Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Prima Prova Parziale (14/05/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema A

1. (a) Discutere per $\alpha \geq 0$ dominio[(1)] e integrabilità di $f_\alpha(x) = \dfrac{|x|^{\alpha-\frac{1}{2}}\, e^{(\alpha-1)x}}{|x|^{2\alpha}+x-2}$; calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

(b) Studiare la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x f_{\frac{1}{2}}(t)\,dt$.

2. (a) Determinare le soluzioni per $x > 0$ dell'equazione differenziale $\log(x+1) = 2x\,y' + y$, dicendo quali sono prolungabili come tali anche in $x = 0$. Trovare poi le soluzioni di $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$, vedendo quali di esse appaiono tra le precedenti.

(b) Data l'equazione differenziale $(x+1)e^x\,y' - y^2 = 0$ indagare a priori quanto possibile su crescenza, convessità e eventuali simmetrie delle soluzioni. Calcolare poi la soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(0) = \alpha$ (ove $\alpha \geq 0$), e dire quali sono i suoi limiti notevoli.

3. (a) Disegnare la curva $\mathcal{A}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = 6\cos 2\theta$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. Dopo averne trovato un'opportuna parametrizzazione γ, calcolare la retta tangente a $\mathcal{A}$ nel suo punto dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$, e scrivere correttamente l'integrale $\int_\gamma (x-2y)\,d\sigma$.

(b) Sia $\mathcal{B}$ il ramo destro di iperbole di asintoti $x + 2y - 5 = 0$ e $x - 2y + 3 = 0$ passante per il punto $(2,2)$. Trovare un'equazione cartesiana $f(x,y) = 0$ che definisce $\mathcal{B}$, e ricavarne un'opportuna parametrizzazione. Usando poi in modo opportuno le funzioni iperboliche, determinare un'altra parametrizzazione di $\mathcal{B}$ ed esibire il cambio di parametro. Infine, scrivere correttamente gli integrali che definiscono il baricentro geometrico del tratto di $\mathcal{B}$ contenuto nella striscia $0 \leq y \leq 3$.

4. (a) Disegnare il dominio di $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(|x|+y)}{x^2+y^2+2x}$, gli zeri ed il segno; parlare della continuità; calcolarne i limiti notevoli nei punti d'accumulazione in $\overline{\mathbb{R}^2}$ del dominio. Considerato poi il segmento $I = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$, dire a priori come sarà fatta $f(I)$, e quindi calcolarla.

(b) Disegnare gli insiemi $L_1 = \{(x,y) : (x+2)^2 + 1 \leq |y+1|\,,\ |y| \leq 3\}$, $L_2 = \{(x,y) : y = \log(x-1)\,,\ y \geq -2\}$ e $L_3 = \{(x,y) : 2\sin(x^2+y^2) > 1\,,\ |x| > 3\}$, descrivendone le proprietà topologiche (aperti, chiusi, compatti, connessi...). Su quali di essi la funzione f ammette estremi assoluti?

---

(1) Per vedere dove si annulla il denominatore, si potrà fare un confronto grafico tra le funzioni $|x|^{2\alpha}$ e $2 - x$.

Analisi Matematica II – Prima Prova Parziale (14/05/2009) – Tema A – Soluzioni.

1. (a) Le cose che possono influire sul dominio di $f_\alpha(x) = \frac{|x|^{\alpha-\frac12}\, e^{(\alpha-1)x}}{|x|^{2\alpha}+x-2}$ con $\alpha \geq 0$ sono la potenza $|x|^{\alpha-\frac12}$ (se $\alpha - \frac12 \leq 0$ — ovvero se $0 \leq \alpha \leq \frac12$ — deve essere $x \neq 0$), la potenza $|x|^{2\alpha}$ (se $2\alpha \leq 0$ — ovvero se $\alpha = 0$ — deve essere $x \neq 0$, ma ciò è ricompreso in quanto appena detto per l'altra potenza) e il denominatore $|x|^{2\alpha}+x-2$ (esso si annulla se e solo se $|x|^{2\alpha} = 2-x$, e un semplice confronto grafico tra le funzioni $|x|^{2\alpha}$ e $2-x$ mostra che ciò avviene sempre quando $x = 1$, e se $2\alpha > 1$ — cioè se $\alpha > \frac12$ — anche in un altro punto $\tilde x_\alpha < -1$). Ricapitolando, se $0 \leq \alpha \leq \frac12$ i punti da escludere dal dominio di $f_\alpha(x)$ sono 0 e 1, mentre se $\alpha > \frac12$ sono $\tilde x_\alpha$ e 1. È dunque in tali punti, oltre che in $\mp\infty$, che l'integrabilità va controllata. • In $+\infty$, a causa dell'esponenziale si ha che $f_\alpha(x)$ è integrabile se $0 \leq \alpha < 1$, non integrabile se $\alpha > 1$, mentre quando $\alpha = 1$ si ottiene $f_1(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|^2+x-2} \sim_{+\infty} x^{-\frac32}$ e dunque è integrabile per asintoticità. • In $-\infty$, con considerazioni analoghe si ha integrabilità se $\alpha \geq 1$ e non integrabilità se $0 \leq \alpha < 1$. • In $1^\mp$ si ha $|f_\alpha(x)| \sim^*_1 \frac{1}{|x^{2\alpha}+x-2|} \sim^*_1 \frac{1}{|x-1|}$ (per quest'ultima asintoticità si noti che se $\alpha = 0$ essa è evidente, mentre se $\alpha > 0$ si ottiene $\lim_{x\to1} \frac{x^{2\alpha}+x-2}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{2\alpha x^{2\alpha-1}+1}{1} = 2\alpha > 0$). Dunque $f_\alpha(x)$ non è mai integrabile in 1. • Se $\alpha > \frac12$ c'è poi da guardare $\tilde x_\alpha$: ma, ancora una volta, si ha $|f_\alpha(x)| \sim^*_{\tilde x_\alpha} \frac{1}{|x-\tilde x_\alpha|}$ e dunque $f_\alpha(x)$ non è mai integrabile in $\tilde x_\alpha$. • Infine, se $0 \leq \alpha \leq \frac12$ c'è da guardare $0^\mp$: ed essendo in tal caso $|f_\alpha(x)| \sim^*_0 |x|^{\alpha-\frac12}$, la condizione d'integrabilità diventa $\alpha - \frac12 > -1$, che per $\alpha \geq 0$ è sempre vera.
• Per quanto detto, l'integrale proposto $\int_2^{+\infty} f_1(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}\,dx$ è convergente. Per il calcolo, col cambio $x = u^2$ si ottiene $2\int_{\sqrt2}^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+u^2-2}\,du = \frac23 \int_{\sqrt2}^{+\infty} (\frac{1}{u^2-1} + \frac{2}{u^2+2})\,du = \frac23 (\frac12 \log\frac{u-1}{u+1} + \sqrt2 \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt2})]_{\sqrt2}^{+\infty} = \frac23(\sqrt2\frac{\pi}{2}) - \frac23(\frac12\log\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2+1} + \sqrt2\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}\sqrt2 + \frac23\log(\sqrt2+1) \sim 1{,}3$.

