Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)
Autoverifica sull'integrazione generalizzata

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

giovedì 9 aprile 2009

Istruzioni generali. **(1)** Risolvere i quesiti senza guardare lo svolgimento che sarà fornito martedì 14/04 nella pagina web del corso. **(2)** Al termine, autovalutare la propria risoluzione con l'ausilio dello svolgimento indicato. **(3)** Da martedì 14/04 fino a venerdì 17/04 sarà possibile, seguendo il link che sarà attivato il 14/04 nella pagina web, comunicare via web in forma anonima i risultati dell'autovalutazione esercizio per esercizio, assieme a eventuali commenti.
Istruzioni per l'autovalutazione. **Ex. 1:** 30 pt (3×10 pt). **Ex. 2:** 30 pt (2×15 pt). **Ex. 3:** 20 pt. **Ex. 4:** 20 pt (dominio-segno-limiti 10 pt, crescenza-convessità-calcolo diretto 10 pt). **Totale:** 100 pt. Lo studente valuti da sè quanto assegnarsi per un'eventuale risoluzione solo parziale dei singoli quesiti.
Consigli. Questa verifica vuole aiutare lo studente a capire il proprio grado di comprensione degli argomenti trattati a lezione, dunque andrebbe svolta individualmente con impegno, usando lo svolgimento fornito solo per l'autovalutazione e per rendersi conto delle difficoltà incontrate nel lavoro solitario. Inoltre, per provare l'impegno di un esame, la verifica andrebbe affrontata col minor numero possibile di interruzioni (ad es. in una seduta da 3 ore, o in due sedute da 2 ore).

---

1. Dire prima se i seguenti integrali generalizzati convergono; poi, se sì, calcolarli.[1]

$$\text{(i)} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}\,dx\ , \qquad \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+3x+2\sin x}\ , \qquad \text{(iii)} \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin x + \sin 2x}{(1+\cos x)^{\frac{3}{4}}}\,dx\ .$$

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ convergono[2] i seguenti integrali generalizzati (nel secondo, supporre $\alpha \notin \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi$), e calcolarli per $\alpha = 0$.

$$\text{(i)} \quad \int_0^1 \frac{x^{\alpha+3}(e^{x^2}-1)^{\alpha}}{(1-x^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dx\ , \qquad \text{(ii)} \quad \int_1^{+\infty} (x-1)^{\frac{\alpha-3}{2}} (\log x)^{1-2\alpha} \cos(\alpha x)\,dx\ .$$

3. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x}+x^\alpha}.$$

Discutere l'integrabilità di $f_\alpha(x)$ e di $f_\alpha(x)\operatorname{arctg} x \sin x$ al variare di α.

4. Studiare l'andamento della funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}+1}\,dt$ senza calcolare una primitiva della funzione integranda $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}+1}$.
Solo dopo aver terminato lo studio precedente, calcolare una primitiva di $f(t)$ e, conseguentemente, la forma esplicita di $F(x)$.

---

[1] Per calcolare uno di questi tre integrali sarà utile sapere che $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.
[2] Distinguere tra integrabilità semplice e assoluta, anche in ciascuno dei punti esaminati.

Soluzioni.

1. Tutte le funzioni sono continue nei domini d'integrazione, dunque ivi localmente integrabili.

(i) $f(x)=\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}}$ è positiva in $]0,+\infty[$ e, poiché $f(x)\sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $f(x)\sim^*_{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}$, l'integrale converge. Per il calcolo serve una primitiva: integrando per parti si ha $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\operatorname{arctg} x\,dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}\operatorname{arctg} x|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}(-\frac{2}{\sqrt{x}})\frac{1}{x^2+1}\,dx = -(0-0)+2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$, e ponendo $u=\sqrt{x}$, da cui $dx=2u\,du$, si ottiene $2\int_0^{+\infty}\frac{2u}{u(u^4+1)}\,du = 4\int_0^{+\infty}\frac{1}{u^4+1}\,du = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{u^4+1}\,du = 2\frac{\pi\sqrt{2}}{2}=\pi\sqrt{2}$.

(ii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+3x+2\sin x}$ è positiva in $]0,+\infty[$, ed essendo $f(x)\sim^*_{+\infty}\frac{1}{x}$ l'integrale diverge a $+\infty$.

