

# Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

## Esercizi di ricapitolazione n. 2

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

mercoledì 10 giugno 2009

---

Questi esercizi, riassuntivi della seconda parte del corso, sono proposti come preparazione alla II<sup>a</sup> prova parziale e alle prove d'esame scritto. Le risoluzioni saranno date, per quanto possibile, nella lezione di venerdì 12/6.

---

1. Disegnare e descrivere i seguenti insiemi usando sistemi di coordinate alternativi.

- (i)  $A = \{(x, y) : 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x, |y| \leq x\}$ ;
- (ii)  $B = \{(x, y, z) : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2, 0 \leq 2y \leq x, z > 0\}$ ;
- (iii)  $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, x < 0, 0 < z < 2 - x\}$ ;
- (iv)  $D = \{(x, y) : y = x^2 - 1, -1 < x \leq 2\}$ .

2. Siano  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) : x \geq \sqrt{2}, x|y| \leq 2\}$  e  $f(x, y) = \arctg((x - 1)y^2)$ . Disegnare  $A$ ; dimostrare che  $f$  ammette massimo e minimo assoluti su  $A$ , e calcolarli.

3. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x, y) = (x + 1)y$ . Determinare i punti di estremo (locale, e se possibile assoluto) di  $f$  su  $\mathbb{R}^2$ , sulla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ , sull'arco di parabola  $\{(x, y) : y = x^2 - 5, -2 \leq x \leq 3\}$  e sull'insieme  $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 + 2y, x \leq 0\}$ .

4. Sia  $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $g(x, y, z) = (xz + y^2 - 1, 3xyz, 2x^2z - 1)$ .

- (i) Trovare la forma parametrica e cartesiana della retta di  $\mathbb{R}^3$  passante per il punto  $(1, 0, -1)$  e parallela al vettore  $\frac{\partial g}{\partial (1, 0, -1)}(0, 2, -1)$ .
- (ii) In quali punti di  $\mathbb{R}^3$  la funzione  $g$  è un diffeomorfismo locale? Scrivere lo sviluppo al primo ordine della funzione inversa locale di  $g$  nel punto  $(-1, 0, 1)$ .
- (iii) Dall'equazione  $z + e^{xy} + g_1(x, y, z) = 0$  quale tra le variabili può essere esplicitata rispetto alle altre due all'intorno della soluzione  $(0, 2, -4)$ ? Scelta una variabile rispetto cui ciò è possibile, calcolare il suo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine.
- (iv) Dal sistema formato dalle equazioni  $g_1(x, y, z) = e^x - 1$  e  $g_2(x, y, z) = x^3$  quali due variabili si possono esplicitare rispetto alla terza all'intorno della soluzione  $(0, 1, 1)$ ?
- (v) Quali insiemi di livello della funzione  $g_1$  sono varietà in  $\mathbb{R}^3$ ? Di che dimensione? Determinare l'equazione cartesiana dello spazio affine tangente all'insieme di livello  $M_1$  di  $g_1$  nel punto  $(2, 0, -1)$ .
- (vi) Quali insiemi di livello della funzione  $(g_1, g_2)$  sono varietà in  $\mathbb{R}^3$ ? Di che dimensione? Determinare l'equazione cartesiana dello spazio affine tangente all'insieme di livello  $M_2$  di  $(g_1, g_2)$  nel punto  $(2, 0, -1)$ . Rispetto a (v), notare che...
- (vii) Determinare gli estremi locali della funzione  $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$  su  $M_1$  e  $M_2$ .