(b) (Figura 1) $F(x) = \int_0^x f_{\frac12}(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{|t|+t-2}\,dt$ è definita per $x < 1$ (infatti la funzione integranda è localmente integrabile in $]-\infty,1[$ e in $]1,+\infty[$ e perciò, dovendo calcolarne l'integrale con punto iniziale 0 e fino a x, ciò è possibile solo scegliendo $x \in]-\infty,1[$). Inoltre, poiché la funzione integranda è anche continua in $]-\infty,1[$, per Torricelli siamo già certi che $F(x)$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$. Quanto a zeri e segno, notiamo che per $t \in]-\infty,1[$ si ha $f_{\frac12}(t) \leq 0$: ne deduciamo che vale $F(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, e $F(x) > 0$ se e solo se $x < 0$. Ora, per $t < 0$ si ha $f_{\frac12}(t) = -\frac12 e^{-\frac{t}{2}}$, che si integra subito ottenendo $e^{-\frac{t}{2}}$: dunque se $x < 0$ si ricava la forma finita $F(x) = (e^{-\frac{t}{2}}]_0^x = e^{-\frac{x}{2}} - 1$, che si studia e disegna facilmente (è un esponenziale strettamente decrescente e abbassato di 1, dunque il limite per $x \to -\infty$ è $+\infty$). Possiamo perciò concentrarci sul caso $0 < x < 1$, in cui si ha $f_{\frac12}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}$ che non ha primitiva elementare: derivando si ottiene $F'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}$, sempre negativa, perciò F è strettamente decrescente anche per $0 < x < 1$. Notiamo poi che $F'_-(0) = \lim_{x\to0^-}(\frac12 e^{-\frac{x}{2}} - 1) = -\frac12$ e $F'_+(0) = \lim_{x\to0^+}(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}) = -\frac12$ sono uguali tra loro, e dunque, come atteso, $F(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto il suo dominio. Manca ancora il limite notevole per $x \to 1^-$, che coincide con l'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}\,dt$: essendo la funzione integranda negativa e dell'ordine di $\frac{1}{t-1}$, esso vale $-\infty$.

2. (a) L'equazione $2xy' + y = \log(x+1)$ è lineare del primo ordine, definita per $x > -1$; visto che vengono richieste le soluzioni per $x > 0$, possiamo portarla in forma normale dividendo per x, ottenendo $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{2x}$ e $q(x) = \frac{\log(x+1)}{2x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \frac12 \log x = \log\sqrt{x}$; posto $u = \sqrt{x}$, si ha poi $\int e^{P(X)} q(x)\,dx = \int \sqrt{x}\frac{\log(x+1)}{2x}\,dx = \int \log(u^2+1)\,du = u\log(u^2+1) - \int u\frac{2u}{u^2+1}\,du = u\log(u^2+1) - 2u + 2\operatorname{arctg} u = \sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, dunque l'integrale generale per $x > 0$ è $y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + k) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + k\frac{1}{\sqrt{x}}$ con $k \in \mathbb{C}$. Di queste funzioni, la sola prolungabile per continuità in $x = 0$ è quella con $k = 0$, ovvero $y_0(x) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ con valore $y_0(0) = 0$; in realtà, essendo $y_0(x) = 1 + x + o_0(x) - 2 + 2\frac{\sqrt{x} - \frac13 x\sqrt{x} + o_0(x^2)}{\sqrt{x}} = \frac13 x + o_0(x)$ si ha anche prolungabilità come classe $\mathcal{C}^1$, con $y_0'(0) = \frac13$; ed essendo $2\cdot0\cdot y_0'(0) + y_0(0) = \log(0+1) = 0$ si tratta effettivamente di una soluzione su tutto $[0,+\infty[$. • L'equazione $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; scritta $y'' + 2y' + 3y = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = 3e^{-x}$ e $b_2(x) = x + 4$, si trovano rapidamente le soluzioni $y(x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt2 x) + B\sin(\sqrt2 x) + \frac32) + \frac19(3x+10)$ con $A, B \in \mathbb{C}$, nessuna delle quali appare tra le precedenti.

(b) (Figura 2) L'equazione differenziale $(x+1)e^x\,y' - y^2 = 0$ è del primo ordine a variabili separabili. Da $(x+1)e^x\,y' = y^2$ si ricava subito che un'eventuale soluzione $\mathcal{C}^1$ definita in $x = -1$ deve ivi annullarsi; per $x \neq -1$ si ricava invece $y' = \frac{y^2\,e^{-x}}{x+1}$, dunque le soluzioni crescono per $x > -1$ e decrescono prima. Per quanto riguarda poi le soluzioni $\mathcal{C}^2$, derivando ambo i membri rispetto x si trova $y'' = \frac{(2yy'e^{-x} - y^2e^{-x})(x+1) - y^2e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{y^2e^{-x}}{(x+1)^2}(2ye^{-x} - x - 2)$, dunque tali soluzioni sono convesse sopra il grafico della funzione $y = \frac12(x+2)e^x$ e concave sotto. Se $\varphi(x)$ è soluzione per $x > 0$, con calcoli del tipo già visto più volte risulta che ne' $\varphi(-x)$ ne' $-\varphi(-x)$ sono soluzioni per $x < 0$, dunque

non vi sono simmetrie evidenti. Passiamo ora al calcolo della soluzione $y_\alpha(x)$ tale che $y_\alpha(0) = \alpha \geq 0$: se $\alpha = 0$ si ha la soluzione nulla $y_0(x) \equiv 0$, altrimenti separando le variabili e integrando si ottiene $\int_\alpha^y \frac{1}{\eta^2}\,d\eta = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$, ovvero $-\frac{1}{y} + \frac{1}{\alpha} = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$, da cui $y_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt}$. Ora, della funzione $\varphi(x) := \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$ non si può dare un'espressione elementare, ma si possono tuttavia dire alcune cose: essa è definita in $]-1,+\infty[$, si annulla in $x = 0$, è strettamente crescente (la sua derivata è $\varphi'(x) = \frac{e^{-x}}{x+1} > 0$), soddisfa $\lim_{x\to -1^+}\varphi(x) = \int_0^{-1}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt = -\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt =: \ell \in \mathbb{R}_{>0}$ (un disegno del grafico di $\frac{e^{-x}}{x+1}$ mostra che $\ell \sim 0{,}6$): ne ricaviamo che se $0 < \alpha \leq \frac{1}{\ell}$ la funzione $y_\alpha(x)$ è definita in $]-1,+\infty[$, mentre se $\alpha > \frac{1}{\ell}$ (ovvero se $\frac{1}{\alpha} < \ell$) essa è definita in un intervallo $]-1, x_\alpha[$, intorno di $x = 0$, ove $x_\alpha > 0$ è il punto tale che $\int_0^{x_\alpha}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt = \frac{1}{\alpha}$. I limiti notevoli di $y_\alpha(x)$ sono allora $\lim_{x\to-1^+} y_\alpha(x) = 0^+$ (infatti il denominatore tende a $+\infty$), mentre se $0 < \alpha < \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1-\alpha\ell}$, se $\alpha = \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = +\infty$, e se $\alpha > \frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to x_\alpha^-} y_\alpha(x) = +\infty$.

