Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Seconda Prova Parziale ed Esame Scritto (18/06/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Questa prova viene svolta come:	☐ P = 2a Prova Parziale	☐ S = Esame Scritto

Tema A

1. [S] Data $f_\alpha(x) = \dfrac{\log(x^{\alpha+2}+1)}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}$, studiarne l'integrabilità in $]0,+\infty[$ e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx$.

2. (a) [S] Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'\sqrt{x+1} = \cos^2(3y)$ tale che $y(0) = \frac{5\pi}{12}$.

(b) [S] Trovare le soluzioni reali di $y''-y = 2e^{-x}-x+\sqrt{e^x+1}$ col grafico passante per l'origine.

3. Sia $f(x,y) = (2x-y^2)\,\mathrm{arctg}\,(x+y)$.

(a) [S, P] Trovare dominio, zeri, segno, limiti notevoli di f.

(b) [S, P] Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta poi X quella passante per $A(2,-1)$, calcolare in due modi diversi la retta affine tangente a X in A.

(c) [S, P] Disegnare $T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -2-x\le y\le 0\,,\ x\le 0\}\cup\{(u,1-u) : -2\le u\le 3\}$ e descriverne le proprietà topologiche; dire poi se f ha estremi assoluti su T e, se sì, calcolarli.

4. Si consideri la funzione $g(x,y,z) = (2x-y+2z-2)\,e^{2xy-z^2}$.

(a) [S, P] Dire quali delle superfici di livello di g sono regolari. Detta S quella passante per $A(0,-1,0)$, calcolare in due modi il piano affine tangente a S in A.

(b) [P] Sia ℓ la curva ottenuta intersecando S col piano $x+y+z+1=0$: dimostrare che ℓ è regolare ovunque, ed esprimerla come curva parametrica fino al primo ordine attorno A.

(c) [P] Dimostrare che ℓ è compatta, e impostare il problema della ricerca dei suoi punti estremi rispetto a ciascuna delle tre coordinate.

1. L'integrabilità di $f_\alpha(x) = \frac{\log(x^{\alpha+2}+1)}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}}$ in $]0, +\infty[$ va esaminata in 0^+, $1\mp$ e $+\infty$. • In 0^+, se $\alpha + 2 > 0$ (cioè se $\alpha > -2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} \frac{x^{\alpha+2}}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = x|\log x|^{\alpha-1}$, infinitesimo; se $\alpha + 2 = 0$ (cioè se $\alpha = -2$) si ha $f_{-2}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinitesimo; infine, se $\alpha + 2 < 0$ (cioè se $\alpha < -2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{0^+} \frac{\log(x^{\alpha+2})}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} \sim^*_{0^+} \frac{\log x}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = -x^{-(\alpha+1)}|\log x|^\alpha$, ancora una volta infinitesimo perché $-(\alpha+1) > 0$. Pertanto in 0^+ la funzione è sempre integrabile. • In 1 si ha $f_\alpha(x) \sim^*_1 \frac{1}{|x-1|^{1-\alpha}}$, dunque la condizione è $1 - \alpha < 1$, ovvero $\alpha > 0$. • In $+\infty$ si ragiona in modo simile a 0^+: se $\alpha + 2 < 0$ (cioè se $\alpha < -2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{\alpha+2}}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = x|\log x|^{\alpha-1}$, infinito; se $\alpha + 2 = 0$ (cioè se $\alpha = -2$) si ha $f_{-2}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinito; infine, se $\alpha + 2 > 0$ (cioè se $\alpha > -2$) si ha $f_\alpha(x) \sim_{+\infty} \frac{\log(x^{\alpha+2})}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} \sim^*_{+\infty} \frac{\log x}{x^{\alpha+1}|\log x|^{1-\alpha}} = -x^{-(\alpha+1)}|\log x|^\alpha$, da cui la condizione $-(\alpha + 1) < -1$ (ovvero $\alpha > 0$) oppure $-(\alpha + 1) = -1$ e $\alpha < -1$ (no). Pertanto in $+\infty$ la funzione è integrabile se e solo se $\alpha > 0$. • Da quanto detto, l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\alpha(x)\,dx$ converge se e solo se $\alpha > 0$; in particolare per $\alpha = 1$ diventa $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x^2}\,dx$. Una primitiva è $F_1(x) = (-\frac{1}{x})\log(x^3 + 1) - \int(-\frac{1}{x})\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3 + 1) + \int(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1})\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3 + 1) - \log(x + 1) + \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3 + 1) - \log(x + 1) + \frac{1}{2}\log(x^2 - x + 1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2})) = -\frac{1}{x}\log(x^3 + 1) + \log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\frac{2}{\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}))$, dunque, essendo $\lim_{x\to0^+} F_1(x) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ e $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, il nostro integrale vale $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

2. (a) L'equazione $y'\sqrt{x+1} = \cos^2(3y)$ è a variabili separabili; separando e integrando si ottiene $\frac{1}{3}\mathrm{tg}\,3y = 2\sqrt{x+1} + k$, e imponendo che $y(0) = \frac{5\pi}{12}$ si ha $\frac{1}{3} = 2 + k$, ovvero $k = -\frac{5}{3}$. Dunque $\mathrm{tg}\,3y = 6\sqrt{x+1} - 5$, da cui $3y = \mathrm{arctg}\,(6\sqrt{x+1} - 5) + h\pi$ per un opportuno $h \in \mathbb{Z}$: imponendo nuovamente che $y(0) = \frac{5\pi}{12}$ si ha $\frac{5\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,1 + h\pi$, da cui $h = 1$, e perciò $y(x) = \frac{1}{3}(\mathrm{arctg}\,(6\sqrt{x+1} - 5) + \pi)$, definita per $x > -1$.