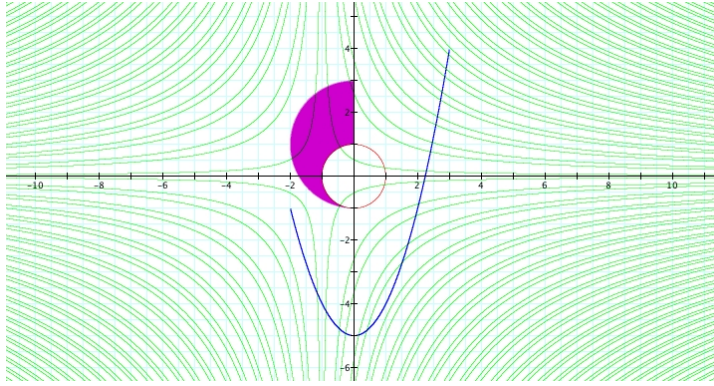
5. Descrivere in più modi: (i) il tratto di circonferenza di centro  $(1, 1)$  e raggio  $\sqrt{2}$  che sta nel primo quadrante di  $\mathbb{R}^2$ , (ii) lo spicchio della superficie sferica di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $r > 0$  che sta in  $\{(x, y, z) : \frac{r}{2} < x < r, 0 < y < x\}$ , e (iii) il settore di paraboloide circolare  $z = x^2 + y^2 - 1$  che sta in  $\{(x, y, z) : x > 0, y < 0, z < 1\}$ , e calcolare in ciascuno dei modi lo spazio tangente in un punto a scelta.

## Soluzioni.

1. (i)  $A$  è la parte di piano racchiusa tra le due circonferenze di centro  $(1, 0)$  e  $(2, 0)$  e passanti per  $(0, 0)$ , e compresa tra le semirette  $y = -x$  e  $y = x$  con  $x \geq 0$ . In coordinate polari esso diventa  $\{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 2 \cos \theta \leq \rho \leq 4 \cos \theta\}$ .  
 (ii)  $B$  è la parte del semispazio  $z > 0$  racchiusa tra le sfere centrate in  $(0, 0, 0)$  di raggio 1 e  $\sqrt{2}$ , e compresa nel cuneo  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ . In coordinate sferiche è  $\{(x, y, z) = (\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 1 < \rho < \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\}$ .  
 (iii)  $C$  è la porzione di superficie cilindrica di asse parallelo all'asse  $z$  e sezione circolare  $x^2 + y^2 = 4$  che sta nel quarto di spazio  $\{x < 0, z > 0\}$  e sotto il piano  $z = 2 - x$ . In coordinate cilindriche è  $\{(x, y, z) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}, 0 < z < 2(1 - \cos \theta)\}$ .  
 (iv)  $D$  è il tratto della parabola  $y = x^2 - 1$  con  $-1 < x \leq 2$ . In coordinate polari esso è  $\{(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho = \frac{\sin \theta + \sqrt{4 - 3 \sin^2 \theta}}{2 \cos^2 \theta}, -\pi < \theta \leq \arctg \frac{2}{3}\}$ .  
 2.  $A$  è l'unione del disco chiuso di centro  $(0, 0)$  e raggio 2 e del settore di piano in cui  $x \geq \sqrt{2}$  e  $-\frac{2}{x} < y < \frac{2}{x}$ . Esso è chiuso ma non è limitato (infatti è illimitato in direzione  $x$ ), dunque non è compatto. Tuttavia, quando  $(x, y)$  tende a  $\infty_2$  restando in  $A$  si ha  $|y| \leq \frac{2}{x}$  e  $x \rightarrow +\infty$ , dunque  $|f(x, y)| = \arctg(|x - 1|y^2) \leq \arctg(|x - 1|(\frac{2}{x})^2) = \arctg(\frac{4|x-1|}{x^2}) \rightarrow 0$ , dunque  $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty_2, (x,y) \in A} f(x, y) = 0$ ; inoltre, ad esempio,  $f(0, 1) = -\frac{\pi}{4} < 0$  e  $f(2, 1) = \frac{\pi}{4} > 0$ . Si è già visto che tutto ciò, assieme alla continuità di  $f$ , implica quanto affermato (per definizione di limite, esiste  $M > 0$  tale che se  $(x, y) \in A$  e  $\|(x, y)\| > M$  allora  $|f(x, y)| < \frac{\pi}{4}$ ; ma allora ci si può ricondurre al compatto  $\{(x, y) \in A : \|(x, y)\| \leq M\}$ , ...). Per la ricerca degli estremi, iniziamo dall'aperto dei punti interni di  $A$ , in cui si possono studiare le derivate: i punti stazionari sono tutti quelli sull'asse  $x$ , ovvero del tipo  $(x_0, 0)$ , in cui l'hessiano è semidefinito, positivo o negativo a seconda che  $x_0 > 1$  oppure  $x_0 < 1$ . D'altra parte  $f$  è identicamente nulla su tutto l'asse, e uno studio locale del segno fa capire facilmente che  $(1, 0)$  è un punto di sella e  $(x_0, 0)$  è un punto di massimo/minimo locale non stretto se  $x_0 \geq 1$ : in ogni caso, nessuno di questi punti è tra quelli in cui  $f$  assume gli estremi assoluti. Nei punti speciali  $(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$  si ha  $f(\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}) = \arctg(2(\sqrt{2} - 1)) \sim 0,69$ . Nei rami di iperbole  $y = \pm\frac{2}{x}$  con  $x > \sqrt{2}$  si ha  $F(x) = f(x, \frac{2}{x}) = \arctg(\frac{4(x-1)}{x^2})$ , con  $F'(x) = 4 \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} \frac{1}{1 + (\frac{4(x-1)}{x^2})^2} = 4 \frac{x(2-x)}{x^4 + 16(x-1)^2}$ : si hanno dunque massimi locali sui rami nei punti  $(2, \pm 1)$ , con valore  $F(2) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \sim 0,78$ . Infine, parametrizzando il tratto di circonferenza con  $\gamma : ]\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\gamma(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$  si ha  $F(\theta) = f(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = \arctg(4(2 \cos \theta - 1) \sin^2 \theta)$ ; si ha dunque  $F(\theta) \geq 0$  se e solo se  $\frac{\pi}{4} < \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $\theta = \pi$  oppure  $\frac{5\pi}{3} \leq \theta < \frac{7\pi}{4}$ , mentre dai conti si ricava che  $F'(\theta) \geq 0$  se e solo se  $\sin \theta (\cos \theta - \frac{1+\sqrt{13}}{6})(\cos \theta - \frac{1-\sqrt{13}}{6}) > 0$ . Notiamo che  $\frac{1+\sqrt{13}}{6} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , dunque  $\arccos \frac{1+\sqrt{13}}{6}$  non sta nell'arco che stiamo trattando, in cui sta invece  $\theta_0 = \arccos \frac{1-\sqrt{13}}{6} \sim 2$ : pertanto  $F(\theta)$  assume un massimo in  $\theta = \pi$  (ove è nulla, perché  $\gamma(\pi) = (-2, 0)$  è sull'asse  $x$ ) ed un minimo in  $\theta = \theta_0$  e  $\theta = 2\pi - \theta_0$ , che vale  $F(\theta_0) \sim -1,4$ .  
 Ricapitolando, la funzione  $f$  ha minimo assoluto  $F(\theta_0) \sim -1,4$  assunto nei punti  $\gamma(\theta_0) = (\frac{1-\sqrt{13}}{3}, \frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3})$  e  $\gamma(2\pi - \theta_0) = (\frac{1-\sqrt{13}}{3}, -\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{3})$  della circonferenza  $x^2 + y^2 = 4$ , e massimo assoluto  $\frac{\pi}{4} \sim 0,78$  assunto nei punti  $(2, \pm 1)$  sui rami di iperbole  $y = \pm\frac{2}{x}$ .  
 3. I risultati di questo esercizio si comprenderanno meglio osservando la figura che segue.