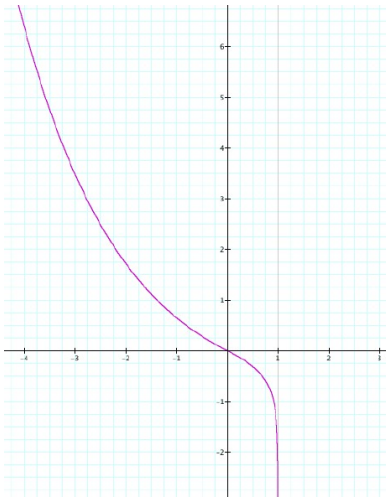
3. (a) (Figura 3) La curva $\mathcal{A}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = 6\cos 2\theta$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$ è un petalo di *rodonea* (dal greco *rhodon*, "rosa"), parametrizzabile nel modo consueto con $\gamma : [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta) = (6\cos 2\theta\cos\theta, 6\cos 2\theta\sin\theta)$. Il punto di $\mathcal{A}$ dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$ è $\gamma(\frac{\pi}{6}) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$; derivando si ha $\gamma'(\theta) = 6(-2\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta, -2\sin 2\theta\sin\theta + \cos 2\theta\cos\theta)$, da cui $\gamma'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{3}{2}(7,\sqrt{3})$, perciò la retta tangente cercata ha forma parametrica $\{(x,y) = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}) + t(7,\sqrt{3}) : t \in \mathbb{R}\}$ e cartesiana $\sqrt{3}\,x - 7y + 6 = 0$. Infine, l'elemento d'arco è $d\sigma = \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta = 6\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\,d\theta$, perciò $\int_\gamma (x-2y)\,d\sigma = 36\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta(\cos\theta - 2\sin\theta)\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\,d\theta$.

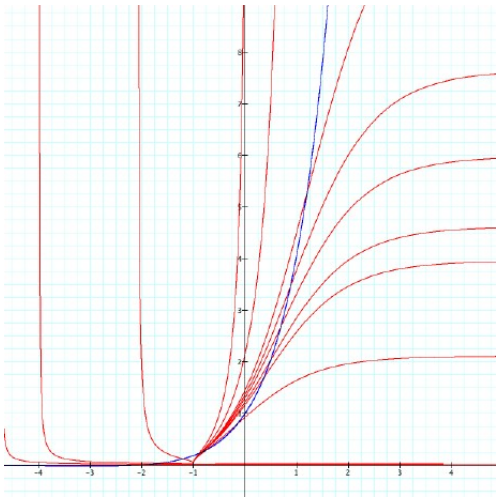
(b) (Figura 3) Nel riferimento traslato $(X,Y) = (x-1, y-2)$ l'equazione dell'iperbole $\mathcal{B}$ sarà del tipo $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ con $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, ovvero $\frac{X^2}{a^2} - \frac{4Y^2}{a^2} = 1$; e il passaggio per il punto $(X,Y) = (1,0)$ dà $a = 1$. Si ottiene pertanto il luogo $X^2 - 4Y^2 = 1$ da cui, rimettendo le coordinate (x,y), si ottiene $(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 1$, ovvero $f(x,y) = (x-1)^2 - 4(y-2)^2 - 1 = 0$. Trattandosi del ramo destro, da $f(x,y) = 0$ conviene esplicitare $x(y)$ tenendo il segno più, ottenendo $x(y) = 1 + \sqrt{4(y-2)^2+1}$, da cui la parametrizzazione $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\chi(y) = (x(y), y)$. Ricordando che le funzioni iperboliche $(\cosh t, \sinh t)$ parametrizzano il ramo destro dell'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = 1$, traslando ed adattando alla situazione presente si ha una parametrizzazione alternativa di $\mathcal{B}$ data da $\widetilde{\chi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ con $\widetilde{\chi}(t) = (1 + \cosh t, 2 + \frac{1}{2}\sinh t)$ (si noti infatti che $(f\circ\widetilde{\chi})(t) \equiv 0$ per ogni t); e il cambio di parametro è $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato da $y = \alpha(t) = 2 + \frac{1}{2}\sinh t$. Infine, usando la parametrizzazione χ, la lunghezza del tratto di $\mathcal{B}$ contenuto nella striscia $0 \leq y \leq 3$ è data da $L = \int_0^3 \sqrt{x'(y)^2+1}\,dy$, e il baricentro geometrico è il punto $(x_{\mathcal{B}}, y_{\mathcal{B}}) = \left(\frac{1}{L}\int_0^3 x(y)\sqrt{x'(y)^2+1}\,dy,\ \frac{1}{L}\int_0^3 y\sqrt{x'(y)^2+1}\,dy\right)$.

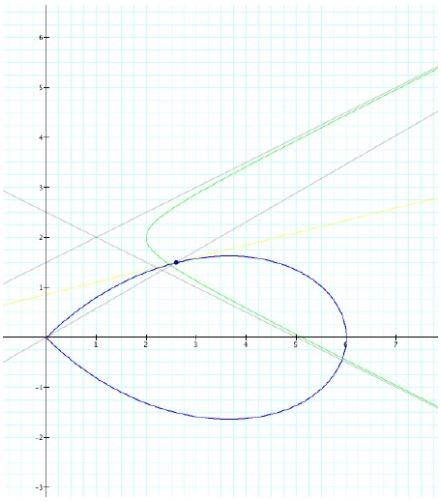
4. (a) (Figura 4) Il dominio di $\frac{\operatorname{arctg}(|x|+y)}{x^2+y^2+2x}$ si ottiene rimuovendo dal piano $\mathbb{R}^2$ il luogo $x^2 + y^2 + 2x = 0$, ovvero la circonferenza C di centro $(-1,0)$ e raggio 1; in tale dominio f è continua, si annulla sul grafico $\Gamma = \{y = -|x|\}$ ed ha segno dato dal quoziente tra i segni del numeratore (positivo sopra Γ e negativo sotto) e del denominatore (positivo fuori dalla circonferenza e negativo dentro). I limiti notevoli sono nei punti di C e in ∞_2. In un qualsiasi punto di C diverso da $O(0,0)$ e da $A(-1,-1)$ (le due intersezioni con Γ) il limite è $\pm\infty$, col segno che dipende dal fatto che si tenda al punto da una zona in cui f è $\gtrless 0$; invece nei punti O e A il limite non esiste, perché tendendovi lungo Γ la funzione è nulla ma in ogni loro intorno vi sono punti di C diversi da loro, in cui –come visto– f diverge. Quanto a ∞_2, si noti che il numeratore è limitato mentre al denominatore c'è essenzialmente il quadrato della distanza di (x,y) dal centro $(-1,0)$, perciò è probabile che il limite valga 0: per vederlo con precisione, preso un qualsiasi $r > 1$, al di fuori della circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio r si ha $|f(x,y)| = \frac{|\operatorname{arctg}(|x|+y)|}{|(x-1)^2+y^2-1|} \leq \frac{\pi/2}{r^2-1}$, dunque quando $r \to +\infty$ si può concludere per confronto. Infine, il segmento $I = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$ è connesso per archi e compatto, ed è tutto contenuto nel dominio di f che è continua: dunque possiamo già dire che anche l'immagine $f(I)$ è connessa per archi e compatta, perciò non potrà che essere un intervallo compatto $[a,b]$. Quanto al calcolo, per definizione si ha $f(I) = \{f(x,1-x) : 0 \leq x \leq 1\} = \{\frac{\operatorname{arctg}(|x|+1-x)}{x^2+(1-x)^2+2x} : 0 \leq x \leq 1\} = \{\frac{\pi/4}{2x^2+1} : 0 \leq x \leq 1\} = [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ (si noti che $u(x) := \frac{\pi/4}{2x^2+1}$ è continua e decrescente in $[0,1]$, dunque $u([0,1]) = [u(1), u(0)]$).