(b) L'equazione $y'' - y = 2e^{-x} - x + \sqrt{e^x + 1}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Un sistema fondamentale di soluzioni (dell'omogenea associata) è $\{e^{-x}, e^x\}$; usando il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare relativa a $b_1(x) = 2e^{-x}$ risulta $\tilde{y}_1(x) = -xe^{-x}$ mentre una relativa a $b_2(x) = -x$ è $\tilde{y}_2(x) = x$. Per quanto riguarda $b_3(x) = \sqrt{e^x + 1}$ bisogna ricorrere al metodo della variazione delle costanti arbitrarie: il determinante wronskiano di $\{e^{-x}, e^x\}$ vale 2, dunque $\tilde{y}_3(x) = \gamma_1(x)e^{-x} + \gamma_2(x)e^x$ con $\gamma_1(x) = -\int \frac{1}{2}e^x\sqrt{e^x + 1}\,dx$ e $\gamma_2(x) = \int \frac{1}{2}e^{-x}\sqrt{e^x + 1}\,dx$ (si ricava $\gamma_1(x) = -\frac{1}{3}(e^x + 1)\sqrt{e^x + 1}$ e $\gamma_2(x) = \frac{1}{4}(2e^{-x}\sqrt{e^x + 1} + 2\log(\sqrt{e^x + 1} + 1) - x)$). Lo spazio delle soluzioni reali è perciò $y(x) = (A - x + \gamma_1(x))e^{-x} + (B + \gamma_2(x))e^x + x$ al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, e la condizione richiesta diventa $(A + \gamma_1(0)) + (B + \gamma_2(0)) = 0$, dunque $A + B = -\gamma_1(0) - \gamma_2(0)$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x, y) = (2x - y^2)\,\mathrm{arctg}\,(x + y)$ è tutto il piano; la funzione si annulla sulla parabola $x = \frac{1}{2}y^2$ e sulla bisettrice $y = -x$, che si intersecano in $O(0, 0)$ e in $P(2, -2)$; il fattore $2x - y^2$ è > 0 dentro la parabola e < 0 fuori, il fattore $\mathrm{arctg}\,(x + y)$ è > 0 sopra la bisettrice e < 0 sotto, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è evidentemente $\mathcal{C}^\infty$, dunque l'unico limite notevole è in ∞_2, e non esiste: per vederlo, basta notare che su $x + y = 0$ la funzione è nulla, mentre su $x + y = 1$ essa vale $f(x, 1 - x) = -\frac{\pi}{4}(x^2 - 4x + 1)$, e dunque tende a $-\infty$ quando x tende a $\pm\infty$.

(b) Cerchiamo per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ le curve di livello $X_\alpha := \{(x, y) : f(x, y) = \alpha\}$ contengono punti singolari. Si ha $\nabla f = (2\,\mathrm{arctg}\,(x + y) + \frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2}, -2y\,\mathrm{arctg}\,(x + y) + \frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2})$, dunque $\nabla f = (0, 0)$ quando $\frac{2x-y^2}{1+(x+y)^2} = -2\,\mathrm{arctg}\,(x+y) = 2y\,\mathrm{arctg}\,(x+y)$, da cui si ricava $(y+1)\mathrm{arctg}\,(x+y) = 0$. Se $\mathrm{arctg}\,(x+y) = 0$, ovvero se $y = -x$, si ottiene $2x - (-x)^2 = 0$ ovvero gli attesi punti di intersezione O e P della curva X_0. Se invece $y = -1$ si ricava $\frac{2x-1}{1+(x-1)^2} = -2\,\mathrm{arctg}\,(x - 1)$, e un facile confronto grafico evidenzia una soluzione $x_0 \sim 0{,}7$, da cui un ulteriore punto singolare $B(x_0, -1)$. Dunque le uniche curve X_α che contengono punti singolari sono quella con $\alpha = 0$ (in O e A) e quella con $\alpha = (2x_0 - 1)\,\mathrm{arctg}\,(x_0 - 1) = (2x_0 - 1)(-\frac{1}{2}\frac{2x_0-1}{1+(x_0-1)^2}) \sim -0{,}1$ (in B). In particolare la curva X contenente $A(2, -1)$ (si tratta di $X = X_{\frac{3\pi}{4}}$) è regolare, e ha dunque senso cercarne la retta affine tangente in A, che è $\nabla f(2, -1) \cdot (x - 2, y - (-1)) = (\frac{\pi+3}{2}, \frac{\pi+3}{2}) \cdot (x - 2, y + 1) = 0$, ovvero $x + y - 1 = 0$; in alternativa, da $f(x, y) = \frac{3\pi}{4}$ si può esplicitare ad esempio $x(y) = 2+(-\frac{(\pi+3)/2}{(\pi+3)/2})(y-(-1))+o_{-1}(y-(-1)) = 2-(y+1)+o_{-1}(y+1)$, e lo sviluppo al primo ordine $x = 2 - (y + 1)$ ridà la retta precedente.

