1 Integrazione generalizzata

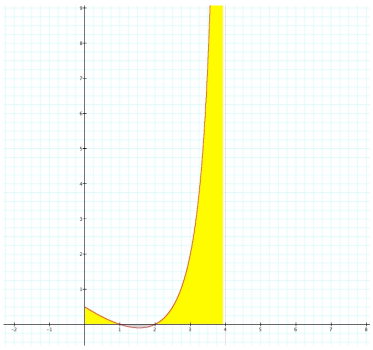
Una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (con $-\infty \lneqq a < b \leq +\infty$), si dice essere *integrabile (alla Riemann) su* $[a, b[$ *in senso generalizzato* (d'ora in poi scriveremo solo "*in s.g.*", o lo ometteremo), o anche *in senso improprio*, se

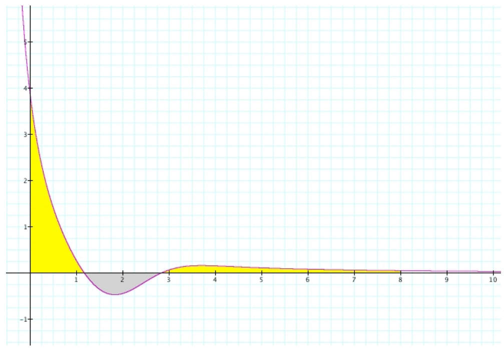
Integrabilità in s.g.

$$\lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt \qquad \text{esiste finito in } \mathbb{R}.$$

In tal caso, il valore finito del limite si indicherà con $\int_a^b f(x)\,dx$, e si dirà anche che *l'integrale generalizzato* (o *improprio*) $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*. D'altra parte, f si dice *assolutamente integrabile in s.g.* (o *sommabile*) se $|f|$ è integrabile in s.g.. Trattandosi di proprietà locali in b^-, che non cambiano se al posto di a scegliamo un altro $c \in [a, b[$,[(1)] si usa dire più semplicemente che f *è integrabile* (o *assolutamente integrabile*) *in s.g. in* b^-.

Assoluta integrabilità in s.g.





L'integrazione generalizzata studia la convergenza di integrali su intervalli non compatti di $\mathbb{R}$: **(a)** su $[0, 4[$, **(b)** su $[0, +\infty[$.

Come per le serie numeriche, anziché calcolare precisamente il valore di tale limite (il che richiederebbe il calcolo di una primitiva, cosa spesso impossibile in termini elementari) spesso interessa solo sapere se esso esiste finito o no. Chiaramente una definizione analoga vale per l'integrabilità generalizzata (in c^+, con $-\infty \leq c < d \lneqq +\infty$) di una funzione localmente integrabile su $]c, d]$; e una funzione localmente integrabile su $]c, d[$ (aperto, con $-\infty \leq c < d \leq +\infty$) si dirà integrabile in s.g. su $]c, d[$ se essa lo è separatamente sia in c^+ che in d^-, e in tal caso, preso un qualsiasi $a \in]c, d[$, si porrà

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^d f(x)\,dx \;=\; \lim_{x \longrightarrow c^+} \int_x^a f(t)\,dt \;+\; \lim_{y \longrightarrow d^-} \int_a^y f(t)\,dt.$$

Pertanto ci si può limitare al solo studio dell'integrabilità generalizzata in b^- di una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ con $-\infty \lneqq a < b \leq +\infty$.

[(1)] Infatti $\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$, e il limite per $x \to b^-$ del primo membro è finito se e solo se lo è quello del secondo membro.

Proposizione 1.0.1. (Linearità) *Se $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sono due funzioni integrabili in b^-, allora lo è anche la funzione $\lambda f + \mu g$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e vale*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

Dimostrazione. Discende dalla linearità dell'integrale di Riemann e del limite. $\square$