(b) (Figura 5) • L'insieme $L_1 = \{(x,y) : (x+2)^2 + 1 \leq |y+1|\,,\ |y| \leq 3\}$ è l'intersezione tra le parti interne (chiuse) delle parabole $y = (x+2)^2$ e $y = -(x+2)^2 - 2$ con la striscia orizzontale chiusa $0 \leq y \leq 3$, dunque è un compatto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con due componenti connesse. Pur essendo L_1 compatto, f non vi assume estremi assoluti: infatti Weierstrass non si può applicare perché L_1 non è contenuto nel dominio di f, e poi esso contiene dei punti di C nei quali f diverge a $\pm\infty$. • L'insieme $\{(x,y) : y = \log(x-1)\,,\ y \geq -2\}$ è il tratto del grafico $y = \log x$ che sta sopra la retta orizzontale $y = -2$ (compreso il punto di intersezione $Q(1+e^{-2}, -2)$): si tratta di un arco chiuso e illimitato di $\mathbb{R}^2$, tutto contenuto nel dominio di f. Non essendo L_2 compatto, non possiamo affermare che f vi assume estremi assoluti usando Weierstrass: tuttavia in questo caso, in cui $\lim_{\infty_2} f(x,y) = 0$ e l'insieme in questione è chiuso, si può dimostrare che è comunque vero usando il seguente ragionamento standard. Notiamo intanto che L_2 contiene dei punti in cui $f > 0$ (ad esempio il punto $P(2,0)$) e altri in cui $f < 0$ (ad esempio l'estremo $Q(1+e^{-2}, -2)$); preso un qualsiasi $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \max\{f(P), |f(Q|\}$, per definizione di limite sappiamo che esiste $M_\varepsilon > 0$ tale che se $\|(x,y)\| > M_\varepsilon$ allora $|f(x,y)| < \varepsilon$; ma allora, detta B_ε la palla

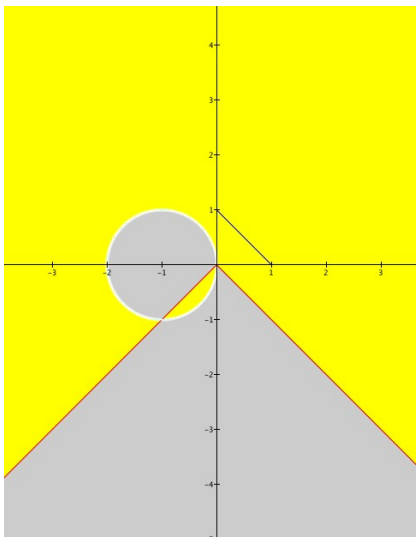
chiusa di centro O e raggio M_ε, gli eventuali estremi di f su L_2 devono coincidere con gli eventuali estremi di f su $L_2 \cap B_\varepsilon$ (perché fuori da B_ε si ha $|f| < \varepsilon$, e, come visto con P e Q, in $L_2 \cap B_\varepsilon$ la funzione assume valori superiori a ε e inferiori a $-\varepsilon$), e questi ultimi esistono per Weierstrass perché $L_2 \cap B_\varepsilon$ è un compatto tutto contenuto nel dominio di f, che è continua. • L'insieme $L_3 = \{(x,y) : 2\sin(x^2+y^2) > 1\,,\ |x| > 3\}$ può essere scritto anche come $L_3 = \bigcup_{k\geq 0}\{(x,y) : \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x^2+y^2 < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\} \cap \{|x| > 3\}$: si tratta di una famiglia infinita di corone circolari aperte centrate in O delle quali si prendono però i soli punti con ascissa > 3, aperto complementare della striscia verticale chiusa $-3 \leq x \leq 3$. Dunque L_3 è un aperto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con infinite componenti connesse, interamente contenuto nel dominio di f: però, non trattandosi di un chiuso di $\mathbb{R}^2$, non possiamo applicare il ragionamento fatto per L_2 e allo stato attuale delle nostre conoscenze non siamo in grado di dire se f ammetta o no estremi assoluti su di esso (dopo la seconda parte del corso lo saremo).

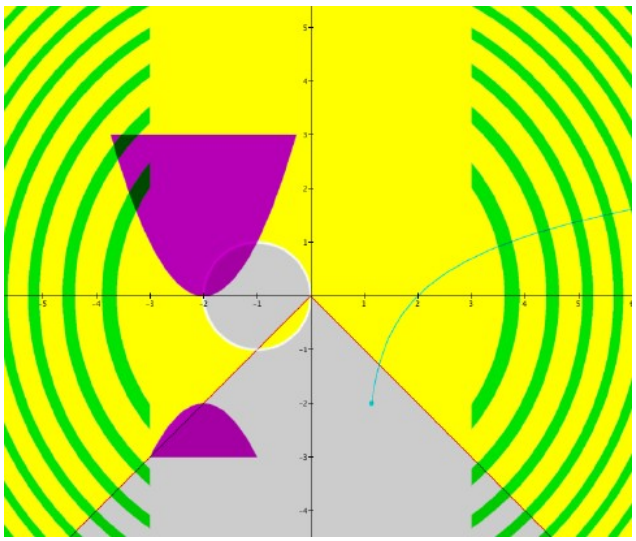






1. La funzione integrale $F(x)$ di (1.b). **2.** Alcune soluzioni $y_\alpha(x)$ di (2.b) (in rosso); la curva di cambio concavità (in blu). **3.** Le curve di (3.a-b).





4. Zeri (rosso), segno di f (> 0 in giallo, < 0 in grigio) e il segmento I di (4.a). **5.** Gli insiemi L_1 (viola), L_2 (azzurro) e L_3 (verde) di (4.b).

Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Prima Prova Parziale (14/05/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome _____ Matr. _____ - _____
IN STAMPATELLO SF / SA

Tema B

1. (a) Discutere per $\beta \geq 0$ dominio[1] e integrabilità di $f_\beta(x) = \dfrac{|x|^{\frac{\beta-1}{2}}\, e^{(\frac{\beta}{2}-1)x}}{|x|^\beta + x - 2}$; calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} f_2(x)\, dx$.

