Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)
Esercizi di ricapitolazione n. 1

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

venerdì 8 maggio 2009

Questi esercizi sono proposti come preparazione alla I$^{\alpha}$ prova parziale. Le loro risoluzioni saranno date, per quanto possibile, nel corso della lezione di lunedì 11/05.

---

1. (a) Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono i seguenti integrali generalizzati. Calcolare poi gli integrali (iii) e (iv) per ogni α in cui convergono, e l'integrale (v) per $\alpha = 1$.

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2-3\alpha}\,|x-2|^{\alpha}}\ , \quad \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha}+1}{(x+\cos x)^{3-\alpha}}\,dx\ , \quad \text{(iii)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos^{\alpha} x}\,dx\ ,$$

$$\text{(iv)} \int_0^{+\infty} e^{(2-\alpha)x}\sin(\alpha x+1)\,dx \quad (\alpha \geq 0)\ , \quad \text{(v)} \int_0^{+\infty} (x+1)^{-2\alpha}\log(x^{\alpha}+1)\,dx.$$

(b) Studiare –per quanto possibile– l'andamento delle funzioni integrali

$$\text{(i)} \quad F(x) = \int_{-x}^{\frac{1}{x}} \frac{t^2}{t^2+1}\,dt\ , \qquad \text{(ii)} \quad G(x) = \int_{\frac{x+2}{x^2-1}}^{-3} \log(t^2+2t+2)\,dt$$

senza calcolare una primitiva delle funzioni integrande di t. Solo alla fine cercare di ottenerne una forma esplicita tramite una primitiva, rispondendo alle questioni rimaste in sospeso.

2. Risolvere i seguenti problemi con equazioni differenziali.

(i) Data l'equazione $y(x+1)y' + 1 - y^2 = 0$, studiarne la crescenza delle soluzioni. Dire se vi sono soluzioni costanti, e se le soluzioni definite in $x = 0$ sono pari. Si calcolino infine la soluzione tale che $y(0) = -2$, e la soluzione tale che $y(0) = 1$.

(ii) Risolvere $(x^2-1)y' - 2y = 1$ in due modi. Vi sono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$?

(iii) Trovare la funzione $y(x)$ tale che $(x^3+1)y' + 2x^2 y = \sin x$ e $y(0) = \alpha$, ove α è un parametro reale. Calcolare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$. (<u>Facoltativo</u>: Calcolare $\lim_{x\to-1^+} y(x)$.)

(iv) Trovare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $4y'' - 4y' + y = (x+1)e^{\frac{x}{2}}$ tali che $y(0) = -2y'(0)$.

(v) Alla luce di quanto studiato, dire come è fatto l'integrale generale[1] dell'equazione differenziale $y''' + \alpha x^2 y' + 8y = \frac{1}{x+1}$, ove $\alpha \in \mathbb{R}$. (<u>Facoltativo</u>: Posto poi $\alpha = 0$, cercare per quanto possibile di descrivere concretamente tale integrale generale.)

---

[1] cioè: che struttura ha (spazio vettoriale, spazio affine, nulla di tutto ciò...), e quale sarà il dominio delle soluzioni.

3. (i) Disegnare nel piano la curva cartesiana $S = \{(x,y) : x - 2y - 1 = 0,\ 0 \le x \le 2\}$ e la curva polare C di equazione $\rho(\theta) = \frac{3}{3-2\cos\theta}$ con $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}$, descrivendo di che tipo di insiemi si tratta. Descrivere la retta ortogonale a S in $(1,0)$ e la retta tangente a C nel punto con $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Scambiando le rappresentazioni, esprimere S con un'equazione polare $\rho = \rho(\theta)$, e C con un'equazione cartesiana del tipo $f(x,y) = 0$; quindi scrivere esplicitamente le due parametrizzazioni di S e C come curve-grafico $y = y(x)$ o come curve polari $\rho = \rho(\theta)$ (qual'è il cambio di parametro?).

(ii) Parametrizzare $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0,\ x + y \le -3\}$ e $B = \{(x,y) : 2x + e^y = 1,\ |y| \le 2\}$ in modo opportuno. Calcolare[2] l'elemento d'arco $d\sigma$, la lunghezza, il baricentro geometrico e l'integrale al differenziale d'arco di $f(x,y) = x^2y - 1$.

(iii) Disegnare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 0\ ,\ 3y = x^3\ ,\ 0 \le x \le 2\ \}$$

e parametrizzarlo in due modi, come curva-grafico e tramite l'angolo θ delle coordinate cilindriche. Scrivere esplicitamente il cambio di parametrizzazione. Calcolare la lunghezza di Γ. Supponendo che la densità di massa di Γ evolva con la legge $\delta(x,y,z) = ax+by+c \ge 0$ per certi $a,b,c \in \mathbb{R}$, calcolare la massa e il momento d'inerzia di Γ rispetto all'asse z.

4. (a) Per ciascuna delle seguenti funzioni studiare il dominio, il segno (per (iii), il segno di ciascuna componente), la limitatezza, la continuità, e i limiti proposti (con più opzioni).

$$\text{(i)} \lim_{(2,2);\,(8,4);(\frac{8}{5},-\frac{12}{5});\,\infty_2} \frac{\sqrt{y^2-2x}-x}{x-y-4}\,; \qquad \text{(ii)} \lim_{(0,0);\,\infty_2} \big(\operatorname{arctg}(|2x+y-1|-y)-1\big)\,;$$

$$\text{(iii)} \lim_{(0,0);(-1,\pi);\infty_2} \left(\frac{xy+\sin xy}{x^2+y^2}\ ,\ |y| - e^{-|x|}\right).$$

(b) Disegnare ognuno degli insiemi che seguono, e dire se è aperto, chiuso, limitato, compatto, connesso (per archi).

(i) $A = \{(x,y) : 2x - y^2 + 3 \ge 0,\ x|y| \le 1\}$; (ii) $B = \{(x,y,z) : x^2 + 2y^2 + (z-3)^2 = 4,\ |x| > 1\}$;

(iii) $C = \{(x,y) : |y-1| < e^x,\ |x| < 3\}$; (iv) $D = \{(x,y,z) : 3x^2 + 2y^2 + 2x = 0,\ z + 1 + \sqrt{x+2z} > 0\}$.

[2] Per ognuna di queste domande, così come per quelle dell'esercizio seguente, è importante riuscire a scrivere correttamente gli integrali da calcolare, anche se non si riesce a terminare il conto.

Soluzioni.