Esempi. **(1)** La funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile in 0^+ ma non in $+\infty$: infatti vale $\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{x\to 0^+}(2\sqrt{t}]_x^1 = \lim_{x\to 0^+}(2 - 2\sqrt{x}) = 2 \in \mathbb{R}$ mentre $\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{t}]_1^x = \lim_{x\to+\infty}(2\sqrt{x}-2) = +\infty$. Similmente si vede che $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in $+\infty$ ma non in 0^+, mentre $\frac{1}{x}$ non è integrabile ne' in 0^+ ne' in $+\infty$. **(2)** Usando sempre la definizione (e ricordando che $\int \log t\, dt = t(\log t - 1) + k$) si nota che $\log x$ è integrabile in 0^+ ma non in $+\infty$. **(3)** La funzione $\sin x$ non è integrabile a $+\infty$ secondo la definizione data: infatti $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin t\, dt = \lim_{x\to+\infty}(-\cos t]_0^x = \lim_{x\to+\infty}(1 - \cos x)$ non esiste. **(4)** Negli casi precedenti la risposta è stata data solo dopo aver calcolato una primitiva: dunque, ad esempio, per ora non sapremmo dire nulla sull'integrabilità di $\frac{\sin x}{x}$ a $+\infty$. Tuttavia, come accennato, bisognerà saper determinare l'integrabilità di una funzione anche senza calcolare esplicitamente una sua primitiva.

Se f non cambia segno all'intorno di b^- (ovvero, esiste un intorno di b^- in cui f è sempre ≥ 0, o sempre ≤ 0) lo studio dell'integrabilità di f in b^- equivale a quello dell'assoluta integrabilità:[(2)] dunque, ciò che si può dire per l'integrabilità in b^- delle funzioni ≥ 0 vale anche per le funzioni f che non cambiano segno all'intorno di b^-, considerando eventualmente $-f$ al posto di f. Nel seguito divideremo allora la trattazione in due casi distinti:

(1) $f \geq 0$ all'intorno di b^-; (2) f *oscilla*[(3)] all'intorno di b^-.

1.1 Integrazione generalizzata delle funzioni positive

È di grande importanza iniziare notando che:

Proposizione 1.1.1. *La* potenza x^α *è integrabile in* 0^+ (più generalmente, $(x - c)^\alpha$ è integrabile in c^+) *se e solo se $\alpha > -1$, ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.*

Dimostrazione. Una primitiva è $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ($\alpha \neq -1$) o $\log x$ ($\alpha = -1$): la tesi segue per calcolo diretto. $\square$

La Proposizione 1.1.1, usata in combinazione col seguente teorema, risolve gran parte delle questioni di integrabilità generalizzata di funzioni positive.

Teorema 1.1.2. *Siano $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ due funzioni localmente integrabili positive.*

(i) (Criterio del confronto) *Sia $0 \leq f \leq g$ all'intorno di b^-* (ad es. sia $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ovvero $\lim_{x\to b^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty$)*. Se g è integrabile in b^-, allora lo è anche f; se f non è integrabile in b^-, allora non lo è nemmeno g.*

[(2)] Se $f \geq 0$ all'intorno di b^- ciò è ovvio (ivi vale $f = |f|$); se invece $f \leq 0$, è chiaro che f è integrabile in b^- se e solo se lo è $-f \geq 0$, dunque se e solo se $-f$ è assolutamente integrabile: ma $|-f| = |f|$.

[(3)] Nel seguito, per "oscilla" si intende *"non esiste alcun intorno di b^- su cui f abbia segno costante"*.

(ii) (Criterio di asintoticità) *Se* $f \sim^*_{b^-} g$,[(4)] *allora* f *è integrabile in* b^- *se e solo se lo è* g.

Dimostrazione. (i) Le funzioni integrali $\int_a^x f(t)\,dt$ e $\int_a^x g(t)\,dt$ sono monotone crescenti perché $f, g \geq 0$, dunque il loro limite in b^- esiste (finito o $+\infty$); e per l'isotonìa dell'integrale si ha $\int_a^x f(t)\,dt \leq \int_a^x g(t)\,dt$. Basta allora applicare il teorema del confronto per i limiti. (ii) Per definizione esistono $\lambda > 0$ e una funzione σ infinitesima in b^- tali che $g = (\lambda + \sigma)f$: per definizione di limite, esiste dunque un intorno di b^- in cui $\frac{\lambda}{2} f \leq g \leq \frac{3\lambda}{2} f$. Il risultato segue allora dal criterio del confronto. □

Da questi criteri segue subito la risposta per due situazioni piuttosto evidenti.