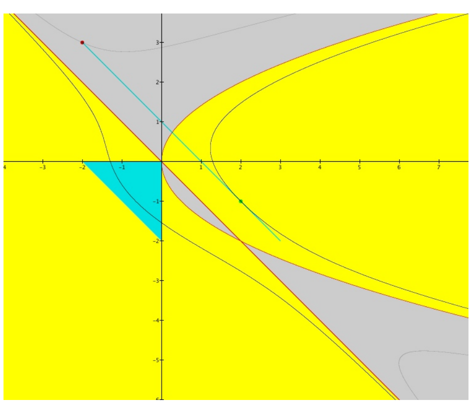
(c) (Figura 1) L'insieme T, ottenuto dall'unione disgiunta di un triangolo chiuso e pieno e di un segmento chiuso e limitato, è un compatto sconnesso, con due componenti connesse; essendo f continua, gli estremi assoluti di f su T esistono in base a Weierstrass. Per il calcolo, decomponiamo T nei punti interni del triangolo $T_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 - x < y < 0\,,\ x < 0\}$ (aperto, dunque varietà di dimensione 2); nei quattro segmenti senza estremi $T_1 = \{(x, y) : y = 0\,,\ -2 < x < 0\}$, $T_2 = \{(x, y) : x = 0\,,\ -2 < y < 0\}$, $T_3 = \{(x, y) : y = -2 - x\,,\ -2 < x < 0\}$ e $T_4 = \{(u, 1-u) : -2 < u < 3\}$ (varietà di dimensione 1); e nei cinque punti $O(0, 0)$, $P_1(-2, 0)$, $P_2(0, -2)$, $P_3(-2, 3)$ e $P_4(3, -2)$ (varietà di dimensione 0). Cerchiamo ora i punti stazionari di f su ciascuna di queste componenti. In T_0 non cade nessuno dei tre punti stazionari A, B e O trovati nel punto precedente, dunque niente. I quattro segmenti

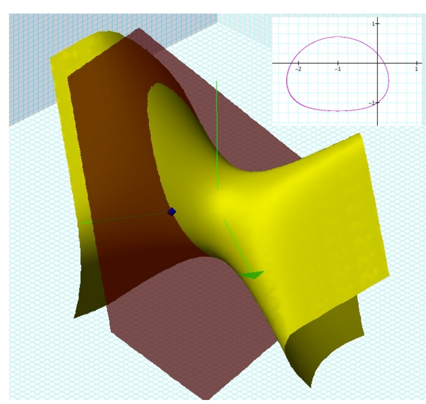
T_1, T_2, T_3 e T_4 sono tutti parametrizzabili globalmente in modo ovvio: su T_1 si ha $F_1(x) := f(x,0) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x$ con $-2 < x < 0$, e la derivata $F_1'(x) = 2(\mathrm{arctg}\,x + \frac{x}{x^2+1})$ si annulla solo per $x = 0$, come un facile confronto grafico mostra subito, quindi niente; identico discorso vale per T_2, dove si ha $F_2(y) := f(0,y) = -y^2\mathrm{arctg}\,y$ con $-2 < y < 0$, quindi niente; su T_3 vale $F_3(x) := f(x,-2-x) = (x^2+2x+4)\,\mathrm{arctg}\,2$ con $-2 < x < 0$, e poiché $F_3'(x) = 2(x+1)\,\mathrm{arctg}\,2$ si annulla in $x = -1$ otteniamo un nuovo punto $P_5(-1,-1)$; su T_4 vale $F_4(x) := f(x,1-x) = \frac{\pi}{4}(x^2-4x+1)$ con $-2 < x < 3$, e poiché $F_4'(x) = \frac{\pi}{2}(x-2)$ si annulla in $x = 2$ riotteniamo il punto $A(2,-1)$. Ricapitolando, gli estremi assoluti di f su T possono essere assunti solo nei sette punti $O(0,0)$, $P_1(-2,0)$, $P_2(0,-2)$, $P_3(-2,3)$, $P_4(3,-2)$, $P_5(-1,-1)$ e $A(2,-1)$: essendo $f(0) = 0$, $f(P_1) = f(P_2) = 4\,\mathrm{arctg}\,2$, $f(P_3) = -\frac{13\pi}{4}$, $f(P_4) = \frac{\pi}{2}$, $f(P_5) = 3\mathrm{arctg}\,2$ e $f(A) = \frac{3\pi}{4}$, ne ricaviamo che il minimo assoluto di f su T è $-\frac{13\pi}{4}$ (assunto in P_3) e il massimo è $4\,\mathrm{arctg}\,2 \sim 4{,}4$ (assunto in P_1 e P_2).

4. (a) (Figura 2) Vediamo quali delle superfici di livello $S_\alpha = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = (2x-y+2z-2)e^{2xy-z^2} = \alpha\}$ sono regolari. Il gradiente $\nabla g = (2e^{2xy-z^2}(1+y(2x-y+2z-2)),\ e^{2xy-z^2}(-1+2x(2x-y+2z-2)),\ 2e^{2xy-z^2}(1-z(2x-y+2z-2)))$ si annulla quando $2x-y+2z-2 = -\frac{1}{y} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{z}$: ciò dà $y = -2x$ e $z = 2x$, da cui $2x-(-2x)+2(2x)-2 = \frac{1}{2x}$, ovvero $16x^2-4x-1 = 0$, che dà $x = \frac{1\mp\sqrt{5}}{8}$, da cui i due punti $P_1(\frac{1+\sqrt{5}}{8}, -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4})$ e $P_2(\frac{1-\sqrt{5}}{8}, -\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4})$. Dunque le superfici di livello sono regolari tranne quelle con P_1 e P_2, e solo in quei punti. Quella per $A(0,-1,0)$ è $S = S_{-1}$, e il piano tangente è $\nabla g(A)\cdot(x-x_A, y-y_A, z-z_A) = (4,-1,2)\cdot(x,y+1,z) = 0$, ovvero $4x-y+2z-1 = 0$; alternativamente, da $g(x,y,z) = -1$ si può ad esempio esplicitare $y(x,z) = -1+(-\frac{4}{-1})x+(-\frac{2}{-1})z+\cdots = -1+4x+2z+\cdots$, e lo sviluppo al 1o ordine ridà il piano appena trovato.