1. Si denoterà con $f_\alpha(x)$ la funzione integranda.

(a.i) L'integrabilità va controllata in 0^+, in 2^-, in 2^+ e in $+\infty$. Poiché $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^{-(2-3\alpha)}$, l'integrabilità in 0^+ dà $-(2-3\alpha) > -1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{3}$. Si ha poi $f_\alpha(x) \sim^*_{2^\mp} |x-2|^{-\alpha}$, dunque l'integrabilità in $2^\mp$ dà $-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 1$. Infine, essendo $|x-2|^\alpha \sim_{+\infty} x^\alpha$ si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} x^{-(2-2\alpha)}$, dunque l'integrabilità in $+\infty$ dà $-(2-2\alpha) < -1$, ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$. Riassumendo, l'integrale proposto converge per $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

(a.ii) Poiché $x + \cos x > 0$ per ogni $x \geq 0$, l'integrabilità va controllata in 0^+ e $+\infty$. In 0^+ si ha $x + \cos x \sim_{0^+} 1$, da cui $(x+\cos x)^{3-\alpha} \sim_{0^+} 1$, mentre per il numeratore bisogna distinguere due casi: se $\alpha \geq 0$ si ha $x^\alpha + 1 \sim^*_{0^+} 1$, mentre se $\alpha < 0$ si ha $x^\alpha + 1 \sim^*_{0^+} x^\alpha$. Pertanto, se $\alpha \geq 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} 1$, e non c'è problema; se invece $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x^\alpha$, e bisogna che $\alpha > -1$. Dunque si ha integrabilità in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$. Passando ora a $+\infty$, si ha $x + \cos x \sim_{+\infty} x$ da cui $(x + \cos x)^{3-\alpha} \sim_{+\infty} x^{3-\alpha}$; per il numeratore bisogna ancora distinguere i casi $\alpha > 0$ (in cui si ha $x^\alpha + 1 \sim_{+\infty} x^\alpha$) e $\alpha \leq 0$ (in cui $x^\alpha + 1 \sim^*_{+\infty} 1$). Pertanto, se $\alpha > 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{\alpha-(3-\alpha)} = x^{2\alpha-3}$, e la condizione è $2\alpha - 3 < -1$, ovvero $\alpha < 1$; se invece $\alpha \leq 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{-(3-\alpha)} = x^{\alpha-3}$, e la condizione è $\alpha - 3 < -1$, ovvero $\alpha < 2$ (sempre vero). Dunque si ha integrabilità in $+\infty$ se e solo se $\alpha < 1$. Riassumendo, l'integrale proposto converge per $|\alpha| < 1$.

(a.iii) Si ha $f_\alpha(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^{\alpha-1} x}$. Vale dunque $f_\alpha(x) \sim^*_{0^+} x$ (integrabile); essendo poi $\cos x \sim_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - x)$, si ottiene $f_\alpha(x) \sim^*_{\frac{\pi}{2}^-} (\frac{\pi}{2} - x)^{1-\alpha}$, da cui la condizione $1-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 2$. Perciò l'integrale converge per $\alpha < 2$. D'altra parte, una primitiva di $f_\alpha(x)$ è $-2\frac{\cos^{2-\alpha} x}{2-\alpha}$ (se $\alpha \neq 2$) oppure $-2\log|\cos x|$ (se $\alpha = 2$), dunque la tesi seguirebbe anche per calcolo diretto, dando per $\alpha < 2$ il valore dell'integrale generalizzato $(-2\frac{\cos^{2-\alpha} x}{2-\alpha}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2-\alpha} > 0$.

(a.iv) L'unica questione di integrabilità si ha in $+\infty$. Per $\alpha = 0$ la funzione $f_0(x)$ (a meno della costante moltiplicativa $\sin 1 > 0$) diventa e^{2x}, ovviamente non integrabile. Se invece $\alpha > 0$ la funzione $f_\alpha(x)$ è oscillante: poiché $\sin(\alpha x + 1)$ ha una primitiva limitata (che è $-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x + 1)$), il criterio di Abel-Dirichlet ci dice che se $e^{(2-\alpha)x}$ è decrescente ed infinitesima (il che accade per $2 - \alpha < 0$, ovvero per $\alpha > 2$) allora l'integrale converge semplicemente[3], mentre se $\alpha \leq 2$ l'integrale non converge.[4] Notiamo che il calcolo di una primitiva è possibile: infatti, integrando due volte per parti[5] si ottiene $\int e^{(2-\alpha)x} \sin(\alpha x + 1)\, dx = -\frac{1}{2(\alpha^2+2\alpha+2)} e^{(2-\alpha)x} \Big(\alpha \cos(\alpha x + 1) + (\alpha - 2)\sin(\alpha x + 1)\Big)$, da cui (nell'ipotesi $\alpha > 2$) si ottiene $\int_0^{+\infty} e^{(2-\alpha)x} \sin(\alpha x + 1)\, dx = \frac{\alpha \cos 1 + (\alpha-2)\sin 1}{2(\alpha^2+2\alpha+2)} > 0$.

(a.v) L'integrabilità va controllata in 0^+ e in $+\infty$; iniziamo da 0^+. Il fattore $(x+1)^{-2\alpha} \sim_{0^+} 1$ è ininfluente; quanto a $\log(x^\alpha + 1)$, se $\alpha > 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) \sim_{0^+} x^\alpha$ (da cui la condizione $\alpha > -1$, sempre vera), se $\alpha = 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) = \log 2 \sim^*_{0^+} 1$ (integrabile), mentre se $\alpha < 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) \sim_{0^+} \log(x^\alpha) = \alpha \log x \sim^*_{0^+} \log x$ (integrabile). Perciò $f_\alpha(x)$ è sempre integrabile in 0^+. Passando ora a $+\infty$, si ha $(x+1)^{-2\alpha} \sim_{+\infty} x^{-2\alpha}$; quanto a $\log(x^\alpha + 1)$, se $\alpha > 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) \sim_{+\infty} \log(x^\alpha + 1) \sim_{+\infty} \log(x^\alpha) = \alpha \log x \sim^*_{+\infty} \log x$, se $\alpha = 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) = \log 2 \sim^*_{+\infty} 1$, e se $\alpha < 0$ si ha $\log(x^\alpha + 1) \sim_{+\infty} x^\alpha$. Pertanto, se $\alpha > 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{-2\alpha} \log x$, da cui[6] la condizione $-2\alpha < -1$, ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$; se $\alpha = 0$ si ha $f_0(x) = \log 2$ (ovviamente non integrabile a $+\infty$), mentre se $\alpha < 0$ si ha $f_\alpha(x) \sim^*_{+\infty} x^{-2\alpha} x^\alpha = x^{-\alpha}$, da cui la condizione $-\alpha < -1$, ovvero $\alpha > 1$ (sempre falsa). Perciò $f_\alpha(x)$ è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. Ricapitolando, l'integrale proposto esiste se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$. In particolare, quando $\alpha = 1$ si ottiene $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{(x+1)^2}\, dx = (-\frac{\log(x+1)}{x+1}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1}(-\frac{1}{x+1})\, dx = (0-0) + (-\frac{1}{x+1}]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$.

