Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)
Autoverifica sulle equazioni differenziali

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

giovedì 23 aprile 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento (che sarà fornito lunedì 27/4). **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Da lunedì 27/04 fino a mercoledì 29/04 sarà possibile, seguendo il link che sarà attivato il 27/04 nella pagina web, comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme a eventuali commenti. Nella comunicazione online dell'autovalutazione non vanno indicati i punteggi facoltativi: eventuali informazioni o problemi sulla risoluzione dei quesiti facoltativi potranno essere inseriti nel campo "Commenti".

Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 20 pt (+ 20 pt facolt.) **Ex. 2:** 35 pt (20+15). **Ex. 3:** 25 pt (+ 20 pt facolt.) **Ex. 4:** 20 pt. **Totale:** 100 pt (+ 40 pt facolt.). Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per una risoluzione parziale.

Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. (a) Data l'equazione differenziale $x^3y' + (y^2+4)\log|x| = 0$, si dica in quali zone del piano le soluzioni $y(x)$ sono crescenti. Trovare le soluzioni costanti. Dimostrare che se $\phi(x)$ è una soluzione per $x>0$, allora $\psi(x) = \phi(-x)$ è soluzione per $x<0$. Si calcoli infine la soluzione del problema di Cauchy condizione iniziale $y(-1) = 0$.

(b) $\boxed{\text{Facoltativo}}$ Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $2x(y-1)y' = \sin x$ tale che $y(1) = 2$, e calcolarne i limiti notevoli.

2. (a) Trovare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale $(x^2-1)y' - x^2 + 2(x-y) + 5 = 0$ tale che $y(0) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Per quali α tale soluzione può essere prolungata ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$?

(b) Risolvere il problema di Cauchy dato da $xy' - y = \sin x$ e dalla condizione $y(1) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Determinare, al variare di α, i limiti della soluzione in 0^+ e in $+\infty$.

3. (a) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione del problema di Cauchy dato dall'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = e^{-\alpha x} - 2\alpha\cos x$ e dalle condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$.

(b) $\boxed{\text{Facoltativo}}$ Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, la soluzione dell'equazione differenziale $y^{(\mathrm{IV})} - \alpha y = x + e^{-x}$ tale che $y(0) = 0$.

4. Una sferetta di massa m è immersa in un piccolo tubo orizzontale di vetro liscio contenente del fluido in quiete; essa è congiunta ad un punto del tubo da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, e si trova ferma sopra il perno della molla. Improvvisamente il fluido viene fatto scorrere con velocità costante $v>0$ da sinistra verso destra. Detto β il coefficiente viscoso del fluido, discutere la legge oraria del moto $x(t)$ rispetto ad un riferimento cartesiano orizzontale x con l'origine nel perno della molla.[1]

---

[1] Si suggerisce di porre $\gamma = \beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega = \sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla). Naturalmente l'esito del moto dipenderà dalle relazioni reciproche tra i parametri, e quanto trovato andrà poi interpretato per vedere se è fisicamente sensato!

Soluzioni.

1. (a) L'equazione differenziale $x^3y' + (y^2+4)\log|x| = 0$ è definita per $x \neq 0$; le soluzioni saranno crescenti dove $y' = -\frac{(y^2+4)\log|x|}{x^3} \geq 0$, dunque per $x \leq -1$ oppure $0 < x \leq 1$ (ci aspettiamo dunque dei massimi locali in $x = \pm 1$). Se $y \equiv k$ fosse soluzione, poiché $y' \equiv 0$ dovrebbe aversi $(k^2+4)\log|x| = 0$ per ogni $x \neq 0$, ma nessun k permette ciò (infatti $k^2 + 4 > 0$). Dunque non vi sono soluzioni costanti. Supponiamo ora che $\phi(x)$ sia una soluzione per $x > 0$, e poniamo $\psi(x) = \phi(-x)$: poiché $\psi'(x) = -\phi'(-x)$ (regola della catena), per un qualsiasi $x < 0$ si ha $x^3\psi'(x) + (\psi(x)^2+4)\log|x| = x^3(-\phi'(-x)) + (\phi(-x)^2+4)\log|x| = (-x)^3\phi'(-x) + (\phi(-x)^2+4)\log|-x| = 0$ (infatti $-x > 0$, e $\phi(t)$ è soluzione per $t > 0$, dunque in questo caso per $t = -x$): ma ciò significa che $\psi(x)$ è soluzione quando $x < 0$. Passiamo ora alla risoluzione dell'equazione, che è a variabili separabili: si ottiene $\frac{1}{y^2+4}\,dy = -\frac{\log|x|}{x^3}\,dx$ da cui, integrando (al secondo membro per parti), si ottiene $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2} = \frac{2\log|x|+1}{4x^2} + k$. Con la condizione iniziale $y(-1) = 0$ si ottiene $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,0 = \frac{1}{4} + k$, da cui $k = -\frac{1}{4}$, da cui $\mathrm{arctg}\,\frac{y}{2} = \frac{2\log|x|+1}{2x^2} - \frac{1}{2}$, da cui $y = 2\,\mathrm{tg}\,(\frac{2\log|x|-1}{2x^2} - \frac{1}{2})$.