• Nell'aperto  $\mathbb{R}^2$  la funzione ha differenziale  $df_{(x,y)} = (y, x+1)$ , che si annulla solo in  $A(-1, 0)$ ; tuttavia, essendo  $H_f(-1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  indefinita, il punto  $A$  è solo una sella per  $f$  (è evidente: il grafico di  $f$ , traslato e ruotato, è il solito paraboloide iperbolico). Dunque la funzione non ha estremi locali su tutto  $\mathbb{R}^2$ . • Sulla circonferenza data da  $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ , che è una varietà di  $\mathbb{R}^2$ , applichiamo il metodo di Lagrange: imponendo che il rango della matrice  $(\nabla f, \nabla g)$  sia  $\leq 1$  si ottiene  $2y^2 - 2x(x+1) = 0$ , che in sistema con  $g(x, y) = 0$  dà le soluzioni  $A(-1, 0)$  (attesa: infatti, come visto,  $A$  è già un punto stazionario per  $f$  su tutto  $\mathbb{R}^2$ ),  $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . Per capire il carattere di  $A$ ,  $B$  e  $C$ , possiamo parametrizzare la circonferenza nel modo usuale, tramite  $\gamma : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da  $\gamma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$  (si noti che  $A = \gamma(\pi)$ ,  $B = \gamma(\frac{\pi}{3})$  e  $C = \gamma(\frac{5\pi}{3})$ ): si ha allora  $F(\theta) = f(\gamma(\theta)) = \sin \theta (1 + \cos \theta)$ , da cui  $F'(\theta) = (1 + \cos \theta)(2 \cos \theta - 1)$ . Poiché  $F'(\pi) = F'(\frac{\pi}{3}) = F'(\frac{5\pi}{3}) = 0$  (come previsto) e  $F'(\theta) > 0$  per  $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$  e  $\frac{5\pi}{3} < \theta < 2\pi$ , ne ricaviamo che  $A$  è un semplice flesso orizzontale anche sulla circonferenza, mentre  $B$  e  $C$  sono rispettivamente un punto di massimo e minimo locale (in realtà assoluto, per compattezza: in essi la funzione vale  $f(B) = \frac{3\sqrt{3}}{4} = -f(C)$ ). • L'arco di parabola  $\{(x, y) : y = x^2 - 5, -2 \leq x \leq 3\}$  è una varietà con bordo compatta, dunque  $f$  vi assumerà estremi assoluti. Consideriamo a parte i punti di bordo  $(-2, -1)$  e  $(3, 4)$ , in cui  $f$  vale  $f(-2, -1) = 1$  e  $f(3, 4) = 16$ ; per il resto l'arco è parametrizzato cartesianamente, e basta