(iii) L'unico punto del dominio d'integrazione su cui $f(x)=\frac{\sin x+\sin 2x}{(1+\cos x)^{\frac{3}{4}}}$ non è definita è $-\pi$, dunque l'integrabilità va controllata solo lì. Conviene allora fare un cambio di variabile, per portare il problema in 0: basta porre $t=x+\pi$, da cui l'integrale $\int_0^{\pi}\frac{\sin(t-\pi)+\sin(2t-2\pi)}{(1+\cos(t-\pi))^{\frac{3}{4}}}\,dt = \int_0^{\pi}\frac{-\sin t+\sin 2t}{(1-\cos t)^{\frac{3}{4}}}\,dt = \int_0^{\pi}\frac{\sin t(2\cos t-1)}{(1-\cos t)^{\frac{3}{4}}}\,dt$. All'intorno di $t=0^+$ la funzione $g(t)=\frac{\sin t(2\cos t-1)}{(1-\cos t)^{\frac{3}{4}}}$ è positiva: ricordiamo che $\sin t\sim_0 t$ e $1-\cos t\sim^*_0 t^2$, dunque $g(t)\sim^*_0\frac{t}{(t^2)^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$, e l'integrale converge. Per il calcolo, poniamo $u=\cos t$ da cui $du=-\sin t\,dt$: si ricava $\int_0^{\pi}\frac{\sin t(2\cos t-1)}{(1-\cos t)^{\frac{3}{4}}}\,dt = \int_1^{-1}\frac{2u-1}{(1-u)^{\frac{3}{4}}}\,(-du) = \int_{-1}^{1}\frac{2u-1}{(1-u)^{\frac{3}{4}}}\,du$. Ponendo ancora $v=1-u$, si ottiene $\int_{-1}^{1}\frac{2u-1}{(1-u)^{\frac{3}{4}}}\,du = \int_2^0\frac{2(1-v)-1}{v^{\frac{3}{4}}}\,(-dv) = \int_0^2\frac{1-2v}{v^{\frac{3}{4}}}\,dv = \int_0^2(v^{-\frac{3}{4}}-2v^{\frac{1}{4}})\,dv = (4v^{\frac{1}{4}}-\frac{8}{5}v^{\frac{5}{4}}]_0^2 = 4\sqrt[4]{2}-\frac{8}{5}2\sqrt[4]{2}=\frac{4}{5}\sqrt[4]{2}$.

2. Indichiamo la funzione integranda con $f_\alpha(x)$.

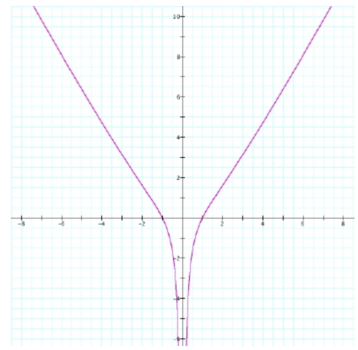
(i) L'integrabilità va controllata in $0^+,1^-$. Iniziamo da 0^+. Poiché $e^{x^2}-1\sim_0 x^2$, si ha $f_\alpha(x)\sim_0 x^{\alpha+3}(x^2)^\alpha = x^{3\alpha+3}$: dunque la condizione è $3\alpha+3>-1$, ovvero $\alpha>-\frac{4}{3}$. Vediamo ora 1^-. Si ha $1-x^2\sim^*_{1^-}(1-x)$, dunque $f_\alpha(x)\sim^*_{1^-}\frac{1}{(1-x)^{\frac{\alpha+1}{2}}}=(1-x)^{-\frac{\alpha+1}{2}}$, dunque la condizione è $-\frac{\alpha+1}{2}>-1$, ovvero $\alpha<1$. Dunque l'integrale converge (semplicemente o assolutamente non cambia nulla, perché la funzione ha segno costante sia all'intorno di 0^+ che di 1^-) se e solo se $-\frac{4}{3}<\alpha<1$. Ciò accade in particolare quando $\alpha=0$, caso in cui si ottiene $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. Ponendo $u=\sqrt{1-x^2}$ (da cui $x^2=1-u^2$ e $x\,dx=-u\,du$) si ha $\int_0^1\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_1^0(1-u^2)\frac{-u\,du}{u} = \int_0^1(1-u^2)\,du = (u-\frac{u^3}{3}]_0^1=\frac{2}{3}$.

