Indice

0 Presentazione

1 Integrazione generalizzata

2 Equazioni differenziali: primi elementi

3 Curve parametriche affini

4 Topologia degli spazi affini

5 Calcolo differenziale negli spazi affini

6 Varietà differenziali affini

Cos'è un'equazione differenziale?

Un'equazione differenziale è un problema in cui si cerca una funzione $y(x)$ a partire da una *relazione tra lei e le sue derivate y', y''...*

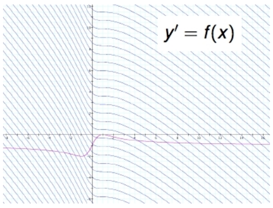
Sono questioni *frequenti* e *spesso fondamentali*.

Vediamo alcuni esempi, iniziando da quello base...

1. **Integrazione indefinita.** *Cercare le primitive di una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ su un intervallo I.*

   Problema: $\boxed{y' = f(x)}$

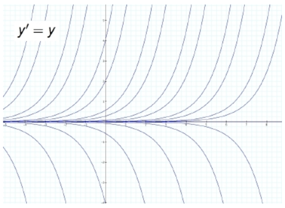
   Soluzioni: $\{y = F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}$



2. **Funzioni invarianti per derivazione**

   Problema: $\boxed{y' = y}$

   Soluzioni: $\{y = k\, e^x : k \in \mathbb{R}\}$



Le equazioni differenziali per le scienze

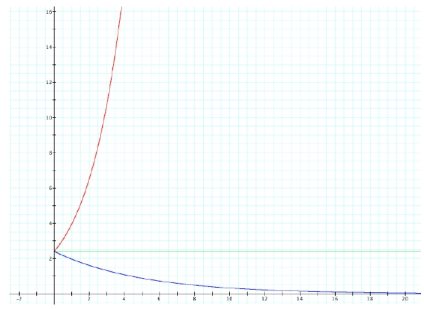
3. **Popolazione con evoluzione malthusiana.** La rapidità di variazione di una popolazione è *proporzionale* al numero di individui (T. R. Malthus, 1766-1834).

Problema per $p(t)$: $\boxed{p' = \nu p}$

(ove $\nu = N - M$ è il *tasso di crescita*, con N e M tassi di natalità e mortalità)

Soluzione: $p(t) = p_0\, e^{\nu t}$

(ove p_0 è la popolazione iniziale)



Se $\nu < 0$ la popolazione si estingue (ragionevole)
Se $\nu = 0$ la popolazione resta costante (ovviamente vero)
Se $\nu > 0$ la popolazione cresce esponenzialmente $\boxed{\textbf{irrealistico!}}$

È meglio cercare un modello più ragionevole nel caso $\nu > 0$...

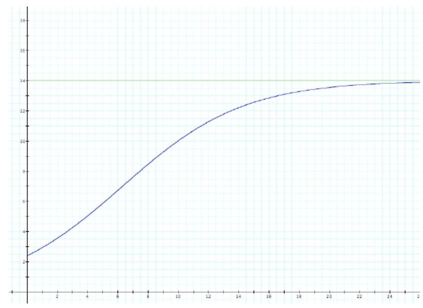
Le equazioni differenziali per le scienze

4. **Popolazione con evoluzione logistica.** Una popolazione con $\nu > 0$ cresce grossomodo proporzionalmente al numero di individui, ma oltre una *soglia critica* S inizia a decrescere.

Problema: $\boxed{p' = \nu(1 - \frac{p}{S})p}$

Soluzione: $p(t) = p_0 \frac{S\, e^{\nu t}}{S + p_0 (e^{\nu t} - 1)}$

(ove p_0 è la popolazione iniziale, con $p_0 < S$)



Questa curva è detta sigmoide logistica
(la popolazione tende asintoticamente alla soglia critica S : ragionevole)

Si noti che il modello malthusiano si ritrova nel limite $S \to +\infty$.

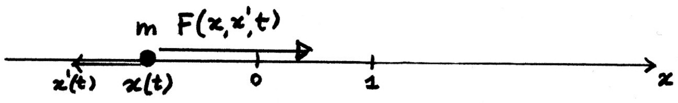
Le equazioni differenziali per le scienze

5. **Meccanica newtoniana** [*Phil. Nat. Principia Math.* (1687), Lex II]
Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur (l'accelerazione subìta da un corpo è proporzionale ed equidiretta alla forza su esso esercitata)

Sia $x(t)$ la posizione di un punto materiale in moto rettilineo:

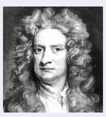
- $x'(t)$ è la sua velocità (*motus*),
- $x''(t) = (x'(t))'$ è la sua accelerazione (*mutatio motus*).

Se m è la sua massa e $F(x, x', t)$ è la forza su esso all'istante t:



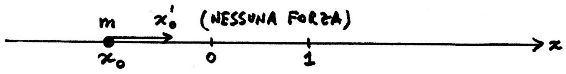
Problema: $\boxed{x'' = \frac{1}{m}F(x, x', t)}$ Soluzione: **Dipende da F !**

Le equazioni differenziali per le scienze



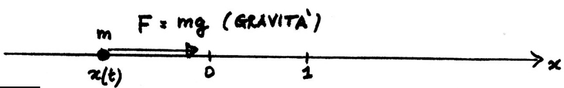
Isaac Newton, Lex II: $\boxed{x'' = \frac{1}{m}F(x, x', t)}$

- *(Nessuna forza)*



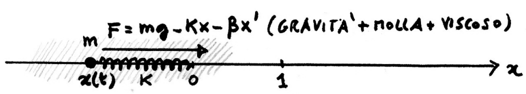
$\boxed{x'' = 0}$ dà $x(t) = x_0 + x_0' t$ (moto rett. unif. [Lex I]: già da Galileo)

- *(Gravità)*



$\boxed{x'' = \frac{1}{m}mg}$ dà $x(t) = x_0 + x_0' t + \frac{1}{2}gt^2$ (moto unif. accelerato)

- *(Gravità, molla, attrito viscoso)*



$\boxed{x'' = \frac{1}{m}(mg - kx - \beta x')}$ dà $x(t) = -\frac{mg}{k} + Ae^{-\eta t}\cos(\sigma t + \varphi)$

con $\eta = \frac{\beta}{2m}$, $\sigma = \frac{\sqrt{4mk - \beta^2}}{2m}$ (oscillazioni smorzate attorno all'equilibrio $\tilde{x} = -\frac{mg}{k}$)