(b.i) (Vedi Figura 1) Poiché la funzione integranda $f(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$ è continua (dunque localmente integrabile) su tutto $\mathbb{R}$, il dominio di $F(x) = \int_{-x}^{\frac{1}{x}} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$ è $x \neq 0$; inoltre, poiché $f(t) \geq 0$, si ha $F(x) \geq 0$ se e solo se $-x \leq \frac{1}{x}$ dunque se e solo se $x > 0$. Quanto alle simmetrie, si ha $F(-x) = \int_x^{-\frac{1}{x}} \frac{t^2}{t^2+1}\, dt$; col cambio di variabile $\tau = -t$ si ottiene dunque $F(-x) = \int_{-x}^{\frac{1}{x}} \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\,(-d\tau) = \int_{\frac{1}{x}}^{-x} \frac{\tau^2}{\tau^2+1}\, d\tau = -F(x)$, dunque $F(x)$ è una funzione dispari, e

[3] in questo caso anche assolutamente, perché $e^{(2-\alpha)x}$ decresce molto rapidamente, e dunque $|f_\alpha(x)| = o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$.

[4] Il ragionamento per far vedere che l'integrale non converge possiamo farlo per ogni integrale del tipo $\int_0^{+\infty} \phi(x) \sin x\, dx$ con $\phi(x)$ continua in $[0, +\infty]$ e $|\phi(x)| \geq 1$ per ogni x. Infatti, se l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \phi(x) \sin x\, dx$ fosse finito, esso dovrebbe coincidere con la somma della serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ con $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \phi(x) \sin x\, dx$, ma tale serie non può convergere perché la successione (a_n) non è infinitesima (infatti, poiché $|\phi(x)| \geq 1$ per ogni x, e poiché $\sin x$ ha segno costante su ogni intervallo $[n\pi, (n+1)\pi]$, si ha $|a_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\phi(x)||\sin x|\, dx \geq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = 2$).

[5] con lo stesso trucco usato per calcolare l'integrale $\int e^x \sin x\, dx$.

[6] Si ricordi che la funzione $x^\beta |\log x|^\gamma$ è integrabile a $+\infty$ se $\beta < -1$, oppure se $\beta = -1$ e $\gamma < -1$.

possiamo limitarci allo studio con $x > 0$. Si ha $\lim_{x\to 0^+}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{t^2+1} = +\infty$, e $\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{0}\frac{t^2}{t^2+1} = +\infty$ (infatti $f(t)$ non è integrabile a $\pm\infty$). Derivando, si ottiene $F'(x) = \frac{(\frac{1}{x})^2}{(\frac{1}{x})^2+1}(-\frac{1}{x^2}) - \frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}(-1) = \frac{x^2-1}{x^2} = 1-\frac{1}{x^2}$: essendo $F'(x)\geq 0$ per $x\geq 1$, la funzione $F(x)$ ha un punto di minimo in $x=1$ (e, per disparità, un punto di massimo in $x=-1$). Derivando ancora, si ha $F''(x) = \frac{2}{x^3}$, dunque F è convessa per $x>0$.
Cerchiamo ora di dedurre una forma esplicita per $F(x)$. Da $F'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$ si otterrebbe immediatamente $F(x) = x+\frac{1}{x}+k$, con $k\in\mathbb{R}$ da determinare su ognuna delle due semirette $x<0$ e $x>0$; tuttavia non c'è alcun valore evidente di $F(x)$ (ad esempio, nessun punto in cui F si annulla). Non c'è dunque alternativa al trovare una primitiva di $f(t)$, il che è comunque facile perché $f(t) = 1-\frac{1}{t^2+1}$ e dunque $F(x) = (t-\operatorname{arctg} t]_{-x}^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x}+x-\operatorname{arctg} x = (x+\frac{1}{x})-(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x})$; notando che effettivamente vale $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\equiv\pm\frac{\pi}{2}$ per $x\gtrless 0$, si ha $F(x) = x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$ per $x>0$, e $F(x) = x+\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}$ per $x<0$.

(b.ii) (Vedi Figura 2). Anche qui, poiché la funzione integranda $g(t) = \log(t^2+2t+2)$ è continua e ≥ 0 su tutto $\mathbb{R}$, il dominio di $G(x) = \int_{\frac{x+2}{x^2-1}}^{-3}\log(t^2+2t+2)\,dt$ è $x\neq\mp 1$, e vale $G(x)\geq 0$ se e solo se $\frac{x+2}{x^2-1}\leq -3$, il che accade per $-1<x\leq\frac{-\sqrt{13}-1}{6}$ oppure $\frac{\sqrt{13}-1}{6}\leq x<1$. La funzione $G(x)$ non ha simmetrie evidenti (al solito, verificare calcolando $G(-x)$). Si ha $\lim_{x\to\mp\infty}G(x) = \int_0^{-3}\log(t^2+2t+2)\,dt$, che è un numero finito $\alpha<0$ per ora sconosciuto, visto che "non sappiamo calcolare" (o meglio, facciamo finta di non saper calcolare) una primitiva di $g(t)$: dunque $y=\alpha$ è asintoto orizzontale per $G(x)$. Vale poi $\lim_{x\to -1^{\mp}}G(x) = \lim_{x\to 1^{\pm}}G(x) = \int_0^{\pm\infty}\log(t^2+2t+2)\,dt$, e questi integrali generalizzati valgono $\mp\infty$ (infatti $g(t)\sim_{\pm\infty}\log(t^2) = 2\log|t|$, non integrabile a $\mp\infty$). Derivando, si ottiene $G'(x) = g(\frac{x+2}{x^2-1})\,(\frac{x+2}{x^2-1})' - g(-3)\,(-3)' = -\frac{x^2+4x+1}{(x^2-1)^2}g(\frac{x+2}{x^2-1})$: poiché $g(t)>0$ per ogni t, nel dominio si avrà $G'(x)\geq 0$ se e solo se $x^2+4x+1\geq 0$, ovvero se e solo se $x\leq -2-\sqrt{3}$ oppure $x\geq -2+\sqrt{3}$. Ne ricaviamo che $G(x)$ avrà un punto di massimo locale (negativo) in $x=-2-\sqrt{3}$, e uno di minimo locale (pure negativo) in $x=-2+\sqrt{3}$.
Cerchiamo ora di dedurre una forma esplicita per $G(x)$: integrando per parti si ottiene $\int g(t)\,dt = (t+1)\log(t^2+2t+2)+2\operatorname{arctg}(t+1)-2t$, dunque $G(x) = ((t+1)\log(t^2+2t+2)+2\operatorname{arctg}(t+1)-2t]_{\frac{x+2}{x^2-1}}^{-3}$. Chiaramente, ora si possono determinare ad esempio α e le quote degli estremi locali.