(ii) L'integrabilità va controllata in $1^+,+\infty$. Vediamo 1^+, all'intorno del quale la funzione ha segno costante (perché $\cos\alpha\neq 0$ per ipotesi). Essendo $\log x\sim_{1^+}(x-1)$ e $|\cos\alpha x|\sim^*_{1^+}1$, si ha $f_\alpha(x)\sim^*_{1^+}(x-1)^{\frac{\alpha-3}{2}}(x-1)^{1-2\alpha}=(x-1)^{\frac{-3\alpha-1}{2}}$, da cui la condizione $\frac{-3\alpha-1}{2}>-1$, ovvero $\alpha<\frac{1}{3}$. Quanto a $+\infty$, se $\alpha=0$ la funzione è integrabile, sennò notiamo che ha segno oscillante. Vediamo l'assoluta integrabilità: posto $g_\alpha(x)=(x-1)^{\frac{\alpha-3}{2}}(\log x)^{1-2\alpha}$, vale $|f_\alpha(x)|\le g_\alpha(x)$; notando che $x^\beta(\log x)^\gamma$ è integrabile a $+\infty$ se ($\beta<-1$ e γ qualunque) oppure se ($\beta=-1$ e $\gamma<-1$), ricaviamo che $g_\alpha(x)$ è integrabile a $+\infty$ quando $\frac{\alpha-3}{2}<-1$, oppure quando ($\frac{\alpha-3}{2}=-1$ e $1-2\alpha<-1$), ovvero solo per $\alpha<1$: dunque $f_\alpha(x)$ è assolutamente integrabile a $+\infty$ quando $\alpha<1$. Il criterio di Abel-Dirichlet, d'altra parte, ci dice che l'integrale converge semplicemente a $+\infty$ quando $g_\alpha(x)$ è decrescente e infinitesima, e ciò accade quando $\frac{\alpha-3}{2}<0$ oppure quando ($\frac{\alpha-3}{2}=0$ e $1-2\alpha<0$) ovvero per $\alpha\le 3$; quando invece $\alpha>3$ l'integrale non converge (perché $g_\alpha(x)$ diverge a $+\infty$, e allora si può ragionare come ad esempio per $\int_1^{+\infty}x\sin x\,dx$). Si ha allora che l'integrale a $+\infty$ converge assolutamente per $\alpha<1$, e solo semplicemente per $1\le\alpha\le 3$. Dunque, ricapitolando, l'integrale proposto converge (e assolutamente) solo per $\alpha<\frac{1}{3}$. In particolare, quando $\alpha=0$ si ottiene $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}\,dx = (-\frac{2}{\sqrt{x-1}}\log x]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}(-\frac{2}{x\sqrt{x-1}})\,dx = (-0+0)+2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$; posto $u=\sqrt{x-1}$, da cui $x=u^2+1$ e $dx=2u\,du$ si ha poi $2\int_0^{+\infty}\frac{1}{(u^2+1)u}\,2u\,du = 4\operatorname{arctg} u]_0^{+\infty}=2\pi$.

3. L'integrabilità di $f_\alpha(x)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}+x^\alpha}$ su $\mathbb{R}_{>0}$ va controllata in 0^+ e $+\infty$. Iniziamo da 0^+, al cui intorno $f_\alpha(x)$ è negativa. Si ha $|x^2-1|\sim_{0^+}1$; quanto al denominatore si ha $\sqrt{x}+x^\alpha\sim^*_{0^+}\sqrt{x}$ se $\alpha\ge\frac{1}{2}$ e $\sqrt{x}+x^\alpha\sim^*_{0^+}x^\alpha$ se $\alpha<\frac{1}{2}$. Pertanto se $\alpha\ge\frac{1}{2}$ si ha $|f_\alpha(x)|\sim^*_{0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}$, integrabile; mentre se $\alpha<\frac{1}{2}$ si ha $|f_\alpha(x)|\sim^*_{0^+}\frac{1}{x^\alpha}=x^{-\alpha}$, dunque si ha integrabilità quando $-\alpha>-1$, ovvero $\alpha<1$, che è sempre vero. In sostanza, $f_\alpha(x)$ è integrabile in 0^+ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$. Passiamo ora a $+\infty$, al cui intorno $f_\alpha(x)$ è positiva. Si ha $x^2-1\sim_{+\infty}x^2$; quanto al denominatore, stavolta si ha $\sqrt{x}+x^\alpha\sim^*_{+\infty}\sqrt{x}$ se $\alpha\le\frac{1}{2}$ e $\sqrt{x}+x^\alpha\sim^*_{+\infty}x^\alpha$ se $\alpha>\frac{1}{2}$. Pertanto se $\alpha\le\frac{1}{2}$ si ha $f_\alpha(x)\sim^*_{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}$, ovviamente non integrabile; mentre se $\alpha>\frac{1}{2}$ si ha $f_\alpha(x)\sim^*_{+\infty}\frac{x^2}{x^\alpha}=x^{2-\alpha}$, dunque si ha integrabilità quando $2-\alpha<-1$, ovvero $\alpha>3$. Ricapitolando, $f_\alpha(x)$ in 0^+ è sempre integrabile, e in $+\infty$ per $\alpha>3$; dunque l'integrale esiste per $\alpha>3$.