(b) Da $2x(y-1)y' = \sin x$, separando le variabili si ottiene $2(y-1)\,dy = \frac{\sin x}{x}\,dx$. Ora, come noto, $\frac{\sin x}{x}$ non è integrabile elementarmente, dunque per la primitiva dobbiamo lasciare la notazione integrale; poiché è data la condizione $y(1) = 2$ converrà considerare $D(x) := \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ (la notazione $D(x)$ vorrebbe evocare il nome di Dirichlet), definita in $]0,+\infty[$. Si ottiene allora $y^2 - 2y = D(x) + k$, e imponendo che $y(1) = 2$ si ha $k = 0$. Pertanto si ha $y^2 - 2y - D(x) = 0$, da cui $y(x) = 1 + \sqrt{D(x)+1}$ (vista la condizione iniziale, la soluzione col "meno" è spuria). I limiti notevoli di $y(x)$ sono dunque in 0^+ e in $+\infty$. Ora, poiché come noto $\frac{\sin t}{t}$ è prolungabile per continuità in $t = 0$ col valore 1, si ha che $D(x)$ è pure essa prolungabile per continuità in $x = 0$ col valore $D(0) := \int_1^0 \frac{\sin t}{t}\,dt = -\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \sim -0{,}95$, da cui $\lim_{x\to 0^+} y(x) = 1 + \sqrt{D(0)+1} \sim 1{,}2$; inoltre, sempre come noto, $D(x)$ è (semplicemente) integrabile in $+\infty$ per cui, detto $\ell := \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1 + \sqrt{\ell+1}$. In realtà si può calcolare che l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ vale $\frac{\pi}{2}$ e dunque, essendo $\ell = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt \sim \frac{\pi}{2} - 0{,}95 \sim 0{,}6$, si ottiene $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1 + \sqrt{\ell+1} \sim 2{,}3$.

2. (a) L'equazione differenziale $(x^2-1)y' - x^2 + 2(x-y) + 5 = 0$, ovvero $(x^2-1)y' - 2y = x^2 - 2x - 5$, è lineare del primo ordine; per portarla nella forma normale $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{2}{x^2-1}$ e $q(x) = \frac{x^2-2x-5}{x^2-1}$ bisogna dividere per $x^2 - 1$, dunque dobbiamo per il momento assumere $x \neq \mp 1$. Poiché $P(x) = \int p(x)\,dx = \log|\frac{x+1}{x-1}|$ e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int |\frac{x+1}{x-1}| \frac{x^2-2x-5}{x^2-1} = \Big(\mathrm{sign}\,(x^2-1)\Big)(\frac{x^2-x+6}{x-1})$, l'integrale generale (su ciascuno degli intervalli connessi che compongono $\mathbb{R} \setminus \{\mp 1\}$) è $y(x) = |\frac{x-1}{x+1}|(\Big(\mathrm{sign}\,(x^2-1)\Big)(\frac{x^2-x+6}{x-1}) + k) = \frac{x^2-x+6}{x+1} + k|\frac{x-1}{x+1}|$. Se ora vogliamo imporre la condizione iniziale $y(0) = \alpha$, dobbiamo dunque essere consapevoli che ciò riguarderà solo la costante sull'intervallo $]-1,1[$ (sul quale $|\frac{x-1}{x+1}| = -\frac{x-1}{x+1}$): si ottiene $\alpha = 6 + k$, da cui $k = \alpha - 6$, ovvero la soluzione $y(x) = \frac{x^2-x+6}{x+1} + (\alpha-6)(-\frac{x-1}{x+1}) = \frac{x^2-(\alpha-5)x+\alpha}{x+1}$. Se si vuole avere una speranza di prolungare questa soluzione ad una su tutto $\mathbb{R}$ bisogna, per iniziare, che i limiti $\lim_{x\to\mp 1^\pm} \frac{x^2-(\alpha-5)x+\alpha}{x+1}$ siano finiti: quello per $x \to 1^-$ lo è sempre e vale 3, mentre quello per $x \to -1^+$ lo è solo quando $\alpha = 2$, e vale 1. In tal caso si ottiene in effetti la soluzione $y(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+1} = x + 2$, che è valida su tutto $\mathbb{R}$... ed è anzi, come visto, l'unica ad esserlo.