(b) Posto $h(x,y,z) = x+y+z+1$, la curva ℓ è definita da $(g,h) = (-1,0)$; lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix}$ ha rango < 2 quando i due gradienti sono paralleli, cioè (posto per brevità $U := 2x-y+2z-2$) quando $2(1+yU) = -1+2xU = 2(1-zU)$: da $1+yU = 1-zU$ si ricava $(y+z)U = 0$, ma poiché la curva ℓ è definita da $g = -1$ (dunque in particolare $U \neq 0$) dovrà essere $z = -y$, che posto in $2(1+yU) = -1+2xU$, ovvero $2(x-y)U = 3$, dà $2(x-y)(2x-3y-2) = 3$. Ci chiediamo ora se ℓ (definita da $x+y+z+1 = 0$ e $(2x-y+2z-2)e^{2xy-z^2} = -1$) possieda qualche punto tale che $z = -y$ e $2(x-y)(2x-3y-2) = 3$: confrontando $z = -y$ con $z = -1-x-y$ si ottiene $x = -1$, dunque da $2(x-y)(2x-3y-2) = 3$ si ricava $2(-1-y)(-3y-4) = 3$, da cui $6y^2+14y+5 = 0$, da cui $y = \frac{-7\mp\sqrt{19}}{6}$. Si ottengono perciò le due terne $(x,y,z) = (-1, \frac{-7\mp\sqrt{19}}{6}, \frac{7\pm\sqrt{19}}{6})$, ma nessuna delle due soddisfa l'ultima equazione di ℓ, ovvero $(2x-y+2z-2)e^{2xy-z^2} = -1$. Perciò ℓ è una curva regolare, e il punto A evidentemente vi appartiene: poiché lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(A) \\ \nabla g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ha tutti e tre i minori di ordine 2 nonsingolari, all'intorno di A da $(g,h) = (-1,0)$ si possono esplicitare a scelta due delle tre variabili in funzione della terza: ad esempio, esplicitando x e y in funzione di z (da cui la parametrizzazione $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$), al primo ordine si ha $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)(z-0) + \begin{pmatrix} o_0(z) \\ o_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}z + o_0(z) \\ -1-\frac{2}{5}z + o_0(z) \end{pmatrix}$.

(c) Sia ℓ' la proiezione di ℓ sul piano orizzontale: visto che z dipende in modo continuo (addirittura lineare) da x e y, ci basta far vedere che ℓ' è limitata. Sostituendo $z = -1-x-y$ in $(2x-y+2z-2)e^{2xy-z^2} = -1$ si ottiene $(3y+4)e^{-x^2-y^2-2x-2y-1} = 1$, equazione di definizione di ℓ' nel piano (x,y). Ora, è piuttosto chiaro che la funzione $\Phi(x,y)$ al I membro ha limite 0 quando (x,y) tende a ∞_2 (usando le coordinate polari (r,ψ) traslate in $(-1,-1)$, quando $r > 1$ si ha $|\Phi(x,y)| = |3(y+1)+1|\,e^{1-(x+1)^2-(y+1)^2} = |3r\sin\psi+1|e^{1-r^2} \le 4re^{1-r^2}$, infinitesima quando $r \to +\infty$), dunque per definizione di limite le sue curve di livello $\neq 0$ sono tutte limitate, ovvero compatte, e tra queste ℓ'. Pertanto ℓ è una curva regolare compatta, e per Weierstrass esistono su di essa gli estremi assoluti di qualsiasi funzione continua $f(x,y,z)$; ad esempio, quando prendiamo $f(x,y,z) = x$ si troveranno i punti estremi di ℓ rispetto alla coordinata x, e per Lagrange saranno dati dal sistema in tre equazioni delle quali la prima è $\det(\nabla x, \nabla h, \nabla g) = 0$ (ovvero $\partial_z g - \partial_y g = 0$), e le altre due sono i vincoli $x+y+z+1 = 0$ e $g(x,y,z) = -1$.





1. Esercizio 3: la curva S (blu) passante per A; l'insieme T (triangolo più segmento, azzurro); la curva di livello per il punto di minimo P_3 per f su T (grigio). **2.** Esercizio 4: la superficie $g(x,y,z) = -1$ (gialla) passa per A (blu); il piano (rosso) definisce ℓ; in alto a destra, la proiezione ℓ'.

Analisi Matematica II (Fisica e Astronomia)

Seconda Prova Parziale ed Esame Scritto (18/06/2009)

Università di Padova - Lauree in Fisica ed Astronomia - A.A. 2008/09

Cognome-Nome ________________________________ Matr. __________ - ____
IN STAMPATELLO SF / SA

Questa prova viene svolta come: ☐ P = 2a Prova Parziale ☐ S = Esame Scritto

Tema B

1. [S] Data $f_\beta(x) = \dfrac{\log(x^{\beta+1}+1)}{x^\beta |\log x|^{2-\beta}}$, studiarne l'integrabilità in $]0,+\infty[$ e calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_2(x)\,dx$.

