

Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Programma del corso – Modalità dell'esame orale

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Docenti: Corrado Marastoni, Umberto Marconi

(Versione finale del 10/06/2009)

• **Programma del corso.** Le sigle [a], [b] e [c] sono per l'esame orale di teoria (vedi più sotto), e vanno intese come riferite a tutto ciò che è contenuto nella frase tra i due punti.

1. Integrazione generalizzata. Integrabilità e assoluta integrabilità generalizzata [a]. Criteri del confronto e di asintoticità [a]. Criterio dell'integrale per le serie numeriche [b]. Assoluta integrabilità implica integrabilità [a]. Variazione totale e funzioni a variazione limitata [c]. Teorema di Abel-Dirichlet [c]. La Gamma di Eulero [b]. Integrazione di funzioni complesse [b]. Funzioni integrali del tipo $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$.
2. Equazioni differenziali. Nozioni standard (equazione ordinaria, scalare, in forma normale, lineare, autonoma; integrale generale; ordine) [a]. Problema di Cauchy e conseguenze dell'esistenza ed unicità per le equazioni del 1o e 2o ordine [a]. Equazioni del 1o ordine a variabili separabili [b]. Equazioni lineari: forma generale; esistenza ed unicità globale; matrice wronskiana; struttura dello spazio delle soluzioni; sistema fondamentale di soluzioni e wronskiano; metodo della variazione delle costanti arbitrarie; principio di sovrapposizione [c]. Equazioni lineari del 1o ordine; uso della forma integrale delle soluzioni per lo studio dei limiti [b]. Equazioni lineari a coefficienti costanti: equazione caratteristica; sistema fondamentale di soluzioni; soluzione particolare per termini non omogenei della forma $P(x)e^{\gamma x}$; caso del 2o ordine con coefficienti reali [c]. Il Secondo Principio della Dinamica newtoniana; forze di gravità, elastica, viscosa.
3. Curve parametriche affini. Spazi vettoriali normati [c]. Norme classiche in \mathbb{R}^n , e relazioni tra loro [a]. Sup-norma in $C^0([a, b])$ [c]. Distanza e topologia associate ad una norma [c]. Norme equivalenti; tutte le norme in \mathbb{R}^n sono equivalenti (*no dim*) [c]. Coordinate polari in \mathbb{R}^2 , cilindriche e sferiche in \mathbb{R}^3 [a]. Curva affine; parametrizzazione, componenti, sostegno, curva piana [a]. Curve grafico, curve polari e relative parametrizzazioni [a]. Continuità e derivabilità; vettore derivato e sua unicità [a]. Derivabilità implica continuità, ed equivale alla derivabilità per componenti [a]. Cambio di parametro, formula del cambio di velocità [b]. Curve di classe C^k [b]. Integrale vettoriale: linearità e disuguaglianza fondamentale [c]. Teorema del valor medio per le curve [c]. Curva rettificabile; rettificabilità delle curve di classe C^1 a tratti e formula della lunghezza di una curva [c]. Elemento d'arco e ascissa curvilinea [b]. Integrale al differenziale d'arco ed invarianza per cambi di parametro [b]. Baricentro e momento d'inerzia di una curva materiale in \mathbb{R}^3 [b].
4. Topologia degli spazi affini. Strutture di spazio vettoriale e affine su \mathbb{R}^n [a]. Base fondamentale di intorno di un punto [a]. Insiemi limitati [a]. Punto all'infinito ∞_n e sua base fondamentale di intorno [a]. Limiti di successioni in \mathbb{R}^n e riduzione a limiti in \mathbb{R} [a]. Ogni successione limitata in \mathbb{R}^n ammette una sottosuccessione convergente [b]. Insieme aperto, chiuso; punto interno, di chiusura, di accumulazione, isolato, di frontiera e relazioni tra queste nozioni [b]. Insiemi compatti e sequenzialmente compatti [b]. Insiemi connessi e connessi per archi [b]. In \mathbb{R}^n la compattezza equivale alla compattezza sequenziale [b]. Connessione per archi implica connessione [b]. Funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, componenti [a]. Curve ($n = 1$) e funzioni scalari ($m = 1$) [a]. Nozione di limite; varie definizioni, e riduzione al caso scalare [a]. Funzioni continue [a]. Funzioni lipschitziane [b]. Lipschitzianità implica continuità [b]. Continuità di norma, proiezioni canoniche, funzioni lineari [c]. Continuità equivale a continuità di ogni componente [a]. Limiti e limiti di restrizioni [b]. Condizioni sufficienti per l'esistenza di un limite [b]. Funzioni continue, aperti e chiusi [c]. Insiemi definiti con equazioni-disequazioni di funzioni continue: apertura, chiusura, compattezza [c]. Immagini continue di compatti sono compatte [c]. Teorema di Weierstrass [b]. Immagini continue di connessi (per archi) sono connesse (per archi) [c]. Teorema degli zeri [c]. Omeomorfismo [c].
5. Calcolo differenziale negli spazi affini. Derivate direzionali, derivate parziali [a]. Esistenza delle derivate direzionali e continuità sono indipendenti [a]. Differenziabilità; unicità del differenziale [a]. Per le curve, differenziabilità equivale a derivabilità [a]. Differenziabilità implica continuità e esistenza delle derivate direzionali [a]. La matrice jacobiana è associata al differenziale [b]. Gradiente [b]. Funzione affine approssimante [b]. Differenziabilità con continuità [b]. Funzioni di classe C^1 [b]. Teorema del differenziale totale (*no dim*) [b]. Linearità e regola della catena per la differenziazione (*no dim*) [b]. Derivata totale rispetto a un parametro, e suo significato [c]. Teorema