(b) Posto $x \neq 0$, l'equazione diventa $y' + p(x)y = q(x)$ con $p(x) = -\frac{1}{x}$ e $q(x) = \frac{\sin x}{x}$. Essendo $P(x) = -\log x$ (visto che la condizione iniziale è in $x_0 = 1$, già pensiamo $x > 0$), la soluzione $y_\alpha(x)$ del problema di Cauchy con $y(1) = \alpha$ si può scrivere in forma integrale come $y_\alpha(x) = e^{-P(x)}(\int_1^x e^{P(t)}q(t)\,dt + \alpha e^{P(1)}) = x(\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \alpha)$. Quando x tende a 0^+ l'integrale $\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ tende all'integrale generalizzato $\int_1^0 \frac{\sin t}{t^2}\,dt = -\int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,dt$, che diverge a $-\infty$ (infatti $\frac{\sin t}{t^2} \sim_{0^+} \frac{1}{t}$), dunque il $\lim_{x\to 0^+} y_\alpha(x)$ è in forma indeterminata $0 \cdot \infty$; tuttavia, con de l'Hôpital si ricava $\lim_{x\to 0^+} y_\alpha(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,dt + \alpha}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{-1/x^2} = 0^-$, dunque $y_\alpha(x)$ tende a 0^- per ogni α. Invece, quando x tende a $+\infty$ l'integrale $\int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ tende all'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$, che converge anche assolutamente (non serve usare Abel-Dirichlet) in quanto $|\frac{\sin t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$. Detto $\ell \in \mathbb{R}$ il valore di tale integrale generalizzato, è dunque chiaro che se $\alpha \neq -\ell$ si ricava $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \mathrm{sign}\,(\ell+\alpha)\infty$. Nel caso particolare in cui $\alpha = -\ell$ il limite è in forma indeterminata $\infty \cdot 0$, solo che stavolta purtroppo de l'Hôpital non si può applicare (infatti il limite del rapporto delle derivate $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\sin x}{x^2}}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty}(-\sin x)$ non esiste) ...

3. (a) L'equazione caratteristica di $y'' + 2y' + y = 0$ è $t^2 + 2t + 1 = 0$, che ha radice doppia $t = -1$: dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea associata è $y(x) = A\,e^{-x} + B\,xe^{-x} = (A + Bx)e^{-x}$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$. Poiché i non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_2(x) = -2\alpha\cos x$ è della forma $\tilde{y}_2(x) = a\,\cos x + b\,\sin x$: essendo $\tilde{y}_2'(x) = b\,\cos x - a\,\sin x$ e $\tilde{y}_2''(x) = -a\,\cos x - b\,\sin x$, imponendo che lo sia si ottiene $2(b\cos x - a\sin x) = -2\alpha\cos x$, da cui $a = 0$ e $b = -\alpha$: dunque $\tilde{y}_2(x) = -\alpha\sin x$. Quanto a $b_1(x) = e^{-\alpha x}$, se $\alpha \neq 1$ si ha che $-\alpha$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x) = a\,e^{-\alpha x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = -a\alpha\,e^{-\alpha x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = a\alpha^2\,e^{-\alpha x}$, imponendo che lo sia si ottiene $(\alpha^2 - 2\alpha + 1)a\,e^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = \frac{1}{(\alpha-1)^2}$: dunque se $\alpha \neq 1$ si ha $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x}$. Se invece $\alpha = 1$, il numero $-\alpha = -1$ è soluzione doppia dell'equazione caratteristica, dunque una soluzione particolare è della forma $\tilde{y}_1(x) = ax^2\,e^{-x}$: essendo $\tilde{y}_1'(x) = a(2x - x^2)\,e^{-x}$ e $\tilde{y}_1''(x) = a(2 - 4x + x^2)\,e^{-x}$, si ottiene $2a\,e^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = \frac{1}{2}$. Ricapitolando:

(i) se $\alpha \neq 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A + Bx)e^{-x} + \frac{1}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x} - \alpha\sin x$, da cui $y'(x) = (B - A - Bx)e^{-x} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\,e^{-\alpha x} - \alpha\cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ha $0 = A + \frac{1}{(\alpha-1)^2}$ e $0 = B - A - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2} - \alpha$, da cui $A = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}$ e $B = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$;

(ii) se invece $\alpha = 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A+Bx)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2\,e^{-x} - \sin x$, da cui $y(x) = (B - A - Bx)e^{-x} + \frac{1}{2}(2x - x^2)\,e^{-x} - \cos x$, e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ si ha $0 = A$ e $0 = B - A - 1$, da cui $A = 0$ e $B = 1$, ovvero la soluzione $y(x) = (x + \frac{1}{2}x^2)\,e^{-x} - \sin x$.

(b) Se $\alpha = 0$ l'equazione diventa $y^{(\mathrm{IV})} = x + e^{-x}$, il cui integrale generale (con quattro integrazioni successive) è $y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{x^5}{120} + e^{-x}$, al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$. Imponendo che $y(0) = 0$ si trova $A + 1 = 0$, da cui $A = -1$: dunque le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{x^5}{120} + e^{-x} - 1$, al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$.
Se invece $\alpha > 0$, posto $\beta = \sqrt[4]{\alpha}$, l'equazione caratteristica di $y^{(\mathrm{IV})} - \alpha y = x + e^{-x}$ ha le quattro radici distinte $\pm\beta$ e $\pm i\beta$, dunque un sistema fondamentale è dato da $\varphi_1(x) = e^{\beta x}$, $\varphi_2(x) = e^{-\beta x}$, $\varphi_3(x) = e^{i\beta x}$, $\varphi_4(x) = e^{-i\beta x}$; sostituendo $\varphi_3(x)$ e $\varphi_4(x)$ rispettivamente con la loro semisomma e con la loro differenza divisa per $2i$, possiamo anzi scegliere $\varphi_3(x) = \cos\beta x$ e $\varphi_4(x) = \sin\beta x$. Poiché 0 non è soluzione dell'equazione caratteristica, una soluzione particolare per $b_1(x) = x$ sarà della forma $\tilde{\varphi}_1(x) = ax + b$, e da $\tilde{\varphi}_1^{(\mathrm{IV})}(x) - \alpha\tilde{\varphi}_1(x) = x$ si trova $0 - \alpha(ax + b) = x$, da cui $a = -\frac{1}{\alpha}$ e $b = 0$, dunque $\tilde{\varphi}_1(x) = -\frac{1}{\alpha}x$. Quanto a $b_2(x) = e^{-x}$, vanno distinti i casi $\alpha = 1$ e $\alpha \neq 1$: infatti nel primo caso -1 è radice (semplice) dell'equazione caratteristica, mentre nel secondo non lo è. Se $\alpha = 1$ una soluzione particolare è della forma $\tilde{\varphi}_2(x) = axe^{-x}$, e da $\tilde{\varphi}_2^{(\mathrm{IV})}(x) - \tilde{\varphi}_2(x) = e^{-x}$ si trova $a(x-4)e^{-x} - axe^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = -\frac{1}{4}$, ovvero $\tilde{\varphi}_2(x) = -\frac{1}{4}xe^{-x}$; se invece $\alpha \neq 1$ una soluzione particolare è della forma $\tilde{\varphi}_2(x) = ae^{-x}$, e da $\tilde{\varphi}_2^{(\mathrm{IV})}(x) - \alpha\tilde{\varphi}_2(x) = e^{-x}$ si trova $ae^{-x} - \alpha ae^{-x} = e^{-x}$, da cui $a = \frac{1}{1-\alpha}$, ovvero $\tilde{\varphi}_2(x) = \frac{1}{1-\alpha}e^{-x}$. Ricapitolando: se $\alpha = 1$ l'integrale generale è $y(x) = (A - \frac{1}{4}x)e^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x - x$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si trova $0 = A + B + C$, da cui ad esempio $A = -B - C$, e le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = (-B - C - \frac{1}{4}x)e^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x - x$ al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$; se invece $\alpha > 0$ ma $\alpha \neq 1$ l'integrale generale è $y(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C\cos\beta x + D\sin\beta x - \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{1-\alpha}e^{x}$ al variare di $A, B, C, D \in \mathbb{C}$, e imponendo che $y(0) = 0$ si trova $0 = A + B + C + \frac{1}{1-\alpha}$, da cui ad esempio $A = -B - C - \frac{1}{1-\alpha}$, e le soluzioni cercate sono quelle della forma $y(x) = (-B - C - \frac{1}{1-\alpha})e^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C\cos\beta x + D\sin\beta x - \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{1-\alpha}e^{x}$ al variare di $B, C, D \in \mathbb{C}$.