2. **(i)** L'equazione differenziale $y(x+1)y'+1-y^2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili. Si noti che una soluzione $y(x)$ non si può mai annullare (altrimenti si avrebbe $1=0$, assurdo), mentre se $x=-1$ si ottiene $1-y(-1)^2 = 0$, ovvero $y(-1)=\pm 1$. Supponendo invece $x\neq -1$ si ottiene $y' = \frac{y^2-1}{y(x+1)}$, dunque le soluzioni (vedi Figura 3) sono crescenti per $x<-1$ e ($y<-1$ oppure $0<y<1$) oppure per $x>-1$ e ($-1<y<0$ oppure $y>1$). Una costante $y(x)\equiv k$ è soluzione se e solo se $1-k^2=0$, ovvero se e solo se $k=\mp 1$. Esaminiamo ora l'eventuale parità delle soluzioni $\phi(x)$ definite in $x=0$: se $\psi(x) = \phi(-x)$, si ha $\psi(x)\,(x+1)\psi'(x)+1-\psi(x)^2 = -\phi(-x)(x+1)\phi'(-x)+1-\phi(-x)^2 = [\phi(-x)((-x)+1)\phi'(-x)+1-\phi(-x)^2]-2\phi(-x)\phi'(-x) = -2\phi(-x)\phi'(-x)$, ma quest'ultima quantità non è nulla per ogni x (a parte il caso in cui $\phi(x)$ sia una delle due soluzioni costanti ∓ 1): dunque le sole soluzioni pari sono le costanti. Se la condizione iniziale è $y(0)=1$ la soluzione cercata è la costante $y(x)\equiv 1$; se invece la condizione iniziale è $y(0)=-2$ si possono separare le variabili ottenendo $\frac{y}{y^2-1}y' = \frac{1}{x+1}$, da cui raddoppiando e integrando si ha $\log|y^2-1| = \log(x+1)^2+k$, ed imponendo $y(0)=-2$ si ha $k=\log 3$, da cui $\log|y^2-1| = \log 3(x+1)^2$, da cui $|y^2-1| = 3(x+1)^2$, da cui $y^2-1 = 3(x+1)^2$ (infatti vicino a $(x_0,y_0) = (0,-2)$ i due membri sono positivi), da cui $y^2 = 3x^2+6x+4$, da cui $y(x) = -\sqrt{3x^2+6x+4}$ (infatti $y(0)=-2$: vedi Figura 3).

(ii) L'equazione del primo ordine $(x^2-1)y'-2y = 1$ è sia lineare che a variabili separabili. Risolta come lineare, per $x\neq\pm 1$ si ottiene $y'-\frac{2}{x^2-1}y = \frac{1}{x^2-1}$; se $p(x) = -\frac{2}{x^2-1}$ si ha $P(x) = \log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$, e $\int e^{P(x)}q(x)\,dx = \int\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{\operatorname{sign}(1-x^2)}{x-1}$, da cui $y(x) = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|(\frac{\operatorname{sign}(1-x^2)}{x-1}+k) = k\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{x+1} = \frac{k(x-1)-1}{x+1}$ con $k\in\mathbb{R}$ (ove queste soluzioni sono pensate separatamente su ognuno dei tre intervalli di $\mathbb{R}\setminus\{\mp 1\}$, dunque vi sarà una costante k_1 per $x<-1$, una costante k_2 per $-1<x<1$ e una costante k_3 per $x>1$, l'una indipendente dalle altre). Il limite di tutte queste soluzioni per $x\to 1$ è sempre finito per ogni (k_1,k_2,k_3), e vale $-\frac{1}{2}$; invece, il limite per $x\to -1$ è finito se e solo se $k_1=k_2=-\frac{1}{2}$, e vale ancora $-\frac{1}{2}$, ed in tal caso per $x<1$ si ottiene la costante $y(x)\equiv -\frac{1}{2}$. Tuttavia, richiedendo la derivabilità anche in $x=1$ (con derivata nulla) si ottiene pure $k_3 = -\frac{1}{2}$. In sostanza, l'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ è la costante $y(x) = \frac{-\frac{1}{2}(x-1)-1}{x+1}\equiv -\frac{1}{2}$.
Risolviamo ora l'equazione come a variabili separabili. Si ottiene $(x^2-1)y' = 2y+1$: notata la costante $y\equiv -\frac{1}{2}$, possiamo separare le variabili e integrare ottenendo $\log|2y+1| = \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+h = \log e^h\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, da cui (posto $u=\pm e^h$) si ha $2y+1 = u\frac{x-1}{x+1}$, da cui $y(x) = u\frac{(x-1)}{2(x+1)}-\frac{1}{2}$ con $u\in\mathbb{R}$. Si tratta di una famiglia diversa da quella trovata in precedenza? Ovviamente ciò non può essere (ed infatti, con la relazione $u=2k+1$ tra le due costanti arbitrarie k e u, le due famiglie coincidono).

(iii) (Vedi Figura 4) L'equazione $(x^3+1)y'+2x^2y = \sin x$ è lineare del primo ordine, e per $x\neq -1$ può essere posta in forma normale $y'+p(x)y = q(x)$ con $p(x) = \frac{2x^2}{x^3+1}$ (dunque $P(x) = \frac{2}{3}\log|x^3+1|$) e $q(x) = \frac{\sin x}{x^3+1}$. Le sue soluzioni non possono essere poste in forma esplicita, ma applicando la formula integrale con la condizione $y(0)=\alpha$ (e pensando ovviamente $x^3+1>0$, ovvero $x>-1$) si può comunque scrivere $y(x)=(x^3+1)^{-\frac{2}{3}}(\alpha+\int_0^x (t^3+1)^{\frac{2}{3}}\frac{\sin t}{t^3+1}\,dt)$, ovvero $y(x)=\dfrac{\alpha+\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\,dt}{(x^3+1)^{\frac{2}{3}}}$.

Quando $x\to+\infty$ il denominatore tende a $+\infty$ (è asintotico a x^2), mentre il denominatore ha limite finito (infatti $\alpha\in\mathbb{R}$, e l'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\,dt$ converge grazie al criterio di Abel-Dirichlet): dunque $\lim_{x\to+\infty}y(x)=0$.

Quando invece $x\to-1^+$ il denominatore tende a 0^+, mentre al numeratore l'integrale generalizzato $\int_0^{-1}\frac{\sin t}{\sqrt[3]{t^3+1}}\,dt$ converge (infatti $(t^3+1)\sim^*_{-1^+}(t+1)$, dunque $\frac{|\sin t|}{\sqrt[3]{t^3+1}}\sim^*_{-1^+}(t+1)^{-\frac{1}{3}}$) ad un valore $U>0$ (infatti la funzione integranda è negativa su $]-1,0]$, che però viene percorso a ritroso). Ne ricaviamo che se $\alpha\gtrless -U$ allora $\lim_{x\to-1^+}y(x)=\pm\infty$. Se invece vale proprio $\alpha=-U$ si ha una forma indeterminata $\frac{0}{0}$, e con de l'Hôpital si ottiene $\lim_{x\to-1^+}y(x)=\lim_{x\to-1^+}\dfrac{\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^3+1}}}{2x^2(x^3+1)^{-\frac{1}{3}}}=\lim_{x\to-1^+}\frac{\sin x}{2x^2}=-\frac{1}{2}\sin 1<0$.