studiare gli estremi di  $F(x) = f(x, x^2 - 5) = (x+1)(x^2 - 5)$  per  $-2 < x < 3$ . Si ha  $F'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ , dunque  $F'(x) = 0$  per  $x = 1$  e  $x = -\frac{5}{3}$  e  $F'(x) > 0$  per  $x < -\frac{5}{3}$  e  $x > 1$ : dunque  $x = 1$  e  $x = -\frac{5}{3}$  sono rispettivamente un punto di minimo e di massimo locale per  $F(x)$ . Essendo  $F(1) = f(1, -4) = -8$  e  $F(-\frac{5}{3}) = f(-\frac{5}{3}, -\frac{20}{9}) = \frac{40}{27}$ , il massimo assoluto di  $f$  sull'arco completo (bordo compreso) è 16, assunto in  $(3, 4)$ , e il minimo assoluto è  $-8$ , assunto in  $(-1, 4)$ . • L'insieme  $\{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 3 + 2y, x \leq 0\}$  è riconoscibile nella figura qui sopra. Anche esso è compatto, dunque  $f$  vi ammetterà estremi assoluti, che ora andiamo a cercare. Trattiamo separatamente: (a) l'aperto dei suoi punti interni (varietà di dimensione 2); (b<sub>1,2,3</sub>) il segmento verticale e i due tratti di circonferenza, tutti senza estremi (sono tre varietà di dimensione 1); (c) i punti speciali  $(0, 3)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$  (varietà di dimensione 0). (a): Trattandosi di un aperto, per trovare eventuali punti stazionari di  $f$  dovremmo usare i metodi consueti, ma lo abbiamo già fatto per  $\mathbb{R}^2$ , trovando la sola sella  $(-1, 0)$  (che peraltro non vi sta). (b<sub>1</sub>) Sul segmento verticale  $\{(0, y) : 1 < y < 3\}$  si ha  $F(y) = f(0, y) = y$ , priva di punti stazionari. (b<sub>2</sub>) L'arco di circonferenza grande è parametrizzato da  $\{\gamma(\psi) = (2\cos\psi, 1+2\sin\psi) : \frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}\}$ , dunque si ha  $F(\psi) = (1+2\cos\psi)(1+2\sin\psi)$ : a conti fatti si ha  $F'(\psi) = 2(\cos\psi - \sin\psi)(1+2\cos\psi+2\sin\psi)$ , da cui (considerando solo  $\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{3\pi}{2}$ ) vale  $F'(\psi) = 0$  per  $\psi = \psi_0 = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{4}$  e  $\psi = \frac{5\pi}{4}$ , e  $F'(\psi) > 0$  per  $\psi_0 < \psi < \frac{5\pi}{4}$ . Ne ricaviamo che  $F(\psi)$  ha un punto rispettivamente di minimo e massimo relativo in  $\psi = \psi_0$  (con  $\gamma(\psi_0) = (-\frac{\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4})$ ) e  $\psi = \frac{5\pi}{4}$  (con  $\gamma(\frac{5\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$ ), in cui vale  $F(\psi_0) = f(-\frac{\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4}) = (1+2\cos\psi_0)(1+2\sin\psi_0) = (1+2\frac{-\sqrt{7}-1}{4})(1+2\frac{\sqrt{7}-1}{4}) = -\frac{3}{2}$  e  $F(\frac{5\pi}{4}) = f(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}) = 3-2\sqrt{2}$ . (b<sub>2</sub>) Per l'arco di circonferenza piccolo la ricerca l'abbiamo già fatta in precedenza: però, nessuno degli estremi locali  $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  e  $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$  sta nel nostro arco. (c) Infine, vale  $f(0, 3) = 3$ ,  $f(0, 1) = 1$  e  $f(0, -1) = -1$ . Ricapitolando: sul nostro insieme, il massimo assoluto di  $f$  è 3, assunto in  $(0, 3)$ , e il minimo assoluto è  $-\frac{3}{2}$ , assunto in  $(-\frac{\sqrt{7}-1}{4}, \frac{\sqrt{7}+1}{4})$ .