4. Il fluido, nel suo moto, spinge la sferetta verso destra con la forza viscosa costante βv, dunque l'equazione differenziale cui obbedisce il moto $x(t)$ è $mx'' = -kx - \beta x' + \beta v$, ovvero $x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 2\gamma v$ con $\gamma = \beta/2m$ (viscosità specifica) e $\omega = \sqrt{k/m}$ (pulsazione del sistema massa-molla). Una soluzione particolare dell'equazione completa è evidentemente la costante $\tilde{x} := \frac{2\gamma v}{\omega^2} = \frac{\beta v}{k}$. Quanto all'equazione omogenea, il discriminante dell'equazione caratteristica è $4(\gamma^2 - \omega^2)$, dunque vanno distinti tre casi.

(a) Se $\gamma > \omega$ (fluido denso, o molla debole), l'equazione caratteristica ha due radici reali negative distinte $\sigma' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ e $\sigma'' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$, con $\sigma' < \sigma'' \leq 0$. L'integrale è $x(t) = Ae^{\sigma' t} + Be^{\sigma'' t} + \tilde{x}$, e con le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = \frac{-\sigma''}{\sigma''-\sigma'}\tilde{x}$ e $B = \frac{\sigma'}{\sigma''-\sigma'}\tilde{x}$, ovvero $x(t) = \tilde{x}\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t}) - \sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'}$; in ogni caso, essendo $\sigma', \sigma'' < 0$ si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \tilde{x}$. Si noti che la velocità $x'(t) = \frac{\sigma'\sigma''}{\sigma''-\sigma'}(e^{\sigma'' t} - e^{\sigma' t})$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t \to +\infty$.

(b) Se $\gamma = \omega$ (caso risonante), l'equazione caratteristica ha una radice reale doppia negativa $-\gamma$. L'integrale è $x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t} + \tilde{x}$, da cui $x'(t) = (B - \gamma A - \gamma Bt)e^{-\gamma t}$, e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = -\tilde{x}$ e $B = -\gamma\tilde{x}$, da cui $x(t) = \tilde{x}(1 - (1 + \gamma)e^{-\gamma t})$; in ogni caso, essendo $-\gamma < 0$ si ha anche qui $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \tilde{x}$, e la velocità $x'(t) = \gamma(1 + \gamma)\tilde{x}\,e^{-\gamma t}$ è sempre positiva e tende a smorzarsi per $t \to +\infty$.

(c) Infine, se $\gamma < \omega$ (fluido rarefatto, o molla forte), l'equazione caratteristica ha due radici complesse coniugate con parte reale negativa $-\gamma$ e parte immaginaria $\pm\eta$, con $\eta = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$. L'integrale, scritto in forma reale, è $x(t) = e^{-\gamma t}(A\cos\eta t + B\sin\eta t) + \tilde{x}$, da cui $x'(t) = ((\eta B - \gamma A)\cos\eta t - (\eta A + \gamma B)\sin\eta t)e^{-\gamma t}$ e imponendo le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $x'(0) = 0$ si trova $A = -\tilde{x}$ e $B = -\frac{\gamma}{\eta}\tilde{x}$, ovvero $x(t) = \tilde{x}(1 - e^{-\gamma t}(\cos\eta t + \frac{\gamma}{\eta}\sin\eta t))$; e anche qui, essendo $-\gamma < 0$, si ha $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \tilde{x}$, mentre la velocità $x'(t) = \tilde{x}\frac{\gamma^2+\eta^2}{\eta}e^{-\gamma t}\sin\eta t$ oscilla di segno e tende a smorzarsi per $t \to +\infty$.