(iv) L'equazione $4y''-4y'+y=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$, del secondo ordine a coefficienti costanti, ha equazione caratteristica con radice doppia $\frac{1}{2}$, dunque lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea è $\{(A+Bx)e^{\frac{x}{2}}: A,B\in\mathbb{R}\}$. Una soluzione particolare dell'equazione completa sarà dunque della forma $\tilde{y}(x)=x^2(ax+b)e^{\frac{x}{2}}$, con $a,b\in\mathbb{R}$ da determinare: si ha allora $\tilde{y}'(x)=(\frac{a}{2}x^3+(3a+\frac{b}{2})x^2+2bx)e^{\frac{x}{2}}$ e $\tilde{y}''(x)=(\frac{a}{4}x^3+(3a+\frac{b}{4})x^2+2(3a+b)x+2b)e^{\frac{x}{2}}$, da cui la condizione $4\tilde{y}''-4\tilde{y}'+\tilde{y}=8(3ax+b)e^{\frac{x}{2}}=(x+1)e^{\frac{x}{2}}$, che dà $a=\frac{1}{24}$ e $b=\frac{1}{8}$. L'integrale generale dell'equazione completa è pertanto $\{y(x)=(A+Bx+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{24}x^3)e^{\frac{x}{2}}: A,B\in\mathbb{R}\}$. Derivando si ottiene $y'(x)=(\frac{A}{2}+B+(\frac{1}{4}+\frac{B}{2})x+\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{48}x^3)e^{\frac{x}{2}}$, dunque la condizione $y(0)=-2y'(0)$ dà $A=-2(\frac{A}{2}+B)=-A-2B$, da cui $B=-A$: le soluzioni cercate sono pertanto quelle dell'integrale generale con $B=-A$.

(v) L'equazione differenziale $y'''+\alpha x^2y'+8y=\frac{1}{x+1}$ è lineare, del terzo ordine, in forma normale. Essa è infatti del tipo $y'''+a_2(x)\,y''+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=b(x)$, ove le funzioni $a_2(x)=0$, $a_1(x)=ax^3$, $a_0(x)=8$ e $b(x)=\frac{1}{x+1}$ sono tutte continue nel dominio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, e andrà dunque risolta indipendentemente in uno dei due intervalli $I=]-\infty,-1[$ oppure $J=]-1,+\infty[$. Su ognuno di essi (ad esempio su I), l'integrale generale S_0 dell'equazione omogenea associata $y'''+\alpha x^2y'+8y=0$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 3 nello spazio vettoriale complesso $V=\mathcal{C}^3(I,\mathbb{C})$ (le funzioni $I\to\mathbb{C}$ di classe $\mathcal{C}^3$), dunque sarà generato da una terna di funzioni (*sistema fondamentale*) $\{\varphi_1(x),\varphi_2(x),\varphi_3(x)\}\subset V$; invece l'integrale generale S dell'equazione completa sarà un sottospazio affine di V, ottenuto traslando S_0 tramite una qualsiasi soluzione particolare $\tilde{\varphi}(x)\in S$, ovvero $S=\{A\varphi_1(x)+B\varphi_2(x)+C\varphi_3(x)+\tilde{\varphi}(x): A,B,C\in\mathbb{C}\}$. Si noti che le soluzioni saranno funzioni di classe $\mathcal{C}^3$ definite su *tutto* I (la stessa cosa, poi, varrà indipendentemente per J).

Se $\alpha=0$, l'equazione $y'''+8y=\frac{1}{x+1}$ diventa a coefficienti costanti reali. L'equazione caratteristica è $\lambda^3+8=0$, cioè $\lambda^3=-8$, che ha le tre radici -2 e $1\pm i\sqrt{3}$: un sistema fondamentale di soluzioni è pertanto $\{\varphi_1(x)=e^{-2x},\ \varphi_2(x)=e^{(1+i\sqrt{3})x},\ \varphi_3(x)=e^{(1-i\sqrt{3})x}\}$.[7] Per cercare una soluzione particolare $\tilde{\varphi}(x)\in S$, in questo caso si deve ricorrere al metodo della Variazione delle Costanti Arbitrarie. Si ha $W_\varphi(x)=\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{(1+i\sqrt{3})x} & e^{(1-i\sqrt{3})x} \\ -2e^{-2x} & (1+i\sqrt{3})e^{(1+i\sqrt{3})x} & (1-i\sqrt{3})e^{(1-i\sqrt{3})x} \\ 4e^{-2x} & 2(-1+i\sqrt{3})e^{(1+i\sqrt{3})x} & 2(-1-i\sqrt{3})e^{(1-i\sqrt{3})x}\end{pmatrix}$, da cui risulta $\det W_\varphi(x)=-24\sqrt{3}\,i$: pertanto sarà $\tilde{\varphi}(x)=\gamma_1(x)\,e^{-2x}+\gamma_2(x)\,e^{(1+i\sqrt{3})x}+\gamma_3(x)\,e^{(1-i\sqrt{3})x}$, con $\gamma_1(x)=\int\frac{-2\sqrt{3}\,i\,e^{2x}}{-24\sqrt{3}\,i(x+1)}\,dx$, $\gamma_2(x)=-\int\frac{(3-\sqrt{3}\,i)\,e^{(-1-i\sqrt{3})x}}{-24\sqrt{3}\,i(x+1)}\,dx$ e $\gamma_3(x)=\int\frac{(3+\sqrt{3}\,i)\,e^{(-1+i\sqrt{3})x}}{-24\sqrt{3}\,i(x+1)}\,dx$.

3. **(i)** (Vedi Figura 5) La curva S è ovviamente il segmento chiuso nel piano cartesiano che congiunge i punti $(0,-\frac{1}{2})$ e $(2,\frac{1}{2})$, parametrizzabile cartesianamente tramite $\gamma:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ data da $\gamma(x)=(x,\frac{x-1}{2})$. Invece l'equazione polare $\rho(\theta)=\frac{3}{3-2\cos\theta}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$ è, come noto, un'ellisse (si noti che l'eccentricità è $e=\frac{2}{3}<1$), e la parametrizzazione associata di C è $\varphi:[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{3}]\to\mathbb{R}^2$ data da $\varphi(\theta)=(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)=(\frac{3\cos\theta}{3-2\cos\theta},\frac{3\sin\theta}{3-2\cos\theta})$; nel nostro caso, si tratta dunque dell'arco corto di ellisse che congiunge i punti $\varphi(\frac{\pi}{2})=(0,1)$ e $\varphi(\frac{5\pi}{3})=(\frac{3}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4})$.