2. (a) [S] Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y'\sqrt{x+4} = \sin^2(3y)$ tale che $y(0) = \frac{5\pi}{12}$.
(b) [S] Trovare le soluzioni reali di $y''-y = \sqrt{e^x+1} + x + 4e^{-x}$ col grafico passante per l'origine.

3. Sia $f(x,y) = (2x-y^2)\operatorname{arctg}(x-y)$.

(a) [S, P] Trovare dominio, zeri, segno, limiti notevoli di f.
(b) [S, P] Dire quali curve di livello di f sono regolari; detta poi X quella passante per $A(2,1)$, calcolare in due modi diversi la retta affine tangente a X in A.
(c) [S, P] Disegnare $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x+2,\ x \le 0\} \cup \{(u, u-1) : -2 \le u \le 3\}$ e descriverne le proprietà topologiche; dire poi se f ha estremi assoluti su T e, se sì, calcolarli.

4. Si consideri la funzione $g(x,y,z) = (y-2x+2z-2)\,e^{2xy-z^2}$.

(a) [S, P] Dire quali delle superfici di livello di g sono regolari. Detta S quella passante per $A(0,1,0)$, calcolare in due modi il piano affine tangente a S in A.
(b) [P] Sia ℓ la curva ottenuta intersecando S col piano $x+y-z-1=0$: dimostrare che ℓ è regolare ovunque, ed esprimerla come curva parametrica fino al primo ordine attorno A.
(c) [P] Dimostrare che ℓ è compatta, e impostare il problema della ricerca dei suoi punti estremi rispetto a ciascuna delle tre coordinate.

1. L'integrabilità di $f_\beta(x) = \frac{\log(x^{\beta+1}+1)}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}}$ in $]0,+\infty[$ va esaminata in 0^+, $1\mp$ e $+\infty$. • In 0^+, se $\beta+1>0$ (cioè se $\beta>-1$) si ha $f_\beta(x) \sim_{0^+} \frac{x^{\beta+1}}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} = x|\log x|^{\beta-2}$, infinitesimo; se $\beta+1=0$ (cioè se $\beta=-1$) si ha $f_{-1}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinitesimo; infine, se $\beta+1<0$ (cioè se $\beta<-1$) si ha $f_\beta(x) \sim_{0^+} \frac{\log(x^{\beta+1})}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} \sim^*_{0^+} \frac{\log x}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} = -x^{-\beta}|\log x|^{\beta-1}$, ancora una volta infinitesimo perché $-\beta>0$. Pertanto in 0^+ la funzione è sempre integrabile. • In 1 si ha $f_\beta(x) \sim^*_1 \frac{1}{|x-1|^{2-\beta}}$, dunque la condizione è $2-\beta<1$, ovvero $\beta>1$. • In $+\infty$ si ragiona in modo simile a 0^+: se $\beta+1<0$ (cioè se $\beta<-1$) si ha $f_\beta(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{\beta+1}}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} = x|\log x|^{\beta-2}$, infinito; se $\beta+1=0$ (cioè se $\beta=-1$) si ha $f_{-1}(x) = \frac{\log 2}{x^{-1}|\log x|^3} = (\log 2)x|\log x|^{-3}$, pure infinito; infine, se $\beta+1>0$ (cioè se $\beta>-1$) si ha $f_\beta(x) \sim_{+\infty} \frac{\log(x^{\beta+1})}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} \sim^*_{+\infty} \frac{\log x}{x^\beta|\log x|^{2-\beta}} = -x^{-\beta}|\log x|^{\beta-1}$, da cui la condizione $-\beta<-1$ (ovvero $\beta>1$) oppure $-\beta=-1$ e $\beta-1<-1$ (no). Pertanto in $+\infty$ la funzione è integrabile se e solo se $\beta>1$. • Da quanto detto, l'integrale $\int_0^{+\infty} f_\beta(x)\,dx$ converge se e solo se $\beta>1$; in particolare per $\beta=2$ diventa $\int_0^{+\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x^2}\,dx$. Una primitiva è $F_2(x) = (-\frac{1}{x})\log(x^3+1) - \int(-\frac{1}{x})\frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3+1) + \int(\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1})\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3+1) - \log(x+1) + \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{x}\log(x^3+1) - \log(x+1) + \frac{1}{2}\log(x^2-x+1) + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})) = -\frac{1}{x}\log(x^3+1) + \log\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,(\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2}))$, dunque, essendo $\lim_{x\to 0^+} F_2(x) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ e $\lim_{x\to+\infty} F_2(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$, il nostro integrale vale $\frac{\pi\sqrt{3}}{2} - (-\frac{\pi\sqrt{3}}{6}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$.

2. (a) L'equazione $y'\sqrt{x+4} = \sin^2(3y)$ è a variabili separabili; separando e integrando si ottiene $-\frac{1}{3}\mathrm{cotg}\,3y = 2\sqrt{x+4}+k$, e imponendo che $y(0)=\frac{5\pi}{12}$ si ha $-\frac{1}{3} = 4+k$, ovvero $k=-\frac{13}{3}$. Dunque $\mathrm{cotg}\,3y = 13-6\sqrt{x+4}$, da cui $3y = \mathrm{arccotg}\,(13-6\sqrt{x+4}) + h\pi$ per un opportuno $h\in\mathbb{Z}$: imponendo nuovamente che $y(0)=\frac{5\pi}{12}$ si ha $\frac{5\pi}{4} = \mathrm{arccotg}\,1 + h\pi$, da cui $h=1$, e perciò $y(x) = \frac{1}{3}(\mathrm{arccotg}\,(13-6\sqrt{x+4})+\pi)$, definita per $x>-4$.