Corollario 1.1.3. *Sia* $f : [a, b[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ (con $a < b \leq +\infty$) *una funzione localmente integrabile* positiva *tale che esista (finito o infinito) il limite* $\ell = \lim_{x \to b^-} f(x) \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

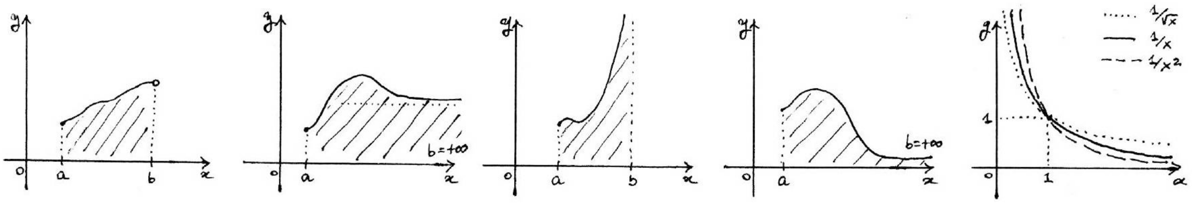
(i) *Se* $b \in \mathbb{R}$ *e* $\ell \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, *allora* f è *integrabile in* b^-.

(ii) *Se* $b = +\infty$ *e* $\ell \neq 0$, *allora* f non è *integrabile in* $+\infty$.[(5)]

Dimostrazione. Chiaramente una funzione costante non nulla è integrabile in $b^- \in \mathbb{R}$ e non integrabile in $b = +\infty$. Ciò detto, si usi il criterio del confronto: (i) se $\ell = 0$, con la costante 1; se invece $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, con la costante $\frac{3}{2}\ell$; (ii) se $\ell = +\infty$, con la costante 1; se invece $\ell \in \mathbb{R}_{>0}$, con la costante $\frac{1}{2}\ell$. □

Nel caso in cui $\lim_{x \to b^-} f(x)$ esista in $\widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}$, i soli casi realmente interessanti sono pertanto:

(1) $b \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$; (2) $b = +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.



(a) (b) La prima funzione è ovviamente integrabile in b^-, e la seconda ovviamente non lo è in $b = +\infty$. **(c) (d)** La terza e la quarta sono i casi interessanti. **(e)** Le potenze $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ nell'integrabilità a 0^+ e a $+\infty$.

Esempi. (1) La funzione $f(x) = e^{-x}$ decresce molto rapidamente a 0^+ quando $x \to +\infty$: è dunque naturale pensare che debba essere integrabile a $+\infty$. Ed infatti lo è, per il criterio del confronto: $g(x) = \frac{1}{x^2}$ lo è, e $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Il calcolo dà $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = (-e^{-x}]_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty}(-e^{-x}) - (-e^{-1}) = 0 - (-\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}$. **(2)** La funzione pari $f(x) = e^{-x^2}$ è integrabile a $\pm\infty$ (ad esempio, lo è a $+\infty$ per confronto con e^{-x}). In questo caso non si riesce a calcolare una primitiva di $f(x)$ in forma elementare, e dunque sembrerebbe impossibile calcolare ad esempio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$; il valore di tale integrale, detto *integrale di Gauss*, è comunque noto e vale $\sqrt{\pi}$ (il calcolo sarà effettuabile con gli strumenti del calcolo integrale in più variabili). **(3)** La funzione $f(x) = \frac{2x}{3x^2-5}$ non è integrabile a $+\infty$: infatti $g(x) = \frac{1}{x}$ non lo è, ed essendo $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2-5} = \frac{2}{3} \neq 0$ basta applicare il criterio di asintoticità.

[(4)] Ricordiamo che il simbolo $f \sim^*_{b^-} g$ significa che f è *dello stesso ordine* di g in b^-, ovvero che esiste $\lambda > 0$ tale che $f \sim_{b^-} \lambda g$; se $g \neq 0$ all'intorno di b^- (escluso eventualmente b) ciò equivale al fatto che $\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ esiste finito e > 0.

[(5)] Ma non è vero che se f non è infinitesima a $+\infty$, allora non è integrabile in $+\infty$: ad esempio, se $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ è definita come 1 sugli intervalli $[n, n + \frac{1}{n^2}]$ e 0 altrove, allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste ma $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$.