Gli insiemi e le curve di livello di  $f(x, y)$  (in verde) dell'esercizio 3.

4. (i) Si ha  $J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & 2y & x \\ 3yz & 3xz & 3xy \\ 4xz & 0 & 2x^2 \end{pmatrix}$ , da cui si ricava  $\frac{\partial g}{\partial(1,0,-1)}(0, 2, -1) = dg_{(0,2,-1)}(1, 0, -1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ : pertanto la retta richiesta ha forma parametrica  $\{(1, 0, -1) + t(-1, -6, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t, -6t, -1) :$

$t \in \mathbb{R}\}$ . Eliminando dal sistema  $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -6t \\ z = -1 \end{cases}$  il parametro  $t$ , si ottiene la forma cartesiana  $\begin{cases} y = 6(x-1) \\ z = -1 \end{cases}$ .

(ii) Si ha  $\det dg_{(x,y,z)} = 6x^2z(2y^2 - xz)$  e dunque, per il Teorema della Funzione Inversa, la funzione  $g$  è un diffeomorfismo locale ovunque tranne che sui punti dei piani  $x = 0$  e  $z = 0$ , e della superficie  $xz - 2y^2 = 0$  (che è varietà in ogni suo punto eccetto che in  $(0, 0, 0)$ ). Il punto  $(-1, 0, 1)$  non sta su nessuno di questi luoghi, dunque in esso  $g$  è diffeomorfismo locale. Si ha  $g(-1, 0, 1) = (-2, 0, 1)$ , e  $J_{g^{-1}}(-2, 0, 1) = J_g(-1, 0, 1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -12 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , perciò lo sviluppo cercato è  $g^{-1}(u, v, w) \sim$

$$g^{-1}(-2, 0, 1) + J_{g^{-1}}(-2, 0, 1)(u - (-2), v - 0, w - 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+2 \\ v \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - (u+2) - \frac{1}{2}(w-1) \\ -\frac{1}{3}v \\ 1 - 2(u+2) - \frac{1}{2}(w-1) \end{pmatrix}.$$