(b) L'equazione $y''-y = \sqrt{e^x+1}+x+4e^{-x}$ è lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Un sistema fondamentale di soluzioni (dell'omogenea associata) è $\{e^{-x},\, e^x\}$; usando il principio di sovrapposizione, una soluzione particolare relativa a $b_2(x)=x$ è $\tilde{y}_2(x)=-x$ mentre una relativa a $b_3(x)=4e^{-x}$ risulta $\tilde{y}_1(x) = -2xe^{-x}$. Per quanto riguarda $b_1(x)=\sqrt{e^x+1}$ bisogna ricorrere al metodo della variazione delle costanti arbitrarie: il determinante wronskiano di $\{e^{-x},\, e^x\}$ vale 2, dunque $\tilde{y}_1(x) = \gamma_1(x)e^{-x}+\gamma_2(x)e^x$ con $\gamma_1(x) = -\int\frac{1}{2}e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$ e $\gamma_2(x) = \int\frac{1}{2}e^{-x}\sqrt{e^x+1}\,dx$ (si ricava $\gamma_1(x) = -\frac{1}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}$ e $\gamma_2(x) = \frac{1}{4}(2e^{-x}\sqrt{e^x+1} + 2\log(\sqrt{e^x+1}+1)-x)$). Lo spazio delle soluzioni reali è perciò $y(x) = (A-2x+\gamma_1(x))e^{-x} + (B+\gamma_2(x))e^x - x$ al variare di $A,B\in\mathbb{R}$, e la condizione richiesta diventa $(A+\gamma_1(0))+(B+\gamma_2(0))=0$, dunque $A+B = -\gamma_1(0)-\gamma_2(0)$.

3. (a) (Figura 1) Il dominio di $f(x,y) = (2x-y^2)\,\mathrm{arctg}\,(x-y)$ è tutto il piano; la funzione si annulla sulla parabola $x=\frac{1}{2}y^2$ e sulla bisettrice $y=x$, che si intersecano in $O(0,0)$ e in $P(2,2)$; il fattore $2x-y^2$ è >0 dentro la parabola e <0 fuori, il fattore $\mathrm{arctg}\,(x-y)$ è >0 sotto la bisettrice e <0 sopra, e il segno di f ne segue per prodotto. La funzione è evidentemente $\mathcal{C}^\infty$, dunque l'unico limite notevole è in ∞_2, e non esiste: per vederlo, basta notare che su $x-y=0$ la funzione è nulla, mentre su $x-y=1$ essa vale $f(x,x-1) = -\frac{\pi}{4}(x^2-4x+1)$, e dunque tende a $-\infty$ quando x tende a $\pm\infty$.

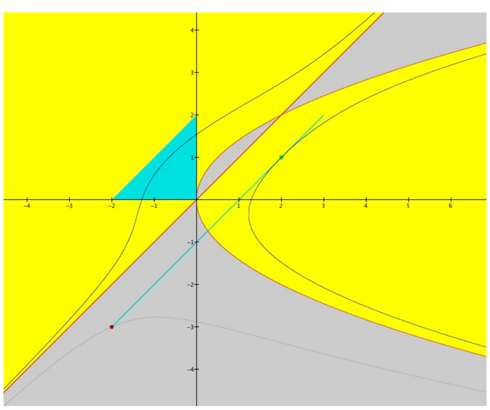
(b) Cerchiamo per quali $\alpha\in\mathbb{R}$ le curve di livello $X_\alpha := \{(x,y) : f(x,y)=\alpha\}$ contengono punti singolari. Si ha $\nabla f = (2\,\mathrm{arctg}\,(x-y) + \frac{2x-y^2}{1+(x-y)^2},\ -2y\,\mathrm{arctg}\,(x-y) - \frac{2x-y^2}{1+(x-y)^2})$, dunque $\nabla f=(0,0)$ quando $\frac{2x-y^2}{1+(x-y)^2} = -2\,\mathrm{arctg}\,(x-y) = -2y\,\mathrm{arctg}\,(x-y)$, da cui si ricava $(y-1)\mathrm{arctg}\,(x-y)=0$. Se $\mathrm{arctg}\,(x-y)=0$, ovvero se $y=x$, si ottiene $2x-(x)^2=0$ ovvero gli attesi punti di intersezione O e P della curva X_0. Se invece $y=1$ si ricava $\frac{2x-1}{1+(x-1)^2} = -2\,\mathrm{arctg}\,(x-1)$, e un facile confronto grafico evidenzia una soluzione $x_0\sim 0{,}7$, da cui un ulteriore punto singolare $B(x_0,1)$. Dunque le uniche curve X_α che contengono punti singolari sono quella con $\alpha=0$ (in O e A) e quella con $\alpha = (2x_0-1)\,\mathrm{arctg}\,(x_0-1) = (2x_0-1)(-\frac{1}{2}\frac{2x_0-1}{1+(x_0-1)^2}) \sim -0{,}1$ (in B). In particolare la curva X contenente $A(2,1)$ (si tratta di $X=X_{\frac{3\pi}{4}}$) è regolare, e ha dunque senso cercarne la retta affine tangente in A, che è $\nabla f(2,1)\cdot(x-2,y-1) = (\frac{\pi+3}{2},\, -\frac{\pi+3}{2})\cdot(x-2,y-1)=0$, ovvero $x-y-1=0$; in alternativa, da $f(x,y)=\frac{3\pi}{4}$ si può esplicitare ad esempio $x(y) = 2+(-\frac{(\pi+3)/2}{-(\pi+3)/2})(y-1)+o_1(y-1) = 2+(y-1)+o_1(y-1)$, e lo sviluppo al primo ordine $x=2+(y-1)$ ridà la retta precedente.