(4) La funzione $f(x) = \log x$ è continua, dunque localmente integrabile, in $]0, +\infty[$, ed ha segno costante sia all'intorno di 0^+ che di $+\infty$. Poiché $\lim_{x\to 0^+} \frac{-\log x}{1/\sqrt{x}} = 0$, $f(x)$ è integrabile in 0^+; infine, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, essa non è integrabile in $+\infty$. **(5)** La funzione $f(x) = \frac{1}{\log x}$ è localmente integrabile in $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, ed ha segno costante all'intorno di 0^+, 1^-, 1^+ e $+\infty$. Poiché $\lim_{x\to 0^+}(-\frac{1}{\log x}) = 0$, $f(x)$ è integrabile in 0^+. Ricordando che $\log x \sim_1 (x-1)$, si ha $f(x) \sim_1 \frac{1}{x-1}$ e dunque $f(x)$ non è integrabile in $1^\mp$ per il criterio di asintoticità (perché non lo è nemmeno $\frac{1}{x-1}$). Infine, $f(x)$ non è integrabile a $+\infty$ per il criterio del confronto, in quanto $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non lo è, e $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$. **(6)** La funzione $f(x) = \frac{4}{3x\sqrt{x}-1}$ è integrabile a $+\infty$ perché è dello stesso ordine di $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, che lo è (si noti che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4}{3} \neq 0$). **(7)** La funzione $x^\alpha |\log x|^\beta$, definita e continua su $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$ (e β qualunque) o se $\alpha = -1$ e $\beta < -1$; è integrabile in $1^\mp$ se e solo se $\beta > -1$; infine, è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\alpha < -1$ (e β qualunque) o se $\alpha = -1$ e $\beta < -1$. **(8)** La funzione $x^\alpha e^{\beta x}$, definita e continua su $]0, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $\alpha > -1$ (e β qualunque), ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $\beta < 0$ (e α qualunque), o se $\beta = 0$ e $\alpha < -1$.

È da notare anche il seguente

Proposizione 1.1.4. (Criterio di convergenza assoluta per le serie numeriche) *Sia $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una funzione decrescente e positiva. Allora la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ è convergente se e solo se f è integrabile in s.g. in $+\infty$. Inoltre, in questo caso, l'errore della ridotta N-esima rispetto alla somma finale è stimato da $\sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$.*

Dimostrazione. Consideriamo le funzioni a scalino $s^+ = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\chi_{[n,n+1[}$ e $s^- = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)\chi_{[n,n+1[}$, ove χ_I indica la funzione caratteristica dell'intervallo I; è chiaro che $s^- \leq f \leq s^+$, da cui $\sum_{n=1}^{[x]} f(n) = \sum_{n=0}^{[x]-1} f(n+1) = \int_0^{[x]} s^-(t)\,dt \leq \int_0^x s^-(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x s^+(t)\,dt \leq \int_0^{[x]+1} s^+(t)\,dt = \sum_{n=0}^{[x]} f(n)$. Ne ricaviamo che $\sum_{n=1}^{[x]} f(n) \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \sum_{n=0}^{[x]} f(n)$, da cui il risultato segue per il Teorema del confronto nei limiti. Da $s^- \leq f$ si ha poi $\int_N^x s^-(t)\,dt \leq \int_N^x f(t)\,dt$, da cui $\sum_{n=N+1}^{[x]} f(n) \leq \int_N^x f(t)\,dt$, e la stima sull'errore segue passando al limite per $x \to +\infty$, sempre in base al Teorema del confronto nei limiti. $\square$

Esempio. La serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge se e solo se la funzione $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile in $+\infty$, ovvero (come noto) se e solo se $\alpha > 1$. In tal caso, si ha la stima $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{(\alpha-1)N^{\alpha-1}}$.

1.2 Integrazione generalizzata delle funzioni oscillanti

Data una funzione localmente integrabile $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (con $a < b \leq +\infty$) con segno oscillante all'intorno di b^-, come per le serie a termini di segno alterno la prima cosa da vedere è se f sia assolutamente integrabile (e ciò si verifica applicando a $|f|$ quanto detto in precedenza): infatti

Proposizione 1.2.1. *Se f è assolutamente integrabile in b^-, essa è integrabile in b^-.*

Dimostrazione. Si considerino $f^+ = \sup(f, 0)$ e $f^- = \sup(0, -f)$ (*parte positiva* e *parte negativa* di f, che sono entrambe funzioni ≥ 0). Se f è assolutamente integrabile in b^-, ovvero se $|f| = f^+ + f^-$ è integrabile in b^-, allora anche $f^\pm$ sono integrabili per il Criterio del confronto; ma allora anche $f = f^+ - f^-$ è integrabile in b^-. $\square$