(iii) Sia  $h_1(x, y, z) = z + e^{xy} + g_1(x, y, z) = e^{xy} + (x+1)z + y^2 - 1$ . Essendo  $J_{h_1}(0, 2, -4) = (ye^{xy} + z, xe^{xy} + 2y, x+1)_{(0,2,-4)} = (-2, 4, 1)$ , si può esplicitare a scelta qualunque variabile rispetto alle altre due. Ad esempio, esplicitiamo  $z$ : troveremo dunque una funzione  $z : U \rightarrow \mathbb{R}$  definita in un intorno  $U \subset \mathbb{R}^2$  di  $(0, 2)$  e tale che  $z(0, 2) = -4$ . Derivando parzialmente  $h_1(x, y, z(x, y)) \equiv 0$  rispetto a  $x$  si ha  $ye^{xy} + z + (x+1)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ , da cui  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{ye^{xy} + z}{x+1}$ ; e rispetto a  $y$  si ha  $xe^{xy} + (x+1)\frac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0$ , da cui  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xe^{xy} + 2y}{x+1}$ : in particolare vale  $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 2) = 2$

e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 2) = -4$ . Derivando ulteriormente si trova  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(y^2 e^{xy} + \frac{\partial z}{\partial x})(x+1) - (ye^{xy} + z)}{(x+1)^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{e^{xy} + xy e^{xy} + \frac{\partial z}{\partial y}}{x+1}$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 e^{xy} + 2}{x+1}$ : in particolare vale  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0, 2) = -8$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 2) = 3$  e  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0, 2) = -2$ . Lo sviluppo cercato è perciò  $z(x, y) \sim -4 + 2(x-0) - 4(y-2) + \frac{1}{2}(-8(x-0)^2 + 2(3)(x-0)(y-2) - 2(y-2)^2) = -4 + 2x - 4(y-2) - 4x^2 + 3x(y-2) - (y-2)^2$ .

(iv) Siano  $k_1(x, y, z) = g_1(x, y, z) - e^x + 1 = xz + y^2 - e^x$  e  $k_2(x, y, z) = g_2(x, y, z) - x^3 = 3xyz - x^3$ , e sia  $k = (k_1, k_2)$ . Poiché  $J_k(0, 1, 1) = \begin{pmatrix} z - e^x & 2y & x \\ 3yz - 3x^2 & 3xz & 3xy \end{pmatrix}_{(0,1,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , l'unica possibilità è di esplicitare

$x$  e  $y$  in funzione di  $z$ , con  $x(1) = 0$  e  $y(1) = 1$ . Per il resto si ha  $\begin{pmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , e il calcolo mostra che anche  $x''(1) = y''(1) = 0$ .

(v) I punti in cui  $g_1(x, y, z) = xz + y^2 - 1$  non è sommersiva sono quelli in cui  $J_{g_1}(x, y, z) = (z, 2y, x)$  è nullo, dunque solo in  $(0, 0, 0)$ : pertanto, se  $\alpha \neq -1$  gli insiemi di livello  $X_{g_1, \alpha} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = \alpha\}$  sono varietà (di dimensione 2, ovvero superfici), e lo stesso vale per  $X_{g_1, -1}$  a patto di togliere il punto  $(0, 0, 0)$ . Il punto  $(2, 0, -1)$  sta in  $M_1 = X_{g_1, -3}$ , e il piano affine tangente a  $M_1$  in  $(2, 0, -1)$  è  $\{(x, y, z) : dg_{1(2,0,-1)}(x-2, y-0, z-(-1)) = 0\} = \{(x, y, z) : x - 2z - 4 = 0\}$ .