(b) Studiare la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x f_1(t)\, dt$.

2. (a) Determinare le soluzioni per $x > 0$ dell'equazione differenziale $y + 2x\, y' = \log(x+1)$, dicendo quali sono prolungabili come tali anche in $x = 0$. Trovare poi le soluzioni di $y'' + 2y' - x = 4 + 3e^{-x} - 3y$, vedendo quali di esse appaiono tra le precedenti.

(b) Data l'equazione differenziale $y^2 = (x+1)e^x\, y'$ indagare a priori quanto possibile su crescenza, convessità e eventuali simmetrie delle soluzioni. Calcolare poi la soluzione $y_\beta(x)$ tale che $y_\beta(0) = \beta$ (ove $\beta \geq 0$), e dire quali sono i suoi limiti notevoli.

3. (a) Tracciare nel piano la curva $\mathcal{C}$ definita polarmente da $\rho(\theta) = 6\cos 2\theta$ con $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. Dopo averne trovato un'opportuna parametrizzazione γ, calcolare la retta tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto dato da $\theta = \frac{\pi}{6}$, e scrivere correttamente l'integrale $\int_\gamma (2x - y)\, d\sigma$.

(b) Sia $\mathcal{D}$ il ramo destro di iperbole di asintoti $x - 2y + 3 = 0$ e $x + 2y - 5 = 0$ passante per il punto $(2, 2)$. Trovare un'equazione cartesiana $f(x, y) = 0$ che definisce $\mathcal{D}$, e ricavarne un'opportuna parametrizzazione. Usando poi in modo opportuno le funzioni iperboliche, determinare un'altra parametrizzazione di $\mathcal{D}$ ed esibire il cambio di parametro. Infine, scrivere correttamente gli integrali che definiscono il baricentro geometrico del tratto di $\mathcal{D}$ contenuto nella striscia $0 \leq y \leq 3$.

4. (a) Disegnare il dominio di $g(x, y) = \dfrac{\operatorname{arctg}(y + |x|)}{x^2 + y^2 + 2x}$, gli zeri ed il segno; parlare della continuità; calcolarne i limiti notevoli nei punti d'accumulazione in $\overline{\mathbb{R}^2}$ del dominio. Considerato poi il segmento $I = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$, dire a priori come sarà fatta $g(I)$, e quindi calcolarla.

(b) Disegnare gli insiemi $L_1 = \{(x, y) : (x+2)^2 + 1 \leq |y+1|\,,\ |y| \leq 3\}$, $L_2 = \{(x, y) : y = \log(x-1)\,,\ y \geq -2\}$ e $L_3 = \{(x, y) : 2\sin(x^2 + y^2) > 1\,,\ |x| > 3\}$, descrivendone le proprietà topologiche (aperti, chiusi, compatti, connessi...). Su quali di essi la funzione g ammette estremi assoluti?

[1] Per vedere dove si annulla il denominatore, si potrà fare un confronto grafico tra le funzioni $|x|^\beta$ e $2 - x$.

Analisi Matematica II – Prima Prova Parziale (14/05/2009) – Tema B – Soluzioni.

1. (a) Le cose che possono influire sul dominio di $f_\beta(x) = \frac{|x|^{\frac{\beta-1}{2}}\, e^{(\frac{\beta}{2}-1)x}}{|x|^\beta+x-2}$ con $\beta \geq 0$ sono la potenza $|x|^{\frac{\beta-1}{2}}$ (se $\frac{\beta-1}{2} \leq 0$ — ovvero se $0 \leq \beta \leq 1$ — deve essere $x \neq 0$), la potenza $|x|^\beta$ (se $\beta \leq 0$ — ovvero se $\beta = 0$ — deve essere $x \neq 0$, ma ciò è ricompreso in quanto appena detto per l'altra potenza) e il denominatore $|x|^\beta + x - 2$ (esso si annulla se e solo se $|x|^{2\beta} = 2 - x$, e un semplice confronto grafico tra le funzioni $|x|^{2\beta}$ e $2 - x$ mostra che ciò avviene sempre quando $x = 1$, e se $\beta > 1$ — anche in un altro punto $\tilde{x}_\beta < -1$). Ricapitolando, se $0 \leq \beta \leq 1$ i punti da escludere dal dominio di $f_\beta(x)$ sono 0 e 1, mentre se $\beta > 1$ sono $\tilde{x}_\beta$ e 1. È dunque in tali punti, oltre che in $\mp\infty$, che l'integrabilità va controllata. • In $+\infty$, a causa dell'esponenziale si ha che $f_\beta(x)$ è integrabile se $0 \leq \beta < 2$, non integrabile se $\beta > 2$, mentre quando $\beta = 2$ si ottiene $f_2(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{|x|^2+x-2} \sim_{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}$ e dunque è integrabile per asintoticità. • In $-\infty$, con considerazioni analoghe si ha integrabilità se $\beta \geq 2$ e non integrabilità se $0 \leq \beta < 2$. • In $1^\mp$ si ha $|f_\beta(x)| \sim^*_1 \frac{1}{|x^\beta+x-2|} \sim^*_1 \frac{1}{|x-1|}$ (per quest'ultima asintoticità si noti che se $\beta = 0$ essa è evidente, mentre se $\beta > 0$ si ottiene $\lim_{x\to 1} \frac{x^\beta+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\beta x^{\beta-1}+1}{1} = \beta > 0$). Dunque $f_\beta(x)$ non è mai integrabile in 1. • Se $\beta > 1$ c'è poi da guardare $\tilde{x}_\beta$: ma, ancora una volta, si ha $|f_\beta(x)| \sim^*_{\tilde{x}_\beta} \frac{1}{|x-\tilde{x}_\beta|}$ e dunque $f_\beta(x)$ non è mai integrabile in $\tilde{x}_\beta$. • Infine, se $0 \leq \beta \leq 1$ c'è da guardare $0^\mp$: ed essendo in tal caso $|f_\beta(x)| \sim^*_0 |x|^{\frac{\beta-1}{2}}$, la condizione d'integrabilità diventa $\frac{\beta-1}{2} > -1$, che per $\beta \geq 0$ è sempre vera.

• Per quanto detto, l'integrale proposto $\int_2^{+\infty} f_2(x)\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x-2}\,dx$ è convergente. Per il calcolo, col cambio $x = u^2$ si ottiene $2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{u^2}{u^4+u^2-2}\,du = \frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} (\frac{1}{u^2-1} + \frac{2}{u^2+2})\,du = \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\log\frac{u-1}{u+1} + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}})]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = \frac{2}{3}(\sqrt{2}\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{6}\sqrt{2} + \frac{2}{3}\log(\sqrt{2}+1) \sim 1{,}3$.