Esempio. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x^5 - 1}$ non è positiva da un certo punto in poi (il segno di $\sin x$ oscilla), ma possiamo vedere che essa è assolutamente integrabile a $+\infty$. Infatti, per $x > 1$ si ha $|f|(x) = \frac{|\sin x|}{x^5-1}$: presa $g(x) = \frac{1}{x^4}$, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, dunque f è assolutamente integrabile (e dunque integrabile) a $+\infty$ per il criterio del confronto.

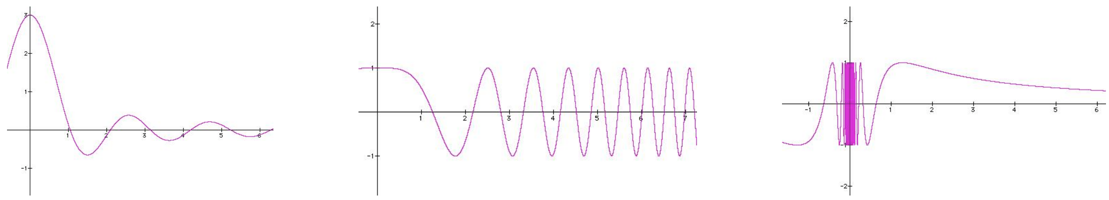
Altrimenti va ricordato il seguente risultato, paragonabile al Criterio di Leibniz per le serie. Si ricorda che se I è un intervallo[(6)] di $\mathbb{R}$ e $\psi : I \to \mathbb{R}$ è continua e di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, la *variazione totale* di ψ su I è la quantità

$$\int_I |\psi'(x)|\,dx \qquad \in \widetilde{\mathbb{R}}_{\geq 0}\,;$$

poiché ψ' ha segno costante dove ψ è monotona, il significato è la "distanza totale percorsa in verticale (indipendentemente dal verso) dal punto $(x, \psi(x))$ mentre x percorre I". La funzione ψ si dirà *a variazione limitata* in I se la sua variazione totale in I è finita (cioè se la derivata ψ' è assolutamente integrabile su I): ad esempio, una ψ monotona ha variazione limitata in I se e solo se ha limiti finiti negli estremi di I. **Funzione a variazione limitata**

Teorema 1.2.2. (Abel-Dirichlet) *Si assuma che $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, ove φ abbia una primitiva limitata*[(7)]*, e ψ sia di classe $\mathcal{C}^1$, a variazione limitata in $[a, b[$ e infinitesima in b^-* (es.: ψ di classe $\mathcal{C}^1$, decrescente e infinitesima in b^-)*. Allora $f(x)$ è integrabile in b^-.*

Dimostrazione. Se Φ è una primitiva limitata di φ, dalle ipotesi si ha che $\Phi\psi$ è infinitesima in b^- e che $\Phi\psi'$ è assolutamente integrabile (dunque integrabile) in b^-. Integrando per parti, si ha allora $\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x)\psi(x) - \Phi(a)\psi(a) - \int_a^x \Phi(t)\psi'(t)\,dt$, e il risultato segue passando al limite per $x \to b^-$. $\square$



Tre integrali oscillanti convergenti: **(a)** l'integrale di Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$, **(b)** l'integrale di Fresnel $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$, **(c)** l'integrale del "seno del topologo" $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx$. (I grafici sono riscalati per una migliore visibilità).