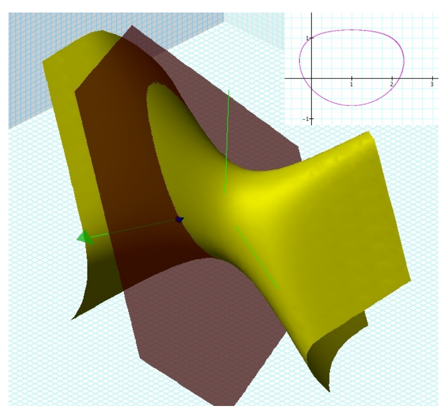
(c) (Figura 1) L'insieme T, ottenuto dall'unione disgiunta di un triangolo chiuso e pieno e di un segmento chiuso e limitato, è un compatto sconnesso, con due componenti connesse; essendo f continua, gli estremi assoluti di f su T esistono in base a Weierstrass. Per il calcolo, decomponiamo T nei punti interni del triangolo $T_0 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<y<x+2,\ x<0\}$ (aperto, dunque varietà di dimensione 2); nei quattro segmenti senza estremi $T_1 = \{(x,y) : y=0,\ -2<x<0\}$, $T_2 = \{(x,y) : x=0,\ 0<y<2\}$, $T_3 = \{(x,y) : y=x+2,\ -2<x<0\}$ e $T_4 = \{(u,u-1) : -2<u<3\}$ (varietà di dimensione 1); e nei cinque punti $O(0,0)$, $P_1(-2,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(-2,-3)$ e $P_4(3,2)$ (varietà di dimensione 0). Cerchiamo ora i punti stazionari di f su ciascuna di queste componenti. In T_0 non cade nessuno dei tre punti stazionari A, B e O trovati nel punto precedente, dunque niente. I quattro segmenti T_1, T_2, T_3 e T_4 sono tutti parametrizzabili globalmente in modo ovvio: su T_1 si ha $F_1(x) := f(x,0) = 2x\,\mathrm{arctg}\,x$ con $-2 < x < 0$, e la derivata $F_1'(x) = 2(\mathrm{arctg}\,x + \frac{x}{x^2+1})$ si annulla solo per $x = 0$, come un facile confronto grafico mostra subito, quindi niente; identico discorso vale per T_2, dove si ha $F_2(y) := f(0,y) = y^2\mathrm{arctg}\,y$ con $0 < y < 2$, quindi niente; su T_3 vale $F_3(x) := f(x, x+2) = (x^2 + 2x + 4)\ \mathrm{arctg}\,2$ con $-2 < x < 0$, e poiché $F_3'(x) = 2(x+1)\ \mathrm{arctg}\,2$ si annulla in $x = -1$ otteniamo un nuovo punto $P_5(-1,1)$; su T_4 vale $F_4(x) := f(x, x-1) = \frac{\pi}{4}(x^2 - 4x + 1)$ con $-2 < x < 3$, e poiché $F_4'(x) = \frac{\pi}{2}(x-2)$ si annulla in $x = 2$ riotteniamo il punto $A(2,1)$. Ricapitolando, gli estremi assoluti di f su T possono essere assunti solo nei sette punti $O(0,0)$, $P_1(-2,0)$, $P_2(0,2)$, $P_3(-2,-3)$, $P_4(3,2)$, $P_5(-1,1)$ e $A(2,1)$: essendo $f(0) = 0$, $f(P_1) = f(P_2) = 4\,\mathrm{arctg}\,2$, $f(P_3) = -\frac{13\pi}{4}$, $f(P_4) = \frac{\pi}{2}$, $f(P_5) = 3\mathrm{arctg}\,2$ e $f(A) = \frac{3\pi}{4}$, ne ricaviamo che il minimo assoluto di f su T è $-\frac{13\pi}{4}$ (assunto in P_3) e il massimo è $4\,\mathrm{arctg}\,2 \sim 4{,}4$ (assunto in P_1 e P_2).