(b) (Figura 1) $F(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{|t|+t-2}\,dt$ è definita per $x < 1$ (infatti la funzione integranda è localmente integrabile in $]-\infty, 1[$ e in $]1, +\infty[$ e perciò, dovendo calcolarne l'integrale con punto iniziale 0 e fino a x, ciò è possibile solo scegliendo $x \in]-\infty, 1[$). Inoltre, poiché la funzione integranda è anche continua in $]-\infty, 1[$, per Torricelli siamo già certi che $F(x)$ sarà di classe $\mathcal{C}^1$. Quanto a zeri e segno, notiamo che per $t \in]-\infty, 1[$ si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) \leq 0$: ne deduciamo che vale $F(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, e $F(x) > 0$ se e solo se $x < 0$. Ora, per $t < 0$ si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}$, che si integra subito ottenendo $e^{-\frac{t}{2}}$: dunque se $x < 0$ si ricava la forma finita $F(x) = (e^{-\frac{t}{2}}]_0^x = e^{-\frac{x}{2}} - 1$, che si studia e disegna facilmente (è un esponenziale strettamente decrescente e abbassato di 1, dunque il limite per $x \to -\infty$ è $+\infty$). Possiamo perciò concentrarci sul caso $0 < x < 1$, in cui si ha $f_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}$ che non ha primitiva elementare: derivando si ottiene $F'(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}$, sempre negativa, perciò F è strettamente decrescente anche per $0 < x < 1$. Notiamo poi che $F'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}(\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1) = -\frac{1}{2}$ e $F'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2(x-1)}) = -\frac{1}{2}$ sono uguali tra loro, e dunque, come atteso, $F(x)$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto il suo dominio. Manca ancora il limite notevole per $x \to 1^-$, che coincide con l'integrale generalizzato $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{2(t-1)}\,dt$: essendo la funzione integranda negativa e dell'ordine di $\frac{1}{t-1}$, esso vale $-\infty$.

2. (a) L'equazione $2xy' + y = \log(x+1)$ è lineare del primo ordine, definita per $x > -1$; visto che vengono richieste le soluzioni per $x > 0$, possiamo portarla in forma normale dividendo per x, ottenendo $y' + p(x)\,y = q(x)$ con $p(x) = \frac{1}{2x}$ e $q(x) = \frac{\log(x+1)}{2x}$. Una primitiva di $p(x)$ è $P(x) = \frac{1}{2}\log x = \log\sqrt{x}$; posto $u = \sqrt{x}$, si ha poi $\int e^{P(X)}q(x)\,dx = \int \sqrt{x}\frac{\log(x+1)}{2x}\,dx = \int \log(u^2+1)\,du = u\log(u^2+1) - \int u\frac{2u}{u^2+1}\,du = u\log(u^2+1) - 2u + 2\operatorname{arctg} u = \sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, dunque l'integrale generale per $x > 0$ è $y_k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x}\log(x+1) - 2\sqrt{x} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + k) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + k\frac{1}{\sqrt{x}}$ con $k \in \mathbb{C}$. Di queste funzioni, la sola prolungabile per continuità in $x = 0$ è quella con $k = 0$, ovvero $y_0(x) = \log(x+1) - 2 + 2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ con valore $y_0(0) = 0$; in realtà, essendo $y_0(x) = 1 + x + o_0(x) - 2 + 2\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{3}x\sqrt{x} + o_0(x^2)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}x + o_0(x)$ si ha anche prolungabilità come classe $\mathcal{C}^1$, con $y_0'(0) = \frac{1}{3}$; ed essendo $2 \cdot 0 \cdot y_0'(0) + y_0(0) = \log(0+1) = 0$ si tratta effettivamente di una soluzione su tutto $[0, +\infty[$. • L'equazione $y'' + 2y' - 4 = 3e^{-x} + x - 3y$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti; scritta $y'' + 2y' + 3y = b_1(x) + b_2(x)$ con $b_1(x) = 3e^{-x}$ e $b_2(x) = x + 4$, si trovano rapidamente le soluzioni $y(x) = e^{-x}(A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x) + \frac{3}{2}) + \frac{1}{9}(3x+10)$ con $A, B \in \mathbb{C}$, nessuna delle quali appare tra le precedenti.

(b)

(b) (Figura 2) L'equazione differenziale $y^2 = (x+1)e^x\,y'$ è del primo ordine a variabili separabili. Da $(x+1)e^x\,y' = y^2$ si ricava subito che un'eventuale soluzione $\mathcal{C}^1$ definita in $x = -1$ deve ivi annullarsi; per $x \neq -1$ si ricava invece $y' = \frac{y^2\,e^{-x}}{x+1}$, dunque le soluzioni crescono per $x > -1$ e decrescono prima. Per quanto riguarda poi le soluzioni $\mathcal{C}^2$, derivando ambo i membri rispetto x si trova $y'' = \frac{(2yy'e^{-x} - y^2e^{-x})(x+1) - y^2e^{-x}}{(x+1)^2} = \frac{y^2e^{-x}}{(x+1)^2}(2ye^{-x} - x - 2)$, dunque tali soluzioni sono convesse sopra il grafico della funzione $y = \frac{1}{2}(x+2)e^x$ e concave sotto. Se $\varphi(x)$ è soluzione per

$x>0$, con calcoli del tipo già visto più volte risulta che ne' $\varphi(-x)$ ne' $-\varphi(-x)$ sono soluzioni per $x<0$, dunque non vi sono simmetrie evidenti. Passiamo ora al calcolo della soluzione $y_\beta(x)$ tale che $y_\beta(0)=\beta\geq 0$: se $\beta=0$ si ha la soluzione nulla $y_0(x)\equiv 0$, altrimenti separando le variabili e integrando si ottiene $\int_\beta^y \frac{1}{\eta^2}\,d\eta=\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$, ovvero $-\frac{1}{y}+\frac{1}{\beta}=\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$, da cui $y_\beta(x)=\frac{\beta}{1-\beta\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt}$. Ora, della funzione $\varphi(x):=\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt$ non si può dare un'espressione elementare, ma si possono tuttavia dire alcune cose: essa è definita in $]-1,+\infty[$, si annulla in $x=0$, è strettamente crescente (la sua derivata è $\varphi'(x)=\frac{e^{-x}}{x+1}>0$), soddisfa $\lim_{x\to -1^+}\varphi(x)=\int_0^{-1}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt=:\ell\in\mathbb{R}_{>0}$ (un disegno del grafico di $\frac{e^{-x}}{x+1}$ mostra che $\ell\sim 0{,}6$): ne ricaviamo che se $0<\beta\leq\frac{1}{\ell}$ la funzione $y_\beta(x)$ è definita in $]-1,+\infty[$, mentre se $\beta>\frac{1}{\ell}$ (ovvero se $\frac{1}{\beta}<\ell$) essa è definita in un intervallo $]-1,x_\beta[$, intorno di $x=0$, ove $x_\beta>0$ è il punto tale che $\int_0^{x_\beta}\frac{e^{-t}}{t+1}\,dt=\frac{1}{\beta}$. I limiti notevoli di $y_\beta(x)$ sono allora $\lim_{x\to-1^+}y_\beta(x)=0^+$ (infatti il denominatore tende a $+\infty$), mentre se $0<\beta<\frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty}y_\beta(x)=\frac{\beta}{1-\beta\ell}$, se $\beta=\frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to+\infty}y_\beta(x)=+\infty$, e se $\beta>\frac{1}{\ell}$ si ha $\lim_{x\to x_\beta^-}y_\beta(x)=+\infty$.