Ricapitolando, in tutti i casi la sferetta tende asintoticamente alla posizione $\tilde{x} = \frac{\beta v}{k}$: nei primi due casi, avvicinandosi da sinistra con velocità positiva tendente a zero; nel terzo, dopo una "fase transitoria" di oscillazioni smorzate attorno a $\tilde{x}$. Tutto ciò è fisicamente sensato: è naturale che, dopo una fase iniziale transitoria, la spinta del fluido e il richiamo della molla facciano attestare la sferetta su una posizione di compromesso.

Curiosità: i casi estremi come limite dei casi intermedi. Se nel tubo non ci fosse fluido ($\gamma = 0$) il moto avverrebbe solo per azione della forza elastica: da $x'' + \omega^2 x = 0$ si otterrebbe, come noto, $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, e con le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ si avrebbe $A = B = 0$, ovvero la prevedibile quiete $x(t) \equiv 0$. Se invece non ci fosse la molla ($k = 0$) agirebbe solo il fluido, che finirebbe per trascinare via con sè la sferetta: da $x'' + 2\gamma x' = 2\gamma v$ si otterrebbe $x(t) = A + Be^{-2\gamma t} + vt$, da cui $x(t) = v - 2\gamma Be^{-2\gamma t}$, e le condizioni iniziali $x(0) = x'(0) = 0$ darebbero $A + B = 0$ e $v - 2\gamma B = 0$, da cui $A = -\frac{v}{2\gamma}$ e $B = \frac{v}{2\gamma}$, ovvero $x(t) = v(\frac{e^{-2\gamma t}-1}{2\gamma} + t)$. Si tratta infatti di un moto che tende (man mano che scema l'effetto del termine transitorio $e^{-2\gamma t}$) al rettilineo uniforme, con la velocità $x'(t) = v(1 - e^{-2\gamma t})$ che tende asintoticamente a v. Cerchiamo ora di ottenere questi due casi estremi come limite, rispettivamente, dei casi (c) e (a) trattati in precedenza.

Se il fluido è estremamente rarefatto o la molla estremamente dura ($\frac{\gamma}{\omega} \to 0^+$), la posizione $\tilde{x}$ tende a 0, e da (c) si osserva che $x(t)$ tende effettivamente alla quiete in 0.

Se invece il fluido è estremamente denso o la molla estremamente cedevole ($\frac{\omega}{\gamma} \to 0^+$), l'evoluzione del moto $x(t)$ in (a) è meno chiara: infatti la posizione $\tilde{x}$ tende coerentemente a $+\infty$ ma, poiché σ' e σ'' tendono rispettivamente a -2γ e a 0^-, la frazione $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t})-\sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'}$ tende a 0. Conviene allora operare come segue, sviluppando $x(t)$ (per un t fissato) rispetto alla quantità infinitesima $\varepsilon := \frac{\omega}{\gamma}$. Si ha $\sigma' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}) = -\gamma(1 + 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $\sigma'' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} = -\gamma(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}) = -\gamma(1 - 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = -\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, dunque $\sigma'' - \sigma' = 2\gamma - \gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$, poi $1 - e^{\sigma' t} = 1 - e^{(-2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t}e^{(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - e^{-2\gamma t}(1 + \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = (1 - e^{-2\gamma t}) - \frac{1}{2}\gamma t e^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$ e $1 - e^{\sigma'' t} = 1 - e^{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))t} = 1 - (1 - \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) = \frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$: sostituendo, si ha $\frac{\sigma''(1-e^{\sigma' t})-\sigma'(1-e^{\sigma'' t})}{\sigma''-\sigma'} = \frac{(-\frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))((1-e^{-2\gamma t}) - \frac{1}{2}\gamma t e^{-2\gamma t}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) - (-2\gamma + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))(\frac{1}{2}\gamma t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2))}{2\gamma - \gamma\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)} = \frac{-\frac{1}{2}\gamma(1-e^{-2\gamma t})\varepsilon^2 + \gamma^2 t\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)}{2\gamma + o_0(1)} = \frac{2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)$. D'altra parte vale $\tilde{x} = \frac{2\gamma v}{\omega^2} = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}$, dunque $x(t) = \frac{2v}{\gamma}\varepsilon^{-2}(\frac{2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t}}{4}\varepsilon^2 + o_0(\varepsilon^2)) \sim_0 \frac{v}{2\gamma}(2\gamma t - 1 + e^{-2\gamma t})$, che è quanto trovato in precedenza nel caso di assenza della molla.