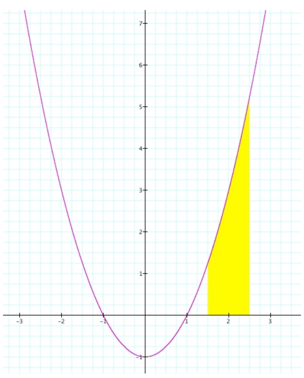
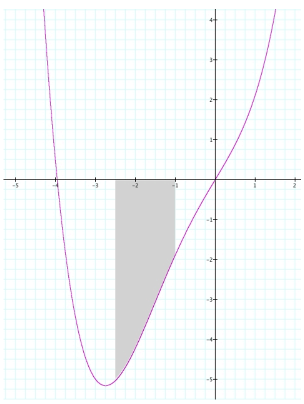
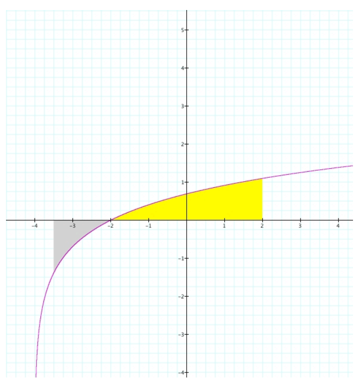
Indice

L'integrale di Riemann che conosciamo finora

Finora sappiamo integrare funzioni su intervalli compatti di $\mathbb{R}$...





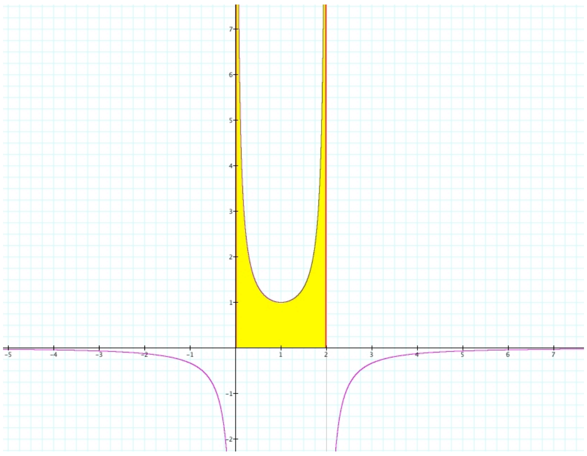


...ma che succede integrando su intervalli NON compatti di $\mathbb{R}$?

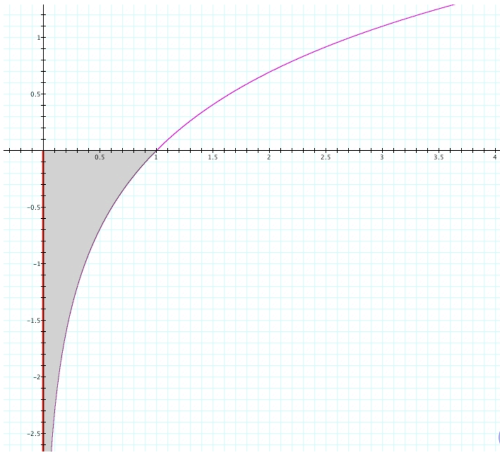
Stiamo entrando... nell'integrazione di Riemann generalizzata

L'integrazione di Riemann generalizzata

Si diceva: che succede integrando su intervalli NON compatti di $\mathbb{R}$?
Ad esempio, un intervallo potrebbe essere non chiuso...



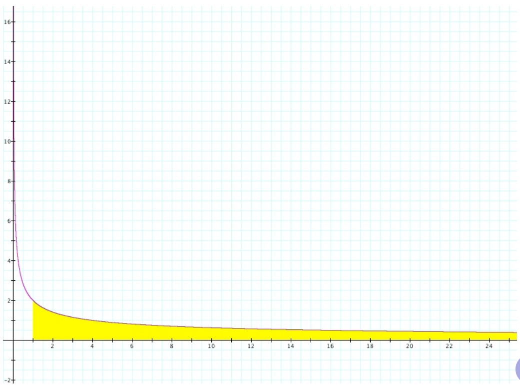
La funzione $\dfrac{1}{x(2-x)}$ su $]0,2[$



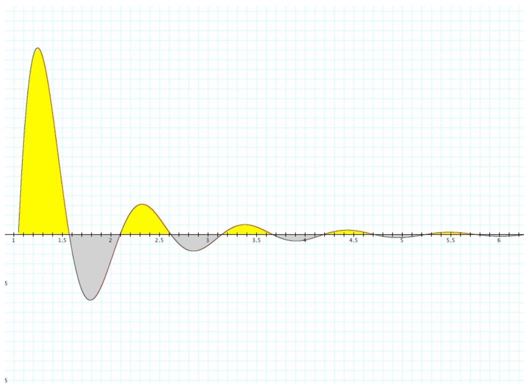
La funzione $\log x$ su $]0,1]$

L'integrazione di Riemann generalizzata

oppure potrebbe essere non limitato...



La funzione $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ su $[1,+\infty[$



Una funzione del tipo $\dfrac{\sin x}{x^3}$ su $[\frac{\pi}{3},+\infty[$

Chiaramente va fatto un limite di aree... ma cosa risulterà?

L'integrazione di Riemann generalizzata

Vediamo cosa succede in due esempi precedenti, cioè $\boxed{\log x \text{ su }]0,1[}$ e $\boxed{\frac{2}{\sqrt{x}} \text{ su } [1,+\infty[}$: le due "aree illimitate" sembrano simili, eppure...

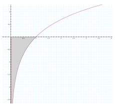


Fig.

$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \log t\, dt = \lim_{x\to 0^+} (t(\log t - 1))]_x^1 = (-1) - \lim_{x\to 0^+} x(\log x - 1) = -1$$

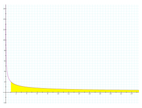


Fig.

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{2}{\sqrt{t}}\, dt = \lim_{x\to+\infty} (4\sqrt{t}]_1^x = \lim_{x\to+\infty} 4\sqrt{x} - (4) = +\infty$$

Dunque la risposta è... DIPENDE!

Il problema va affrontato con attenzione. Notiamo almeno che:

- Un integrale generalizzato è una “somma infinita”: ci aspettiamo dunque forti analogie con le serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- In particolare, bisogna capire se un integrale generalizzato converge anche se non si sa calcolare la primitiva (capita spesso)