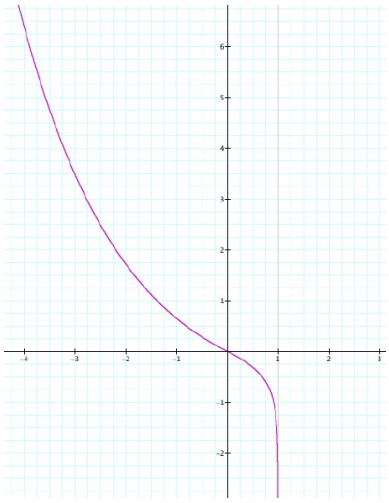
3. (a) (Figura 3) La curva $\mathcal{C}$ definita polarmente da $\rho(\theta)=6\cos 2\theta$ con $|\theta|<\frac{\pi}{4}$ è un petalo di *rodonea* (dal greco *rhodon*, "rosa"), parametrizzabile nel modo consueto con $\gamma:[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(\theta)=(6\cos 2\theta\cos\theta,6\cos 2\theta\sin\theta)$. Il punto di $\mathcal{C}$ dato da $\theta=\frac{\pi}{6}$ è $\gamma(\frac{\pi}{6})=(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$; derivando si ha $\gamma'(\theta)=6(-2\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta,-2\sin 2\theta\sin\theta+\cos 2\theta\cos\theta)$, da cui $\gamma'(\frac{\pi}{6})=-\frac{3}{2}(7,\sqrt{3})$, perciò la retta tangente cercata ha forma parametrica $\{(x,y)=(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})+t(7,\sqrt{3}):t\in\mathbb{R}\}$ e cartesiana $\sqrt{3}\,x-7y+6=0$. Infine, l'elemento d'arco è $d\sigma=\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}\,d\theta=6\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\,d\theta$, perciò $\int_\gamma(2x-y)\,d\sigma=36\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta(2\cos\theta-\sin\theta)\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}\,d\theta$.

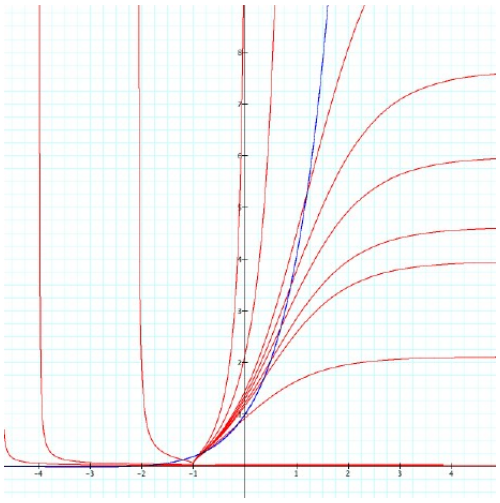
(b) (Figura 3) Nel riferimento traslato $(X,Y)=(x-1,y-2)$ l'equazione dell'iperbole $\mathcal{D}$ sarà del tipo $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ con $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{X^2}{a^2}-\frac{4Y^2}{a^2}=1$; e il passaggio per il punto $(X,Y)=(1,0)$ dà $a=1$. Si ottiene pertanto il luogo $X^2-4Y^2=1$ da cui, rimettendo le coordinate (x,y), si ottiene $(x-1)^2-4(y-2)^2=1$, ovvero $f(x,y)=(x-1)^2-4(y-2)^2-1=0$. Trattandosi del ramo destro, da $f(x,y)=0$ conviene esplicitare $x(y)$ tenendo il segno più, ottenendo $x(y)=1+\sqrt{4(y-2)^2+1}$, da cui la parametrizzazione $\chi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ data da $\chi(y)=(x(y),y)$. Ricordando che le funzioni iperboliche $(\cosh t,\sinh t)$ parametrizzano il ramo destro dell'iperbole equilatera $x^2-y^2=1$, traslando ed adattando alla situazione presente si ha una parametrizzazione alternativa di $\mathcal{D}$ data da $\widetilde{\chi}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ con $\widetilde{\chi}(t)=(1+\cosh t,2+\frac{1}{2}\sinh t)$ (si noti infatti che $(f\circ\widetilde{\chi})(t)\equiv 0$ per ogni t); e il cambio di parametro è $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dato da $y=\alpha(t)=2+\frac{1}{2}\sinh t$. Infine, usando la parametrizzazione χ, la lunghezza del tratto di $\mathcal{D}$ contenuto nella striscia $0\leq y\leq 3$ è data da $L=\int_0^3\sqrt{x'(y)^2+1}\,dy$, e il baricentro geometrico è il punto $(x_{\mathcal{D}},y_{\mathcal{D}})=\left(\frac{1}{L}\int_0^3 x(y)\sqrt{x'(y)^2+1}\,dy,\ \frac{1}{L}\int_0^3 y\sqrt{x'(y)^2+1}\,dy\right)$.

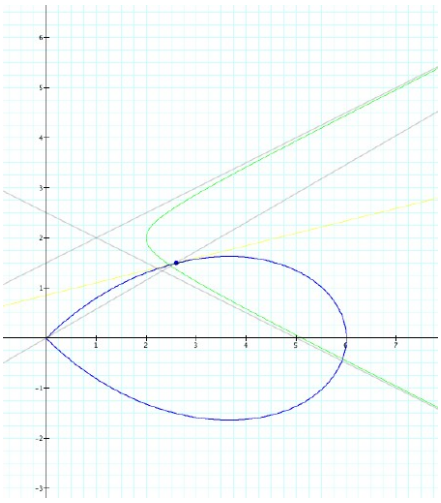
4. (a) (Figura 4) Il dominio di $\frac{\operatorname{arctg}(|x|+y)}{x^2+y^2+2x}$ si ottiene rimuovendo dal piano $\mathbb{R}^2$ il luogo $x^2+y^2+2x=0$, ovvero la circonferenza C di centro $(-1,0)$ e raggio 1; in tale dominio g è continua, si annulla sul grafico $\Gamma=\{y=-|x|\}$ ed ha segno dato dal quoziente tra i segni del numeratore (positivo sopra Γ e negativo sotto) e del denominatore (positivo fuori dalla circonferenza e negativo dentro). I limiti notevoli sono nei punti di C e in ∞_2. In un qualsiasi punto di C diverso da $O(0,0)$ e da $A(-1,-1)$ (le due intersezioni con Γ) il limite è $\pm\infty$, col segno che dipende dal fatto che si tenda al punto da una zona in cui g è $\gtrless 0$; invece nei punti O e A il limite non esiste, perché tendendovi lungo Γ la funzione è nulla ma in ogni loro intorno vi sono punti di C diversi da loro, in cui –come visto– g diverge. Quanto a ∞_2, si noti che il numeratore è limitato mentre al denominatore c'è essenzialmente il quadrato della distanza di (x,y) dal centro $(-1,0)$, perciò è probabile che il limite valga 0: per vederlo con precisione, preso un qualsiasi $r>1$, al di fuori della circonferenza di centro $(-1,0)$ e raggio r si ha $|g(x,y)|=\frac{|\operatorname{arctg}(|x|+y)|}{|(x-1)^2+y^2-1|}\leq\frac{\pi/2}{r^2-1}$, dunque quando $r\to+\infty$ si può concludere per confronto. Infine, il segmento $I=\{(x,1-x):0\leq x\leq 1\}$ è connesso per archi e compatto, ed è tutto contenuto nel dominio di g che è continua: dunque possiamo già dire che anche l'immagine $g(I)$ è connessa per archi e compatta, perciò non potrà che essere un intervallo compatto $[a,b]$. Quanto al calcolo, per definizione si ha $g(I)=\{g(x,1-x):0\leq x\leq 1\}=\{\frac{\operatorname{arctg}(|x|+1-x)}{x^2+(1-x)^2+2x}:0\leq x\leq 1\}=\{\frac{\pi/4}{2x^2+1}:0\leq x\leq 1\}=[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}]$ (si noti che $u(x):=\frac{\pi/4}{2x^2+1}$ è continua e decrescente in $[0,1]$, dunque $u([0,1])=[u(1),u(0)]$).