Vale $\gamma'(x)=(1,\frac{1}{2})$, dunque la retta ortogonale a S in $(1,0)=\gamma(1)$ è $\{(1,0)+\lambda(\frac{1}{2},-1):\lambda\in\mathbb{R}\}=\{(1+\frac{1}{2}\lambda,\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$; da $y=-\lambda$ e $x=1+\frac{1}{2}\lambda$ si ricava anche l'equazione cartesiana $2x+y-2=0$. Si ha poi $\varphi'(\theta)=(-\frac{9\sin\theta}{(3-2\cos\theta)^2},-\frac{3(2-3\cos\theta)}{(3-2\cos\theta)^2})$, pertanto un vettore tangente a C nel suo punto $\varphi(\frac{3\pi}{2})=(0,-1)$ è $\varphi'(\frac{3\pi}{2})=(1,-\frac{2}{3})$, dunque la retta tangente a C in $\varphi(\frac{3\pi}{2})$ è $\{(0,-1)+\lambda(1,-\frac{2}{3}):\lambda\in\mathbb{R}\}=\{(\lambda,-1-\frac{2}{3}\lambda):\lambda\in\mathbb{R}\}$; anche qui, da $x=\lambda$ e $y=-1-\frac{2}{3}\lambda$ si ricava l'equazione cartesiana $2x+3y+3=0$.

Per ottenere l'equazione polare di S basta partire dalla sua equazione cartesiana: da $x-2y-1=0$ si ricava

[7] Per avere una base di soluzioni reali, volendo si possono rimpiazzare $\varphi_2(x)$ e $\varphi_3(x)$ rispettivamente con $\frac{\varphi_2(x)+\varphi_3(x)}{2}=e^x\cos(\sqrt{3}\,x)$ e $\frac{\varphi_2(x)-\varphi_3(x)}{2i}=e^x\sin(\sqrt{3}\,x)$. Ma per i conti che seguono, in cui interviene il Wronskiano, conviene forse tenersi la base complessa.

$\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta - 1 = 0$, da cui $\rho(\theta) = \frac{1}{\cos\theta - 2\sin\theta}$, con $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}$. La parametrizzazione associata di S è $\tilde{\gamma} : [-\frac{\pi}{2}, \mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}] \to \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\gamma}(\theta) = (\frac{\cos\theta}{\cos\theta - 2\sin\theta}, \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 2\sin\theta})$, ed il cambio di parametro $\alpha : [-\frac{\pi}{2}, \mathrm{arctg}\,\frac{1}{4}] \to [0, 2]$ è $x = \alpha(\theta) = \frac{\cos\theta}{\cos\theta - 2\sin\theta}$. Infine, dall'equazione polare $\rho(\theta) = \frac{3}{3 - 2\cos\theta}$ di C si ricava $3\rho - 2\rho\cos\theta = 3$, da cui $3\sqrt{x^2 + y^2} = 2x + 3$, da cui elevando al quadrato (nell'ipotesi $x > -\frac{3}{2}$) l'equazione cartesiana $5x^2 + 9y^2 - 12x - 9 = 0$. Dalla figura è chiaro che si può esprimere C come curva grafico $x = x(y)$ (non viceversa!), e la funzione $x(y)$ si ricava esplicitando opportunamente x dall'equazione cartesiana appena trovata: si ottiene infatti $x = \frac{3}{5}(2 \pm \sqrt{9 - 5y^2})$, e va scelto il ramo "sinistro", ovvero $x = \frac{3}{5}(2 - \sqrt{9 - 5y^2})$, con $-\frac{3\sqrt{3}}{4} \le y \le 1$. La relativa parametrizzazione è $\tilde{\varphi} : [-\frac{3\sqrt{3}}{4}, 1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\tilde{\varphi}(y) = (\frac{3}{5}(2 - \sqrt{9 - 5y^2}), y)$; il cambio di parametro $\beta : [-\frac{3\sqrt{3}}{4}, 1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}]$ è $\theta = \beta(y)$ ottenuta invertendo la funzione $y = y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = \frac{3\sin\theta}{3 - 2\cos\theta}$.

(ii) (Vedi Figura 6) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0,\ x + y \le -3\}$ è la semicirconferenza di centro $(-1, -2)$ e raggio $\sqrt{5}$ che sta sotto la retta $y = -x - 3$, mentre $B = \{(x, y) : 2x + e^y = 1,\ |y| \le 2\}$ è il tratto di grafico della funzione $x(y) = \frac{1 - e^y}{2}$ con $-2 \le y \le 2$. Una parametrizzazione conveniente di A è senz'altro $\gamma : [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (-1 + \sqrt{5}\cos t, -2 + \sqrt{5}\sin t)$, e una di B è $\varphi : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(y) = (\frac{1 - e^y}{2}, y)$.
Per A, si ha $\gamma'(t) = (-\sqrt{5}\sin t, \sqrt{5}\cos t)$, e $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{5}$: dunque $d\sigma = \sqrt{5}\,dt$, la lunghezza è ovviamente $L_A = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sqrt{5}\,dt = \pi\sqrt{5}$, il baricentro geometrico è $(x_A, y_A) = (\frac{1}{L_A}\int_\gamma x\,d\sigma, \frac{1}{L_A}\int_\gamma y\,d\sigma) = (\frac{1}{\pi\sqrt{5}}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (-1 + \sqrt{5}\cos t)\sqrt{5}\,dt, \frac{1}{\pi\sqrt{5}}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (-2 + \sqrt{5}\sin t)\sqrt{5}\,dt) = (-1 - \frac{\sqrt{10}}{\pi}, -2 - \frac{\sqrt{10}}{\pi})$, e l'integrale è $\int_\gamma f\,d\sigma = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \Big[(-1 + \sqrt{5}\cos t)^2(-2 + \sqrt{5}\sin t) - 1\Big]\sqrt{5}\,dt$ (si calcola facilmente).

Quanto a B, si ha $\varphi'(y) = (-\frac{e^y}{2}, 1)$, e $\|\varphi'(y)\| = \sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}$: dunque $d\sigma = \sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}\,dy$, la lunghezza è $L_B = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}\,dy$, il baricentro geometrico risulta

$$(x_B, y_B) = (\frac{1}{L_B}\int_\varphi x\,d\sigma, \frac{1}{L_B}\int_\varphi y\,d\sigma) = (\frac{1}{L_B}\int_{-2}^{2}(\frac{1 - e^y}{2})\sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}\,dy, \frac{1}{L_B}\int_{-2}^{2} y\sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}\,dy),$$

e $\int_\gamma f\,d\sigma = \int_{-2}^{2}\Big[(\frac{1 - e^y}{2})^2 y - 1\Big]\sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}\,dy$ (si può provare a calcolare questi integrali ponendo $\tau = \sqrt{1 + \frac{e^{2y}}{4}}$).