del valor medio. Differenziabilità e costanza (*no dim*)[c]. Derivate ulteriori [b]. Teorema di Schwarz (*no dim*)[b]. Matrice Hessiana [b]. Formula di Taylor (*no dim*)[b]. Diffeomorfismo; differenziale della funzione inversa [b]. Punti stazionari [b]. Estremi ed estremanti locali [b]. Gli estremanti di funzioni differenziabili sono stazionari [b]. Matrice hessiana e natura dei punti stazionari [c]. Teorema della funzione implicita: caso base [c]. Teorema della funzione implicita: caso di un'equazione, caso dei sistemi (*no dim*)[c]. Diffeomorfismo locale; teorema di invertibilità locale [c]. Immersioni e sommersioni [c]. Una funzione su un aperto che induce un diffeomorfismo con l'immagine è un'immersione [c]. Complementi sulle funzioni integrali e sul problema di Cauchy.

6. Varietà differenziali negli spazi affini. Curve piane regolari: tre definizioni equivalenti [a]. Varietà: tre definizioni equivalenti [b]. Grafici e insiemi di livello [b]. Varietà parametrica [c]. Spazio tangente a una varietà differenziale in un punto: varie definizioni e loro equivalenza [b]. Significato geometrico del gradiente [b]. Lo spazio tangente affine ad un grafico coincide col grafico della funzione affine approssimante [b]. Fibrato tangente ad una varietà differenziale [c]. Campo vettoriale [c]. Morfismo di varietà differenziali e applicazione tangente [c]. Punti stazionari di una funzione su una varietà [c]. Gli estremi locali di una funzione vincolati su una varietà sono punti stazionari [c]. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange [c]. Ricerca degli estremi assoluti di una funzione differenziabile su un insieme compatto decomponibile in unione disgiunta di varietà.

• Modalità dell'esame orale.

- La prova orale di teoria, facoltativa, si può sostenere solo dopo aver superato la prova scritta di esercizi (con voto $S \geq 18$), e *solo nella sessione in cui si è superato lo scritto* (ovvero: uno studente che supera lo scritto in uno degli appelli di giugno-luglio 2009 potrà sostenere l'orale entro l'ultimo appello di luglio 2009; uno studente che supera lo scritto in uno degli appelli di settembre 2009 potrà sostenere l'orale entro l'ultimo appello di settembre 2009).
- **Se non si sostiene l'orale.** Rinunciando all'orale, il voto finale F dell'esame sarà il minimo tra S e 19 (diciannove).
- **Se si sostiene l'orale.** Gli studenti che avranno iniziato a sostenere la prova orale perderanno il diritto a registrare il voto dello scritto secondo la modalità precedente: il voto finale F uscirà da una valutazione complessiva delle prove scritte e orali. Lo studente che decide di sostenere la prova orale è invitato nel suo interesse, oltre che a presentarsi con una preparazione adeguata (l'orale non è affatto una formalità ma un vero esame, per certi versi più impegnativo e imprevedibile dello scritto), anche a tener presente i seguenti punti.
 - Il voto finale F sarà al massimo $S + 3$, intendendo $30L$ come 31 (eccezione: se $S = 26$ può essere $F \leq 30$) ma non vi sono limiti per il minimo: in caso di esito negativo dell'orale, lo studente potrebbe avere un voto F molto ridotto rispetto a S , o venir invitato a ripetere la prova orale con voto S ribassato, o addirittura venir invitato a ripetere la prova scritta (voto S annullato).
 - La prova orale di teoria potrà essere svolta secondo tre modalità (ma si ricordi che sarà comunque $F \leq S + 3$ a parte l'eccezione). Dei vari argomenti che lo studente dovrà preparare per la prova (proposizioni, formule, definizioni equivalenti etc.) potranno venir chieste anche le dimostrazioni, tranne il caso in cui sia specificato altrimenti (scrivendo “(*no dim*)”).

* Prova orale ridotta (voto finale $F \leq 23$): una domanda su argomenti di tipo [a].

* Prova orale intermedia (voto finale $F \leq 27$): due domande, di cui una su argomenti di tipo [a] e una di tipo [b].

* Prova orale completa (voto finale $F \leq 30L$): tre domande, di cui una di tipo [a], una [b] e una [c].

A titolo di esempio, vediamo tre situazioni-tipo. • Se lo studente Tizio ha $S = 30$ e decide di sostenere una prova orale ridotta egli otterrà comunque $F \leq 23$ (nelle sua situazione, Tizio dovrebbe sostenere un orale completo: scegliendo di affrontare un orale ridotto, chiaramente egli spreca gran parte delle possibilità dategli dallo scritto). • Se lo studente Caio ha $S = 19$ e decide di sostenere una prova orale intermedia o completa egli otterrà comunque $F \leq 19 + 3 = 22$ (avendo una speranza di voto finale inferiore a 23, la decisione di Caio di sostenere un orale più difficile di quello ridotto è tecnicamente sbagliata: se egli ambisce ad un voto alto, l'unica via è di rifare il suo scritto per cercare di migliorarlo e poi sostenere la prova orale con altre prospettive). • Lo studente Sempronio che ha $S = 23$ potrà sostenere un orale ridotto (con la speranza di confermare il suo 23) o un orale intermedio (con la speranza di arrivare a 26); sostenere un orale completo è per lui inutile, così come lo era per Caio.