Passiamo ora a $f_\alpha(x)\operatorname{arctg} x\,\sin x$. Tenendo presente che $\sin x\sim_{0^+}x$ e $\operatorname{arctg} x\sim_{0^+}x$, e ragionando come prima, se $\alpha\ge\frac{1}{2}$

si ha $|f_\alpha(x)| \sim^*_{0^+} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x}$, ovviamente integrabile; mentre se $\alpha < \frac{1}{2}$ si ha $|f_\alpha(x)| \sim^*_{0^+} \frac{x^2}{x^\alpha} = x^{2-\alpha}$, dunque si ha integrabilità quando $2-\alpha > -1$, ovvero $\alpha < 3$, sempre vera. Dunque si ha sempre integrabilità in 0^+ (a dire il vero, bastava accorgersi che $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x = o_0(f_\alpha(x))$, e applicare il criterio del confronto). Notiamo poi che $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x$ oscilla all'intorno di $+\infty$; procedendo come nell'esercizio precedente 2(ii) (stavolta $|f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x| \leq \frac{\pi}{2} f_\alpha(x)$) si ha che $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x$ è assolutamente integrabile a $+\infty$ quando $f_\alpha(x)$ è integrabile a $+\infty$, dunque (come visto) per $\alpha > 3$; inoltre, per Abel-Dirichlet si ha integrabilità semplice a $+\infty$ quando $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x$ è infinitesima a $+\infty$, e ciò accade per $\alpha > 2$. Ricapitolando, $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x$ in 0^+ è sempre integrabile, e in $+\infty$ assolutamente per $\alpha < 3$ e semplicemente per $2 < \alpha \leq 3$; pertanto, su tutto $\mathbb{R}_{>0}$ la funzione $f_\alpha(x) \operatorname{arctg} x \sin x$ è integrabile assolutamente per $\alpha < 3$ e semplicemente per $2 < \alpha \leq 3$.



4. Gli estremi di integrazione $\psi(x) = x^2$ e $\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$ hanno entrambi senso quando $x \neq 0$, e la funzione integranda $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}+1}$ è di classe $\mathcal{C}^\infty$ (dunque localmente integrabile) su tutto $\mathbb{R}$. Ne segue che il dominio di $F(x)$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; tuttavia, poiché la funzione $F(x)$ è pari (come si verifica immediatamente), la studieremo solo per $x > 0$. Poiché $f(t) \geq 0$, si ha $F(x) \geq 0$ se e solo se $\varphi(x) \leq \psi(x)$, ovvero per $x \geq 1$. Vediamo ora i limiti. Notando che $f(t)$ non è integrabile in $+\infty$ (infatti $f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}$), si ha $\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_{+\infty}^0 f(t)\,dt = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$. Derivando si ha $F'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{1}{x+1}(2x) - \frac{1}{\frac{1}{x}+1}(-\frac{2}{x^3}) = \frac{2}{x^2(x+1)}(x^3+1) = \frac{2(x^2-x+1)}{x^2}$, che è sempre positiva: dunque per $x > 0$ la funzione $F(x)$ è strettamente crescente. (Si noti che già a questo punto si può risalire facilmente ad una forma esplicita di $F(x)$ per $x > 0$: infatti, da $F'(x) = \frac{2(x^2-x+1)}{x^2} = 2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$ si ricava $F(x) = 2(x - \log x - \frac{1}{x}) + k$, e notando che deve essere $F(1) = 0$ si ha $k = 0$, da cui $F(x) = 2(x - \log x - \frac{1}{x})$. Per parità, una forma esplicita di $F(x)$ per $x \neq 0$ sarà dunque $F(x) = 2(|x| - \log|x| - \frac{1}{|x|})$.)
Derivando ulteriormente si ottiene $F''(x) = 2\frac{(2x-1)(x^2)-2x(x^2-x+1)}{x^4} = 2\frac{x-2}{x^3}$, dunque $F(x)$ è concava per $0 < x < 2$, convessa per $x > 2$ ed ha un flesso in $x = 2$.
Calcoliamo ora una primitiva di $f(t)$. Con la sostituzione $u = \sqrt{t}$, da cui $dt = 2u\,du$, si ottiene $\int f(t)\,dt = \int \frac{2u}{u+1}\,du = 2\int(1 - \frac{1}{u+1})\,du = 2(u - \log(u+1)) = 2(\sqrt{t} - \log(\sqrt{t}+1))$ da cui la forma esplicita $F(x) = (2(\sqrt{t} - \log(\sqrt{t}+1))]_{\frac{1}{x^2}}^{x^2} = 2(x - \log(x+1) - \frac{1}{x} + \log(\frac{x+1}{x}) = 2(x - \log x - \frac{1}{x})$, già trovata in precedenza (ovviamente siamo nel caso $x > 0$; in generale, per $x \neq 0$ sarà $F(x) = 2(|x| - \log|x| - \frac{1}{|x|})$ per parità, come pure già detto sopra). Si noti che $F(x) \sim_{+\infty} 2(x - \log x)$, dunque non esiste un asintoto obliquo (anche se la pendenza di F tende asintoticamente a 2).