(b) (Figura 5) • L'insieme $L_1=\{(x,y):(x+2)^2+1\leq|y+1|\,,\ |y|\leq 3\}$ è l'intersezione tra le parti interne (chiuse) delle parabole $y=(x+2)^2$ e $y=-(x+2)^2-2$ con la striscia orizzontale chiusa $0\leq y\leq 3$, dunque è un compatto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con due componenti connesse. Pur essendo L_1 compatto, g non vi assume estremi assoluti: infatti Weierstrass non si può applicare perché L_1 non è contenuto nel dominio di g, e poi esso contiene dei punti di C nei quali g diverge a $\pm\infty$. • L'insieme $\{(x,y):y=\log(x-1)\,,\ y\geq -2\}$ è il tratto del grafico $y=\log x$ che sta sopra la retta orizzontale $y=-2$ (compreso il punto di intersezione $Q(1+e^{-2},-2)$): si tratta di un arco chiuso e illimitato di $\mathbb{R}^2$, tutto contenuto nel dominio di g. Non essendo L_2 compatto, non possiamo affermare che g vi assume estremi assoluti usando Weierstrass: tuttavia in questo caso, in cui $\lim_{\infty_2}g(x,y)=0$ e l'insieme in questione è chiuso, si può dimostrare che è comunque vero usando il seguente ragionamento standard. Notiamo intanto che L_2 contiene dei punti in cui $g>0$ (ad esempio il punto $P(2,0)$) e altri in cui $g<0$ (ad

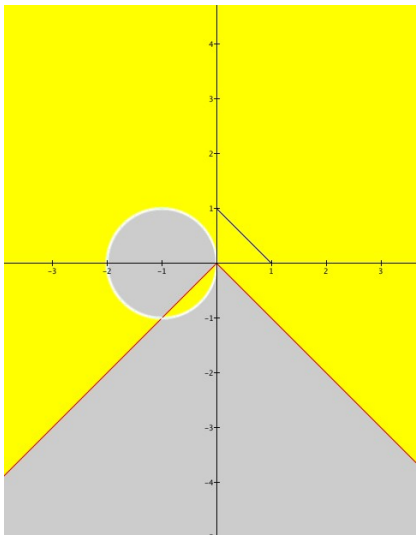
esempio l'estremo $Q(1+e^{-2},-2)$); preso un qualsiasi $\varepsilon>0$ tale che $\varepsilon<\max\{g(P),|g(Q|\}$, per definizione di limite sappiamo che esiste $M_\varepsilon>0$ tale che se $\|(x,y)\|>M_\varepsilon$ allora $|g(x,y)|<\varepsilon$; ma allora, detta B_ε la palla chiusa di centro O e raggio M_ε, gli eventuali estremi di g su L_2 devono coincidere con gli eventuali estremi di g su $L_2\cap B_\varepsilon$ (perché fuori da B_ε si ha $|g|<\varepsilon$, e, come visto con P e Q, in $L_2\cap B_\varepsilon$ la funzione assume valori superiori a ε e inferiori a $-\varepsilon$), e questi ultimi esistono per Weierstrass perché $L_2\cap B_\varepsilon$ è un compatto tutto contenuto nel dominio di g, che è continua. • L'insieme $L_3=\{(x,y):2\sin(x^2+y^2)>1\,,\ |x|>3\}$ può essere scritto anche come $L_3=\bigcup_{k\geq 0}\{(x,y):\frac{\pi}{6}+2k\pi<x^2+y^2<\frac{5\pi}{6}+2k\pi\}\ \cap\{|x|>3\}$: si tratta di una famiglia infinita di corone circolari aperte centrate in O delle quali si prendono però i soli punti con ascissa >3, aperto complementare della striscia verticale chiusa $-3\leq x\leq 3$. Dunque L_3 è un aperto sconnesso di $\mathbb{R}^2$ con infinite componenti connesse, interamente contenuto nel dominio di g: però, non trattandosi di un chiuso di $\mathbb{R}^2$, non possiamo applicare il ragionamento fatto per L_2 e allo stato attuale delle nostre conoscenze non siamo in grado di dire se g ammetta o no estremi assoluti su di esso (dopo la seconda parte del corso lo saremo).

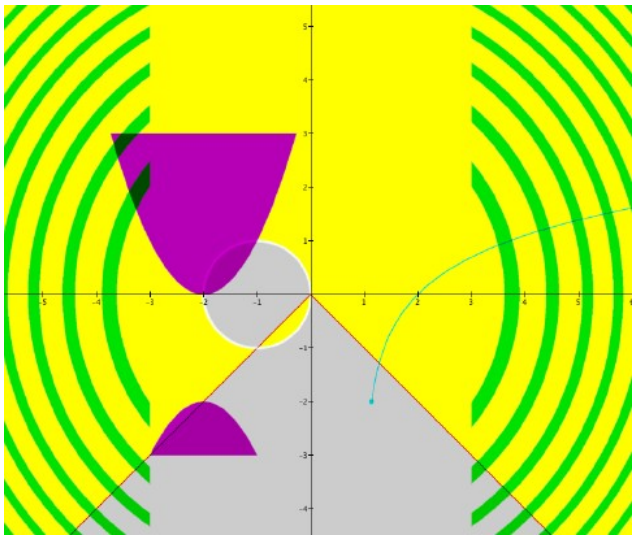






1. La funzione integrale $F(x)$ di (1.b). **2.** Alcune soluzioni $y_\beta(x)$ di (2.b) (in rosso); la curva di cambio concavità (in blu). **3.** Le curve di (3.a-b).





4. Zeri (rosso), segno di g (>0 in giallo, <0 in grigio) e il segmento I di (4.a). **5.** Gli insiemi L_1 (viola), L_2 (azzurro) e L_3 (verde) di (4.b).