(vi) I punti in cui  $(g_1, g_2)(x, y, z) = (xz + y^2 - 1, 3xyz)$  non è sommersiva sono quelli in cui  $J_{(g_1, g_2)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z & 2y & x \\ 3yz & 3xz & 3xy \end{pmatrix}$  ha rango  $\leq 1$ , ovvero quelli per cui  $3xz^2 - 6y^2z = 3xyz - 3xyz = 6xy^2 - 3x^2z = 0$ , cioè  $z(xz - 2y^2) = x(2y^2 - xz) = 0$ : si tratta di tutti i punti della già incontrata superficie  $xz - 2y^2 = 0$  più quelli in cui  $x = z = 0$ , ovvero quelli dell'asse  $y$ . Cerchiamo allora di capire per quali coppie  $(\alpha, \beta)$  gli insiemi di livello  $X_{(g_1, g_2), (\alpha, \beta)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (g_1, g_2)(x, y, z) = (\alpha, \beta)\}$  contengono qualche punto singolare. In un punto  $(0, y_0, 0)$  dell'asse  $y$  si ha  $(g_1, g_2)(0, y_0, 0) = (y_0^2 - 1, 0)$ , dunque le coppie  $(\alpha, 0)$  con  $\alpha \geq -1$  determinano insiemi di livello  $X_{(g_1, g_2), (\alpha, 0)}$  contenenti qualche punto dell'asse  $y$ . D'altra parte, in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  di  $xz - 2y^2 = 0$  vale  $(g_1, g_2)(x_0, y_0, z_0) = (3y_0^2 - 1, 6y_0^3)$ : poiché per ogni  $y_0 \in \mathbb{R}$  vi sono punti  $(x, y, z)$  della superficie  $xz - 2y^2 = 0$ , l'equazione  $(\alpha, \beta) = (3y_0^2 - 1, 6y_0^3)$  ammette qualche soluzione  $y_0$  (ovvero, il corrispondente insieme di livello  $X_{(g_1, g_2), (\alpha, \beta)}$  contiene qualche punto della superficie) se e solo se  $\alpha \geq -1$  e  $\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\alpha + 1)^{\frac{3}{2}}$ . In tutti gli altri casi, gli insiemi di livello  $X_{(g_1, g_2), (\alpha, \beta)}$  non contengono punti singolari, e sono dunque delle varietà di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 1, ovvero delle curve regolari. Ad esempio, la curva di livello  $M_2$  del punto  $(2, 0, -1)$  è quella per cui  $(g_1, g_2)(x, y, z) = (-3, 0)$ , ovvero  $M_2 = X_{(g_1, g_2), (-3, 0)}$ , ed è ovviamente contenuta nella superficie di livello  $M_1$ : le sue equazioni sono perciò  $xz + y^2 = -2$  e  $xyz = 0$ . Ora, da  $xyz = 0$  si deduce che nei punti di  $M_2$  si deve annullare una delle coordinate, ma non può essere né la  $x$  né la  $z$  (infatti, se fosse  $x = 0$  oppure  $z = 0$  si ricaverebbe  $y^2 = -2$ , assurdo). Dunque in  $M_2$  deve essere  $y = 0$ , da cui  $xz = -2$ : in altre parole,  $M_2$  è l'iperbole equilatera  $xz = -2$  nel piano  $y = 0$ . Naturalmente, anche la retta affine tangente a  $M_2$  in  $(2, 0, -1)$  sarà contenuta nel piano affine tangente a  $M_1$  in  $(2, 0, -1)$ , trovato in precedenza: essa è data da  $\{(x, y, z) : dg_{1(2,0,-1)}(x-2, y-0, z-(-1)) = 0\} = \{(x, y, z) : x - 2z - 4 = 0, y = 0\}$ .

(vii) Il gradiente di  $f$  è  $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , mentre quelli di  $g_1$  e  $g_2$  sono  $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} z \\ 2y \\ x \end{pmatrix}$  e  $\nabla g_2 = \begin{pmatrix} 3yz \\ 3xz \\ 3xy \end{pmatrix}$ . Il metodo di Lagrange su  $M_1$  porge  $\begin{cases} 2y - 2z = x - 2z = 2x - 4y = 0 \\ xz + y^2 - 1 = -3 \end{cases}$ ; dalla prima equazione si ricava  $x = 2z$  e  $y = z$ , e dalla seconda si ricava allora  $3z^2 = -2$ , assurda. Dunque non vi sono estremi su  $M_1$ . Quanto a  $M_2$ , sempre il metodo di Lagrange dà  $\begin{cases} \det(\nabla f, \nabla g_1, \nabla g_2) = (x - 2z)(2y^2 - xz) = 0 \\ xz = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ , pure assurdo; dunque non vi sono estremi nemmeno su  $M_2$ .