Esempi. (1) L'*integrale di Dirichlet* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge. La funzione $\frac{\sin x}{x}$ è localmente integrabile in $]0, +\infty[$; all'intorno di 0^- essa ha segno costante e si ha $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, dunque l'integrale converge in 0^+; invece per $+\infty$ si può applicare Abel-Dirichlet con $\varphi(x) = \sin x$ e $\psi(x) = \frac{1}{x}$. Tuttavia l'integrale non converge assolutamente: infatti se $n \geq 2$ vale $\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=2}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x|\,dx = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$, e questa serie diverge per $n \to +\infty$. **(2)** L'*integrale di Fresnel* $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$ converge: infatti, posto $x = \sqrt{t}$ si ha $\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} \cos t\,dt$, e si applica Abel-Dirichlet con $\varphi(t) = \cos t$ e $\psi(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Anche questo integrale non converge assolutamente. **(3)** Il *seno del topologo* $\sin\frac{1}{x}$ è integrabile in 0^+: infatti, posto $t = \frac{1}{x}$ si ha $\int_0^1 \sin\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\sin t\,dt$, e si applica Abel-Dirichlet con $\varphi(t) = \sin t$ e $\psi(t) = \frac{1}{t^2}$. In questo caso si ha convergenza assoluta: infatti $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. **(4)** La funzione $x^\alpha \sin(x^\beta)$, definita e continua su $]0, +\infty[$, è integrabile in 0^+ se e solo se $|\beta| > -\alpha - 1$ ed è integrabile in $+\infty$ se e solo se $|\beta| > \alpha + 1$. In particolare, l'integrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin(x^\beta)\,dx$ converge se e solo se $|\beta| > |\alpha + 1|$.

[(6)] Ricordiamo che, qui e nel seguito, il termine *intervallo* significa "sottoinsieme connesso (privo di buchi) di $\mathbb{R}$": si tratta degli intervalli limitati, delle semirette, o di tutto $\mathbb{R}$.

[(7)] Più in generale, la primitiva limitata Φ di φ potrebbe essere anche continua e di classe $\mathcal{C}^1$ solo a tratti, e dunque φ continua a tratti: ad esempio, $\varphi(x) = (-1)^{[x]}$ soddisfa tale ipotesi.

1.3 Nozioni ulteriori

• **La funzione Gamma di Eulero**. La funzione più importante dopo quelle elementari è probabilmente la *Gamma di Eulero-Legendre*, definita da un integrale generalizzato:

Funzione Gamma di Eulero

$$\Gamma : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \ .$$

Integrando per parti, si nota facilmente che per ogni $x > 0$ vale $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$; pertanto, da $\Gamma(1) = 1$ si ricava $\Gamma(n+1) = n!$. In altre parole, la funzione Gamma è (a meno di una traslazione della variabile) un'*interpolazione del fattoriale*, dunque in particolare cresce più rapidamente dell'esponenziale.

• **Integrabilità generalizzata di funzioni complesse.** Una funzione a valori complessi $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ può essere vista come una coppia di funzioni a valori reali $f = \mathrm{Re}\, f + i \,\mathrm{Im}\, f$, entrambe definite nel dominio $[a, b[$; si dirà *integrabile in s.g. in* b^- se lo sono entrambe $\mathrm{Re}\, f$ e $\mathrm{Im}\, f$, ponendo $\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b (\mathrm{Re}\, f)(x)\, dx \, + \, i \int_a^b (\mathrm{Im}\, f)(x)\, dx \, \in \mathbb{C}$.

Integrabilità di funzioni complesse

Invece, essendo $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, f)^2 + (\mathrm{Im}\, f)^2}$ una funzione a valori *reali*, la nozione di assoluta integrabilità in s.g. ha pienamente senso per f, ed implica l'integrabilità in s.g..