(iii) (Vedi Figura 7) Γ è la curva nello spazio ottenuta intersecando il piano $x + y + z = 0$ con la cubica $y = \frac{1}{3}x^3$ (invariante rispetto z) nel settore in cui $0 \le x \le 2$. Poiché $y = \frac{1}{3}x^3$ e $z = -x - y = -\frac{1}{3}x^3 - x$, è chiaro che Γ è parametrizzata come curva-grafico da $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(x) = (x, \frac{1}{3}x^3, -x - \frac{1}{3}x^3)$. Dall'equazione $3y = x^3$ si ricava (in coordinate cilindriche) $3\rho\sin\theta = \rho^3\cos^3\theta$, da cui $\rho(\theta) = \frac{\sqrt{3\mathrm{tg}\,\theta}}{\cos\theta}$; il punto finale della curva è $(2, \frac{8}{3}, -\frac{14}{3})$, ed è ottenuto quando $\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{\frac{8}{3}}{2} = \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$; si ha pertanto la parametrizzazione alternativa $\tilde{\gamma} : [0, \mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}] \to \mathbb{R}^3$ data da $\tilde{\gamma}(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta, z(\theta)) = (\sqrt{3\mathrm{tg}\,\theta}, \mathrm{tg}\,\theta\sqrt{3\mathrm{tg}\,\theta}, -(1 + \mathrm{tg}\,\theta)\sqrt{3\mathrm{tg}\,\theta})$. Il cambio di parametro è $x = \alpha(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = \sqrt{3\mathrm{tg}\,\theta}$. Usando ad esempio $\gamma(x)$, si ha $\gamma'(x) = (1, x^2, -1 - x^2)$, da cui $\|\gamma'(x)\| = \sqrt{1 + x^4 + (-1 - x^2)^2} = \sqrt{2(1 - x^2 + x^4)}$: la lunghezza di Γ è dunque espressa da $L_\Gamma = \int_0^2 \sqrt{2(1 - x^2 + x^4)}\,dx$. Supponiamo ora che la densità di massa di Γ evolva con la legge $\delta(x, y, z) = ax + by + c \ge 0$ per certi $a, b, c \in \mathbb{R}$: in termini del parametro x ciò significa dunque $\delta(x) = ax + \frac{1}{3}bx^3 + c$. La massa di Γ risulta dunque $m_\Gamma = \int_\gamma \delta\,d\sigma = \int_0^2 (ax + \frac{1}{3}bx^3 + c)\sqrt{2(1 - x^2 + x^4)}\,dx$, ed il momento d'inerzia di Γ rispetto all'asse z è $\mathcal{I}_z = \int_\gamma \delta\cdot(x^2 + y^2)\,d\sigma = \int_0^2 (ax + \frac{1}{3}bx^3 + c)(x^2 + \frac{1}{9}x^6)\sqrt{2(1 - x^2 + x^4)}\,dx$.

4. **(a.i)** La funzione $f(x, y) = \frac{\sqrt{y^2 - 2x} - x}{x - y - 4}$ non è definita nei punti della retta $y = x - 4$ e nei punti strettamente interni alla parabola $x = \frac{1}{2}y^2$. Il numeratore è ≥ 0 (nel dominio) quando $\sqrt{y^2 - 2x} \ge x$: se $x < 0$ ciò è sempre vero, altrimenti per $x \ge 0$ equivale a $y^2 - 2x \ge (x)^2 = x^2$, ovvero $x^2 - y^2 + 2x \le 0$, ovvero i punti compresi tra l'asse y e il ramo destro dell'iperbole equilatera di centro $(-1, 0)$, asintoti $y = \pm(x + 1)$ e passante per $(0, 0)$; invece il numeratore è > 0 sotto la retta $y = x - 4$. La combinazione dei due segni dà il segno globale di f. La funzione non è limitata (diverge a $\pm\infty$ tendendo ai punti di $y = x - 4$), ed è ovunque continua nel dominio. Per continuità, il limite in $(2, 2)$ è $f(2, 2) = \frac{1}{2}$. Tendendo a $(8, 4)$ (che non sta nel dominio) la funzione tende chiaramente a $\pm\infty$ (infatti il numeratore tende a -8, e il denominatore è infinitesimo). Tendendo a $(\frac{8}{5}, -\frac{12}{5})$ (che pure non sta nel dominio, ed è l'intersezione tra $y = x - 4$ e l'iperbole) lungo la stessa iperbole, sulla quale f è nulla, il limite di f è ovviamente 0, mentre in ogni intorno del punto vi sono altri punti della retta $y = x - 4$, nei quali f diverge: dunque il limite di f non esiste. Infine, tendendo a ∞_2 sempre lungo l'iperbole il limite è 0, e tendendovi lungo una qualsiasi curva asintotica a $y = x - 4$ la funzione diverge: dunque nemmeno questo limite esiste.

(a.ii) La funzione $f(x, y) = \mathrm{arctg}\,(|2x + y - 1| - y) - 1$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$; si ha $f \ge 0$ per $\mathrm{arctg}\,(|2x + y - 1| - y) \ge 1$, ovvero $|2x + y - 1| - y \ge \mathrm{tg}\,1$, ovvero $|2x + y - 1| \ge y + \mathrm{tg}\,1$: se $y < -\mathrm{tg}\,1$ ciò è sempre vero, mentre se $y \ge -\mathrm{tg}\,1$ ciò equivale a $2x + y - 1 \ge y + \mathrm{tg}\,1$ oppure $2x + y - 1 \le -(y + \mathrm{tg}\,1)$, ovvero $x \ge \frac{\mathrm{tg}\,1 + 1}{2}$ oppure $y \le -x - \frac{\mathrm{tg}\,1 - 1}{2}$. Poiché l'arco-tangente ha valori in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, vale $-\frac{\pi}{2} - 1 \le f(x, y) \le \frac{\pi}{2} - 1$, dunque f è limitata. Per continuità, il limite in $(0, 0)$ vale $f(0, 0) = \mathrm{arctg}\,1 - 1 = \frac{\pi}{4} - 1 < 0$; poi, prendendo ispirazione dallo studio del segno, tendendo a ∞_2 lungo l'asse y si ha $\lim_{y \to +\infty} f(0, y) = -\frac{\pi}{4} - 1 < 0$ e $\lim_{y \to -\infty} f(0, y) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$, dunque il limite non esiste.