5. (i) Il tratto di circonferenza di centro  $(1, 1)$  e raggio  $\sqrt{2}$  che sta nel primo quadrante di  $\mathbb{R}^2$  è descritto cartesianamente da  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ , ovvero  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ , con  $x > 0$  e  $y > 0$ ; usando coordinate polari centrate in  $(1, 1)$  esso è parametrizzato da  $\gamma_1 : ]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_1(\psi) = (1 + \sqrt{2}\cos\psi, 1 + \sqrt{2}\sin\psi)$ ; infine, usando le coordinate polari consuete, dall'equazione cartesiana si ricava  $\rho = 2(\cos\theta + \sin\theta)$ , e dunque si ha la parametrizzazione  $\gamma_2 : ]0, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma_2(\theta) = (2\cos\theta(\cos\theta + \sin\theta), 2\sin\theta(\cos\theta + \sin\theta))$ . Consideriamo ad esempio  $P(2, 2) = \gamma_1(\frac{\pi}{4}) = \gamma_2(\frac{\pi}{4})$ : essendo  $J_g(P) = (2, 2)$ , lo spazio tangente in  $P$  è dato da  $\{(u, v) : 2u + 2v = 0\}$ , ovvero  $\mathbb{R}(1, -1)$ . Lo stesso risultato si trova considerando i multipli scalari di  $\gamma_1'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(-\sin\psi, \cos\psi)_{\psi=\frac{\pi}{4}} = (-1, 1)$  oppure  $\gamma_2'(\frac{\pi}{4}) = (-2\sin 2\theta + 2\cos 2\theta, 2\cos 2\theta + 2\sin 2\theta)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = (-2, 2)$ .

(ii) Lo spicchio considerato è la calotta di superficie sferica che sta davanti al piano  $x = \frac{r}{2}$  e dentro lo spigolo delimitato dai semipiani  $y = 0$  e  $y = x$  con  $x > 0$ . In coordinate sferiche  $(\rho, \theta, \varphi)$ , i punti della superficie sferica hanno  $\rho$  bloccato sul valore  $r$ , dunque la condizione  $\frac{r}{2} < x < r$  si scrive come  $\frac{r}{2} < r\cos\theta\sin\varphi < r$ , ovvero  $\frac{1}{2} < \cos\theta\sin\varphi < 1$ : nell'ipotesi che  $2\cos\theta > 1$  (cioè  $|\theta| < \frac{\pi}{3}$ ) si ricava  $\sin\varphi > \frac{1}{2\cos\theta}$ , ovvero  $\arcsin\frac{1}{2\cos\theta} < \varphi < \pi - \arcsin\frac{1}{2\cos\theta}$ : pertanto lo spicchio è descritto in coordinate sferiche da  $\{(x, y, z) = \gamma(\theta, \varphi) = r(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi) : 0 < \theta < \frac{\pi}{4}, \arcsin\frac{1}{2\cos\theta} < \varphi < \pi - \arcsin\frac{1}{2\cos\theta}\}$ . Scegliendo ad esempio  $\theta = \frac{\pi}{6}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , si ha il punto  $P = \frac{r\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}, 1, 2)$ : se  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$  si ha  $J_g(P) = \frac{r\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}, 1, 2)$ , e dunque lo spazio tangente in  $P$  è dato da  $\{(u, v, w) :$

$\sqrt{3}u + v + 2w = 0\}$ . Analogamente si ha  $J_\gamma(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 & -r \sin \varphi \end{pmatrix}_{(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})} = \frac{r\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , che dà

luogo al medesimo spazio tangente (si noti che i due vettori colonna soddisfano l'equazione  $\sqrt{3}u + v + 2w = 0$ ).

(iii) In coordinate cilindriche  $(\rho, \theta, z)$ , il settore di paraboloide è descritto da  $\{(x, y, z) = \gamma(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho^2 - 1) : \rho \leq \sqrt{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta < 0\}$ . Scegliendo ad esempio  $\theta = -\frac{\pi}{3}$  e  $\rho = 1$  si ottiene il punto  $P = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3}, 0)$ : se  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 - z$ , si ha  $J_g(P) = (1, -\sqrt{3}, -1)$ , e dunque lo spazio tangente in  $P$  è dato da  $\{(u, v, w) : u - \sqrt{3}v - w = 0\} = \{(u, v, w) : w = u - \sqrt{3}v\}$ . Analogamente si ha  $J_\gamma(1, -\frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \\ 2\rho & 0 \end{pmatrix}_{(1, -\frac{\pi}{3})} =$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ , la cui immagine è ancora lo stesso spazio tangente (si noti che i due vettori colonna soddisfano l'equazione  $w = u - \sqrt{3}v$ ).