)] si ricordi che $1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2}$, e che $\int \frac{du}{\sin u} = \log \operatorname{tg}\frac{u}{2} + k$.

può essere decomposto nelle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) \end{cases} .$$

Questo è un esempio di *sistema differenziale ordinario*, che esula dai nostri limiti attuali: la derivata seconda di una delle coordinate può dipendere anche dalle altre coordinate e dalle loro derivate prime. Tuttavia, in alcuni casi semplici, si può avere un sistema separato (o "disaccoppiato") che potrà essere risolto indipendentemente componente per componente.

Esempi. (1) Posto nello spazio (con z verticale ascendente), il problema della caduta del grave diventa $m(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = (0,0,-mg)$, equivalente al sistema differenziale separato $\begin{cases} m\ddot{x}=0 \\ m\ddot{y}=0 \\ m\ddot{z}=-mg \end{cases}$. Supponendo ad esempio $x(0) = y(0) = 0$, $z(0) = h$, $\dot{x}(0) = v\cos\alpha$, $\dot{y}(0) = 0$ e $\dot{z}(0) = v\sin\alpha$ (ovvero, all'istante iniziale si lancia il punto materiale nel piano (x,z) dalla quota h con velocità v ed alzo α), integrando si ottiene $x(t) = (v\cos\alpha)t$, $y(t) \equiv 0$ e $z(t) = h + (v\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$: si noti che tutto il moto si svolge nel piano (x,z). Supponendo $v \neq 0$ e $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ si ricava $t = \frac{x}{v\cos\alpha}$, e sostituendo in $z(t)$ si ottiene l'equazione della traiettoria $z = h + (\operatorname{tg}\alpha)x - \frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2$, che —come noto dai tempi di Galileo— è una parabola. **(2)** Un punto materiale che si muove in un riferimento rotante con velocità angolare costante $\underline{\omega}$ e soggetto alla forza peso e ad una forza elastica con perno nell'origine è soggetto alla forza $\underline{F}(t,\underline{x},\dot{\underline{x}}) = -k\underline{x} - mg\underline{e}_3 - m\underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{x}) - 2\underline{\omega}\wedge\dot{\underline{x}}$ (si notino le accelerazioni apparenti centrifuga $-\underline{\omega}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{x})$ e di Coriolis $-2\underline{\omega}\wedge\dot{\underline{x}}$, dovute alla non inerzialità); supponendo ad esempio che $\underline{\omega} = \omega\underline{e}_3$ (cioè che l'asse di rotazione sia quello verticale), la dinamica è data dal sistema $(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = (-(\Omega^2-\omega^2)x + 2\omega\dot{y},\ -(\Omega^2-\omega^2)y - 2\omega\dot{x},\ -\Omega^2 z - g)$, ove si è posto $\Omega := \sqrt{k/m}$. Si noti che l'unico problema disaccoppiato è quello per z, che avrà oscillazioni armoniche di pulsazione Ω.