Assoluta integrabilità di funzioni complesse

Esempi. (1) La funzione $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ data da $f(x) = e^{-x} + ix^2$ non è integrabile a $+\infty$: infatti $(\mathrm{Re}\, f)(x) = e^{-x}$ lo è, ma $(\mathrm{Im}\, f)(x) = x^2$ no. **(2)** Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è data da $g(x) = \frac{ix}{x^3+i(x-1)}$, si ha $g(x) = ix\frac{x^3-i(x-1)}{x^6+(x-1)^2} = \frac{x^2-x-ix^4}{x^6+x^2-2x+1}$, da cui $(\mathrm{Re}\, g)(x) = \frac{x^2-x}{x^6+x^2-2x+1}$ e $(\mathrm{Im}\, g)(x) = -\frac{x^4}{x^6+x^2-2x+1}$. Poiché sia $\mathrm{Re}\, g$ che $\mathrm{Im}\, g$ sono integrabili a $\mp\infty$ (infatti $|(\mathrm{Re}\, g)(x)| \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^4}$ e $|(\mathrm{Im}\, g)(x)| \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^2}$), anche g lo è. Ma si poteva (ed era meglio) vedere direttamente che g è assolutamente integrabile: infatti $|g(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{x^6+(x-1)^2}} \sim_{\mp\infty} \frac{1}{x^2}$.
(3) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è assolutamente integrabile, la *trasformata di Fourier* di f è la funzione $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ data da $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i x t}\, dt$. Si noti che la funzione $t \mapsto f(t)e^{-2\pi ixt}$ è assolutamente integrabile per ogni $x \in \mathbb{R}$ (infatti $|f(t)e^{-2\pi ixt}| = |f(t)||e^{-2\pi ixt}| = |f(t)|$, essendo $|e^{i\theta}| = 1$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$), dunque $\widehat{f}(x)$ ha senso per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questa trasformazione è di grande importanza, e si rimanda a corsi più avanzati per un suo studio ulteriore: osserviamo solo una delle sue proprietà più notevoli (che la rende utile nella risoluzione delle equazioni differenziali), ovvero quella di *scambiare la derivazione con la moltiplicazione per* x (a meno di una costante moltiplicativa). In effetti, data f assolutamente integrabile, se f è derivabile e anche f' è assolutamente integrabile si ha $\widehat{f'}(x) = -2\pi i\, x \widehat{f}(x)$; viceversa, se anche $g(x) := x\, f(x)$ è assolutamente integrabile allora $\widehat{f}(x)$ è derivabile e risulta $\widehat{g}(x) = -\frac{1}{2\pi i}\, (\widehat{f}\,)'(x)$.[8]

• **Alcune funzioni integrali.** Siano I e J intervalli di $\mathbb{R}$, con variabili x e t, e si abbiano funzioni $f : J \to \mathbb{R}$, $\varphi : I \to J$ e $\psi : I \to J$. Se $f(t)$ è localmente integrabile in J, si può definire la *funzione integrale*[9]

$$F : I \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\, dt \ .$$

[8] La prima proprietà si dimostra facilmente usando l'integrazione per parti; la seconda necessita della derivazione sotto il segno d'integrale (vedi Teorema 5.7.1).

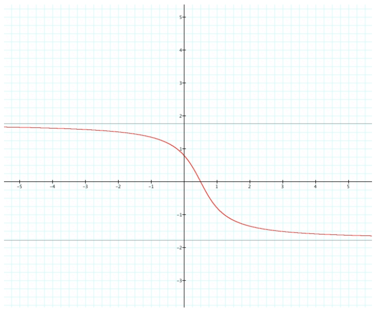
[9] Quella che segue è una funzione integrale di forma particolare, in cui x non appare nell'integrando e gli estremi di integrazione sono finiti. Nel seguito, acquisiti gli strumenti del calcolo differenziale a più variabili, ci si occuperà brevemente di funzioni integrali in forma generale (vedi pag. 71).

Proposizione 1.3.1. (Derivabilità di una funzione integrale) *Si assuma che $f(t)$ sia continua in J, e che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano di classe $\mathcal{C}^1$ in I. Allora $F(x)$ è derivabile, con*

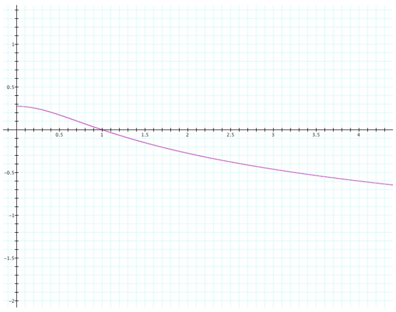
$$F'(x) \;=\; f(\psi(x))\,\psi'(x) \;-\; f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\ .$$

Dimostrazione. Preso un qualsiasi $t_0 \in J$ si ha $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{t_0} f(t)\,dt + \int_{t_0}^{\psi(x)} f(t)\,dt$. Per il Teorema di Torricelli, $U(x) = \int_{t_0}^{x} f(t)\,dt$ è derivabile con $U'(x) = f(x)$: essendo $F(x) = U(\psi(x)) - U(\varphi(x))$, basta derivare applicando la regola della catena. $\square$

La Proposizione 1.3.1 fornisce un valido strumento per lo studio dell'andamento qualitativo di $F(x)$, come mostrano i seguenti esempi.