4. (a) (Figura 2) Vediamo quali delle superfici di livello $S_\alpha = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = (y - 2x + 2z - 2)e^{2xy - z^2} = \alpha\}$ sono regolari. Il gradiente $\nabla g = (2e^{2xy-z^2}(-1 + y(y - 2x + 2z - 2)),\ e^{2xy-z^2}(1 + 2x(y - 2x + 2z - 2)),\ 2e^{2xy-z^2}(1 - z(y - 2x + 2z - 2)))$ si annulla quando $y - 2x + 2z - 2 = \frac{1}{y} = -\frac{1}{2x} = \frac{1}{z}$: ciò dà $y = -2x$ e $z = -2x$, da cui $(-2x) - 2x + 2(-2x) - 2 = -\frac{1}{2x}$, ovvero $16x^2 + 4x - 1 = 0$, che dà $x = \frac{-1\mp\sqrt{5}}{8}$, da cui i due punti $P_1(\frac{-1+\sqrt{5}}{8}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4})$ e $P_2(\frac{-1-\sqrt{5}}{8}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4})$. Dunque le superfici di livello sono regolari tranne quelle con P_1 e P_2, e solo in quei punti. Quella per $A(0,1,0)$ è $S = S_{-1}$, e il piano tangente è $\nabla g(A)\cdot(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = (-4, 1, 2)\cdot(x, y-1, z) = 0$, ovvero $4x - y - 2z + 1 = 0$; alternativamente, da $g(x,y,z) = -1$ si può ad esempio esplicitare $y(x,z) = 1 + (-\frac{-4}{1})x + (-\frac{2}{1})z + \cdots = 1 + 4x - 2z + \cdots$, e lo sviluppo al 1o ordine ridà il piano trovato.

(b) Posto $h(x,y,z) = x + y - z - 1$, la curva ℓ è definita da $(g,h) = (-1,0)$; lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(x,y,z) \\ \nabla g(x,y,z) \end{pmatrix}$ ha rango < 2 quando i due gradienti sono paralleli, cioè (posto per brevità $U := y - 2x + 2z - 2$) quando $2(-1 + yU) = 1 + 2xU = -2(1 - zU)$: da $-1 + yU = -(1 - zU)$ si ricava $(y - z)U = 0$, ma poiché la curva ℓ è definita da $g = -1$ (dunque in particolare $U \neq 0$) dovrà essere $z = y$, che posto in $2(-1 + yU) = 1 + 2xU$, ovvero $2(y - x)U = 3$, dà $2(x - y)(2x - 3y + 2) = 3$. Ci chiediamo ora se ℓ (definita da $x + y - z - 1 = 0$ e $(y - 2x + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$) possieda qualche punto tale che $z = y$ e $2(x - y)(2x - 3y + 2) = 3$: confrontando $z = y$ con $z = -1 + x + y$ si ottiene $x = 1$, dunque da $2(x - y)(2x - 3y + 2) = 3$ si ricava $2(1 - y)(4 - 3y) = 3$, da cui $6y^2 - 14y + 5 = 0$, da cui $y = \frac{7\mp\sqrt{19}}{6}$. Si ottengono perciò le due terne $(x,y,z) = (1, \frac{7\mp\sqrt{19}}{6}, \frac{7\mp\sqrt{19}}{6})$, ma nessuna delle due soddisfa l'ultima equazione di ℓ, ovvero $(y - 2x + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$. Perciò ℓ è una curva regolare, e il punto A evidentemente vi appartiene: poiché lo jacobiano $\begin{pmatrix} \nabla h(A) \\ \nabla g(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ha tutti e tre i minori di ordine 2 nonsingolari, all'intorno di A da $(g,h) = (-1,0)$ si possono esplicitare a scelta due delle tre variabili in funzione della terza: ad esempio, esplicitando x e y in funzione di z (da cui la parametrizzazione $\gamma(z) = (x(z), y(z), z)$), al primo ordine si ha $\begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)(z - 0) + \begin{pmatrix} o_0(z) \\ o_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}z + o_0(z) \\ 1 + \frac{2}{5}z + o_0(z) \end{pmatrix}$.

(c) Sia ℓ' la proiezione di ℓ sul piano orizzontale: visto che z dipende in modo continuo (addirittura lineare) da x e y, ci basta far vedere che ℓ' è limitata. Sostituendo $z = -1 + x + y$ in $(y - 2x + 2z - 2)e^{2xy-z^2} = -1$ si ottiene $(3y - 4)e^{-x^2-y^2+2x+2y-1} = -1$, equazione di definizione di ℓ' nel piano (x,y). Ora, è piuttosto chiaro che la funzione $\Phi(x,y)$ al 1o membro ha limite 0 quando (x,y) tende a ∞_2 (usando le coordinate polari (r,ψ) traslate in $(1,1)$, quando $r > 1$ si ha $|\Phi(x,y)| = |3(y-1) - 1|\, e^{1-(x-1)^2-(y-1)^2} = |3r\sin\psi - 1|e^{1-r^2} \leq 4re^{1-r^2}$, infinitesima quando $r \to +\infty$), dunque per definizione di limite le sue curve di livello $\neq 0$ sono tutte limitate, ovvero compatte, e tra queste ℓ'. Pertanto ℓ è una curva regolare compatta, e per Weierstrass esistono su di essa gli estremi assoluti di qualsiasi funzione continua $f(x,y,z)$; ad esempio, quando prendiamo $f(x,y,z) = x$ si troveranno i punti estremi di ℓ rispetto alla coordinata x, e per Lagrange saranno dati dal sistema in tre equazioni delle quali la prima è $\det(\nabla x, \nabla h, \nabla g) = 0$ (ovvero $\partial_z g + \partial_y g = 0$), e le altre due sono i vincoli $x + y - z - 1 = 0$ e $g(x,y,z) = -1$.





1. Esercizio 3: la curva S (blu) passante per A; l'insieme T (triangolo più segmento, azzurro); la curva di livello per il punto di minimo P_3 per f su T (grigio). **2.** Esercizio 4: la superficie $g(x,y,z) = -1$ (gialla) passa per A (blu); il piano (rosso) definisce ℓ; in alto a destra, la proiezione ℓ'.