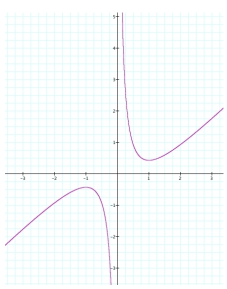
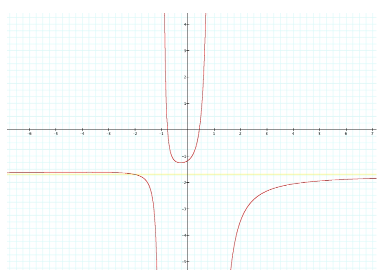
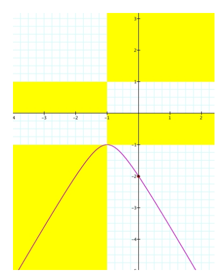
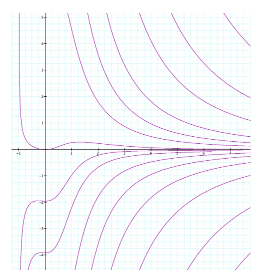
(a.iii) La funzione $f(x,y)=\left(\frac{xy+\sin xy}{x^2+y^2}, |y|-e^{-|x|}\right)$ (a valori in $\mathbb{R}^2$) è definita e continua su tutto $\mathbb{R}^2$ tranne $(0,0)$. La prima componente $f_1(x,y)=\frac{xy+\sin xy}{x^2+y^2}$ è ≥ 0 quando $xy\geq -\sin xy$, ed essendo $t\geq -\sin t$ se e solo se $t\geq 0$, ne ricaviamo che $f_1=0$ sugli assi e $f_1>0$ nel primo e terzo quadrante. La seconda componente $f_2(x,y)=|y|-e^{-|x|}$ è ≥ 0 quando $|y|\geq e^{-|x|}$, ed essendo questa una condizione simmetrica rispetto ai due assi basta operare la doppia riflessione dell'insieme $y\geq e^{-x}$ nel primo quadrante. La funzione f_1 è limitata, perché se $(x,y)\neq(0,0)$ si ha $|f_1(x,y)|=\frac{|xy+\sin xy|}{x^2+y^2}\leq\frac{|xy|+|\sin xy|}{x^2+y^2}\leq\frac{|xy|+|xy|}{x^2+y^2}=\frac{2|xy|}{x^2+y^2}\leq 2\frac{1}{2}=1$; invece f_2 non lo è, perché ad esempio sull'asse y si ha $\lim_{y\to\infty} f_2(0,y)=+\infty$. In $(0,0)$ la funzione f_2 tende a -1, mentre f_1 non ha limite: infatti sugli assi è nulla, mentre sulla bisettrice $y=x$ essa vale $f_1(x,x)=\frac{x^2+\sin x^2}{2x^2}$, con limite 1. Pertanto f non ha limite in $(0,0)$. In $(-1,\pi)$, per continuità il limite è $f(-1,\pi)=(-\frac{\pi}{\pi^2+1},\pi-\frac{1}{e})$. Infine, né f_1 né f_2 hanno limite in ∞_2 (ad esempio, $\lim_{x\to\infty} f_1(x,0)=0$ mentre $\lim_{x\to\infty} f(x,x)=\frac{1}{2}$; e $\lim_{x\to\infty} f_2(x,0)=0$ mentre $\lim_{y\to\infty} f(0,y)=+\infty$), dunque nemmeno f ha limite in ∞_2.

(b.i) (Figura 8) A è chiuso (disuguaglianze late di funzioni continue su $\mathbb{R}^2$), ma non è limitato (infatti tutto il semiasse $\{(x,0):x>0\}$ vi è contenuto), dunque non è compatto; infine, è connesso per archi.

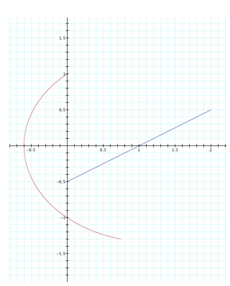
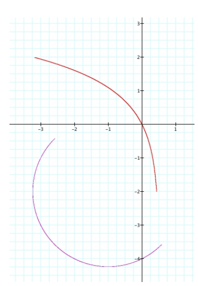
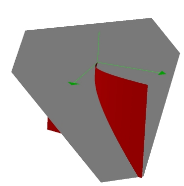
(b.ii) (Figura 9) B è l'intersezione tra la superficie dell'ellissoide di centro $(0,0,3)$ e semiassi $2,\sqrt{2},2$ rispettivamente lungo x,y,z, e i due semispazi $x<-1$ e $x>1$: esso non è aperto (non è intorno dei suoi punti in $\mathbb{R}^3$) e nemmeno chiuso (i punti di intersezione tra la superficie e i piani $x=\pm1$ sono di accumulazione per B, ma non stanno in B), è limitato (infatti è contenuto nell'ellissoide, dunque $|x|\leq 2$, $|y|\leq\sqrt{2}$ e $|z-3|\leq 2$, ovvero $1\leq z\leq 5$), non è compatto perché non è chiuso, e non è connesso (ha due componenti).

(b.iii) (Figura 10) C è aperto (disuguaglianze strette di funzioni continue su $\mathbb{R}^2$) e limitato (infatti $|x|<3$, e dunque $|y-1|<e^3$, ovvero $1-e^3<y<1+e^3$), non è compatto perché non è chiuso, ed è connesso.

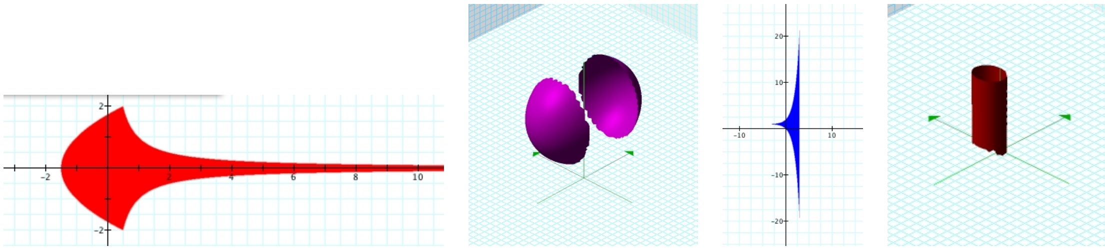
(b.iv) (Figura 11) La condizione $3x^2+2y^2+2x=0$, in $\mathbb{R}^3$, descrive la superficie cilindrica a sezione ellittica con asse parallelo all'asse z che ha sezione sul piano (x,y) l'ellisse con asse maggiore sull'asse x, tra $x=-\frac{2}{3}$ e $x=0$, e asse minore lungo la retta $x=-\frac{1}{3}$ tra $y=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ e $y=\frac{1}{\sqrt{6}}$. D'altra parte, la condizione $z+1+\sqrt{x+2z}>0$, che richiede $z\geq-\frac{x}{2}$, equivale a $\sqrt{x+2z}>-z-1$; se $-z-1<0$ (ovvero $z>-1$) ciò è sempre vero, mentre se $z\leq -1$ ciò equivale a $x+2z>z^2+2z+1$, ovvero $x>z^2+1$. Dunque D è l'intersezione tra la superficie cilindrica e il semispazio chiuso $z\geq\frac{x}{2}$, e risulta dunque essere chiuso. Esso non è limitato in direzione z, dunque non è compatto; ed è connesso per archi.

1. La funzione integrale $F(x)$ di (1.(b.i)); **2.** La funzione integrale $G(x)$ di (1.(b.ii)); **3.** Le zone di crescenza (gialle) e la soluzione di (2.i) con $y(0)=-2$; **4.** L'integrale generale di (2.iii).

5. Le curve S e C di (3.i); **6.** Le curve A e B di (3.ii); **7.** La curva Γ di (3.iii), intersezione del piano grigio con la curva rossa.



8-9-10-11. Gli insiemi A, B, C e D di (4.b).