Esempi. (1) Sia $F(x) = \int_x^{1-x} e^{-t^2}\,dt$. La funzione $f(t) = e^{-t^2}$ è continua (dunque localmente integrabile) su tutto $\mathbb{R}$: perciò il dominio di $F(x)$ è $\mathbb{R}$. Per il segno, la funzione $f(t)$ è sempre positiva, mentre $1 - x \geq x$ per $x \leq \frac{1}{2}$: dunque $F(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{2}$. Poiché $f(t)$ è integrabile in s.g. su $\mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(\int_x^0 e^{-t^2}\,dt + \int_0^{1-x} e^{-t^2}\,dt) = \int_{-\infty}^0 e^{-t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, che è finito e si dimostra valere $\sqrt{\pi}$; allo stesso modo si vede che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\sqrt{\pi}$. Dunque la retta $y = \pm\sqrt{\pi}$ è asintoto orizzontale a $\mp\infty$ per $F(x)$. Ora, $F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ per la Proposizione 1.3.1, e derivando si ottiene $F'(x) = (-1)e^{-(1-x)^2} - (1)e^{-x^2} = -e^{-x^2}(e^{2x-1} + 1)$, sempre negativa: dunque $F(x)$ è strettamente decrescente. Derivando ulteriormente si ha $F''(x) = 2e^{-x^2}((x-1)e^{2x-1} + x)$, ed un facile confronto grafico mostra che $F''(x) \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{2}$: dunque $F(x)$ è convessa per $x > \frac{1}{2}$ ed ha un punto di flesso in $x = \frac{1}{2}$ (in cui $F(\frac{1}{2}) = 0$ e $F'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{\sqrt[4]{e}}$).



(2) Studiamo ora $G(x) = \int_1^{1/x} \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt$ facendo finta, per il momento, di non saper calcolare una primitiva di $g(t) = \frac{1}{t(t^2+2)}$. Essendo $g(t)$ non integrabile in 0 (infatti $g(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$), il dominio di $G(x)$ è per $\frac{1}{x} > 0$, ovvero $x > 0$: poiché allora $g(t)$ viene integrata dove è positiva, si avrà $G(x) \geq 0$ nei punti del dominio ove $\frac{1}{x} \geq 1$, ovvero per $0 < x \leq 1$. I limiti notevoli sono $\lim_{x\to0^+} G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt$, che è ignoto ma di certo finito (infatti $g(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}$), e $\lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_1^0 \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = -\int_0^1 \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = -\infty$ (perché, come detto, si ha $g(t) \sim_0^* \frac{1}{t}$); essendo poi $G'(x) = f(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})' - f(1)(1)' = -\frac{x}{2x^2+1}$, il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{G(x)}{x}$ usando de l'Hôpital risulta 0, e ciò mostra che non vi è asintoto lineare a $+\infty$. Si ha poi che G è strettamente decrescente, perché $G'(x) < 0$ per ogni $x > 0$. Infine, derivando ancora si ha $G''(x) = \frac{2x^2-1}{(2x^2+1)^2}$, dunque $G(x)$ è convessa per $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ed ha un flesso in $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a quota ignota $G(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ma con pendenza nota $G'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Fin qui si può arrivare con il solo studio della funzione integrale; si noti però che, già dal fatto che $G'(x) = -\frac{x}{2x^2+1}$ si potrebbe aver dedotto immediatamente che $G(x) = -\frac{1}{4}\log(2x^2+1) + k$ per una certa costante $k \in \mathbb{R}$, e dovendo essere $G(1) = 0$ si avrebbe $0 = -\frac{1}{4}\log 3 + k$, ovvero $k = \frac{1}{4}\log 3$, da cui infine la forma finita $G(x) = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2x^2+1}$. A tale forma si arriva anche calcolando una primitiva di $g(t)$: infatti $\int \frac{1}{t(t^2+2)}\,dt = \frac{1}{2}\int(\frac{1}{t} - \frac{t}{2t^2+1})\,dt = \frac{1}{4}\log\frac{t^2}{t^2+2}$, e perciò nuovamente $F(x) = (\frac{1}{4}\log\frac{t^2}{t^2+2}]_1^{1/x} = \frac{1}{4}(\log\frac{1}{2x^2+1} - \log\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2x^2+1}$. Ora si possono calcolare le cose in sospeso: $\lim_{x\to0^+} G(x) = \frac{1}{4}\log 3 \sim 0{,}27$, e il flesso è a quota $G(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4}\log\frac{3}{2} \sim 0{,}1$.